

平 板 の 残 留 応 力 測 定

— 積分方程式の数値解についての考察 —

立 花 敏 之*

Determination of Residual Stresses in Plates

— A Research on the Numerical Solution of the Integral Equation —

Toshiyuki TACHIBANA

要 旨

曲率法またはひずみゲージ法により平板の残留応力を測定する場合、応力計算式は Volterra 型第一種積分方程式の解である。本稿では、Maclaurin 式および Newton-Cotes 式による積分方程式の数値解を実際例について検討し、残留応力計算用基本プログラムおよび測定例を示した。

Synopsis

In case of the determination of residual stresses in plates by the curvature or the strain gage method, the formulae for computation of principal stresses are the solution of Volterra's integral equation of the 1st kind. In this paper numerical solution of the integral equation by Maclaurin's and Newton-Cotes's formulae are investigated on practical examples, basic programs for computation of residual stresses and some examples of measurements are shown.

1. 緒 言

筆者らは、さきに平板に存在する残留応力を、電解法により薄層を除去し、曲率法またはひずみゲージ法により測定する場合に生ずる諸問題を解明し⁽¹⁾、ついで応力計算式における Lagrange 式による数値微分、Newton-Cotes 式による数値積分について検討し、残留応力計算用基本プログラムを示した⁽²⁾。本稿では、応力値を Volterra 型第一種積分方程式の数値解により求める場合、Maclaurin 式ならび Newton-Cotes 式による数値解を実際例について検討し、残留応力計算用基本プログラムおよび測定例を示した。なお本稿では等方等質性平板の残留応力を曲率法により測定する場合（主応力方向既知）のプログラムを示したが、これからひずみゲージ法による場合、主応力方向未知の場合、異方性平板の場合等のプログラムを容易に導くことができる。

2. 残留応力測定理論

平板の残留応力計算式を導くにあたり、つぎの仮定

をおく。

- (1) 平板は等方等質性の材料より成り、その厚さは一様である。
- (2) 平板に存在する残留応力は、その中央平面に平行な平面間に相互応力の存在しない平面応力状態にある。
- (3) 平板の残留主応力は、その表面からの深さのみの関数である。
- (4) 平板の曲げについては、Bernoulli-Euler 仮定

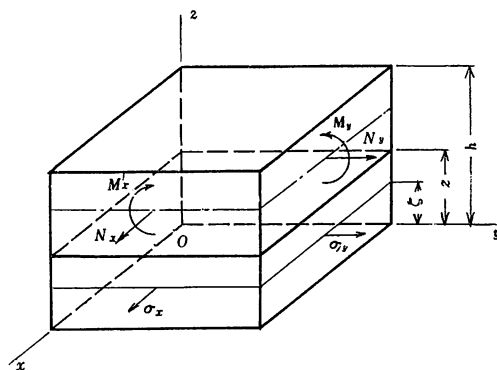


図 1 平 板 素

* 教授 機械工学科

および Coulomb 仮定に従う。

(5) 平板の単純引張および圧縮については、その応力分布は一樣である。

(6) 平板を構成する材料は、Hooke 法則に従い、かつ引張と圧縮との縦弾性係数および Poisson 比はそれぞれ相等しい。

平板の表面から薄層を除去すると、応力の平衡が破れ、残っている板に曲げモーメントおよび面内力が作用し、板が変形する。図 1 に示したように、板の表面に原点 O を、主応力方向に x 軸・ y 軸を、厚さ方向に z 軸を取り、記号をつぎのように定め、残留主応力を式(1)のように表わす。

- E : 板材の縦弾性係数
 ν : 板材の Poisson 比
 h : 平板の厚さ
 κ_x, κ_y : 板の主曲率 (板が上方に凸のとき正、凹のとき負とする)
 $\varepsilon_x, \varepsilon_y$: 板の背面のひずみ (伸びを正、縮みを負とする)
 d : 板の背面とひずみゲージ中心線または中央面間の距離
 u_x, u_y : 平板の見かけの残留主応力,
 σ_x, σ_y : 平板の残留主応力
 (引張応力を正、圧縮応力を負とする)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x(z) &= \frac{1}{1-\nu^2} [u_x(z) + \nu u_y(z)] \\ \sigma_y(z) &= \frac{1}{1-\nu^2} [u_y(z) + \nu u_x(z)] \end{aligned} \right\} (1)$$

曲率法によるときは、板の表面から逐次薄層を除去しつつ、適当時間ごとに板の主曲率を測定する。板の主曲率と板に作用する曲げモーメントとの関係から、つぎの Volterra 型第一種積分方程式を得る⁽³⁾⁽⁴⁾⁽¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^z \left(\frac{h-z}{2} + d \right) \left(\frac{h+z}{2} - \zeta \right) - \frac{(h-z)^2}{12} u_x(\zeta) d\zeta &= -\frac{E}{12} (h-z)^3 \kappa_x(z) \\ \int_0^z \left(\frac{h-z}{2} + d \right) \left(\frac{h+z}{2} - \zeta \right) - \frac{(h-z)^2}{12} u_y(\zeta) d\zeta &= -\frac{E}{12} (h-z)^3 \kappa_y(z) \end{aligned} \right\} (2)$$

これを解いて、つぎの久野・土肥式を得る⁽³⁾⁽⁴⁾⁽¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} u_x(z) &= -\frac{E}{6} \left[(h-z)^2 \frac{d}{dz} \kappa_x(z) - 4(h-z) \kappa_x(z) + 2 \int_0^z \kappa_x(\zeta) d\zeta \right] \\ u_y(z) &= -\frac{E}{6} \left[(h-z)^2 \frac{d}{dz} \kappa_y(z) - 4(h-z) \kappa_y(z) + 2 \int_0^z \kappa_y(\zeta) d\zeta \right] \end{aligned} \right\} (3)$$

ひずみゲージ法によるときは、板の表面から逐次

薄層を除去しつつ、適当時間ごとに板の背面のひずみを測定する。板の背面のひずみと板に作用する曲げモーメントおよび面内力との関係から、つぎの Volterra 型第一種積分方程式を得る⁽⁵⁾⁽¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^z \left[\left(\frac{h-z}{2} + d \right) \left(\frac{h+z}{2} - \zeta \right) - \frac{(h-z)^2}{12} \right] u_x(\zeta) d\zeta &= -\frac{E}{12} (h-z)^3 \varepsilon_x(z) \\ \int_0^z \left[\left(\frac{h-z}{2} + d \right) \left(\frac{h+z}{2} - \zeta \right) - \frac{(h-z)^2}{12} \right] u_y(\zeta) d\zeta &= -\frac{E}{12} (h-z)^3 \varepsilon_y(z) \end{aligned} \right\} (4)$$

これを解いて、つぎの土肥式を得る⁽⁵⁾⁽¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} u_x(z) &= -\frac{E}{2} \left[\frac{(h-z)^2}{h-z+3d} \frac{d}{dz} \varepsilon_x(z) - 4 \frac{h-z}{h-z+3d} \varepsilon_x(z) + 6(h-z+d) \int_0^z \frac{\varepsilon_x(\zeta)}{(h-\zeta+3d)^2} d\zeta \right] \\ u_y(z) &= -\frac{E}{2} \left[\frac{(h-z)^2}{h-z+3d} \frac{d}{dz} \varepsilon_y(z) - 4 \frac{h-z}{h-z+3d} \varepsilon_y(z) + 6(h-z+d) \int_0^z \frac{\varepsilon_y(\zeta)}{(h-\zeta+3d)^2} d\zeta \right] \end{aligned} \right\} (5)$$

ここで、板・接着剤層・ゲージベース・ゲージの各境界にすべりはしないものとし、板以外は外力に対する抵抗を無視し得るものとする。

曲板においても、その曲率半径がその厚さに比し十分大きいときは、板の曲率の変化または背面のひずみを測定すると、前述の式(2)～(5)が近似的に成り立つ⁽¹⁾。

3. 積分方程式の数値解

3.1 数値積分算式

積分方程式の数値解を求めるのに数値積分に MacLaurin 一間隔式・三間隔式・四間隔式・五間隔式・六間隔式および Newton-Cotes 二点式 (台形式)・三点式 (第一 Simpson 式)・四点式 (第二 Simpson 式)・五点式 (Boole 式)・六点式を適用した。

つぎに MacLaurin 式⁽⁶⁾を示す。ここで、 w を z の関数とし、分点を z_i 、分点 z_{i-1} と z_i との中点を z_{mi} 、 $w(z_{mi})$ を w_i 、分点間隔を Δz とする。

$$\int_{z_{i-1}}^{z_i} w(z) dz = \Delta z \cdot w_i + \frac{1}{24} (\Delta z)^3 w^{(2)}(\zeta) \quad \left. \begin{aligned} (z_{i-1} < \zeta < z_i) \quad (i=2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{z_{i-3}}^{z_i} w(z) dz &= \frac{\Delta z}{8} (9w_{i-2} + 6w_{i-1} + 9w_i) \\ &+ \frac{21}{640} (\Delta z)^5 w^{(4)}(\zeta) \quad \left. \begin{aligned} (z_{i-3} < \zeta < z_i) \quad (i=4, 5, \dots) \end{aligned} \right\} (7) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{z_{i-4}}^{z_i} w(z) dz &= \frac{\Delta z}{12} (13w_{i-3} + 11w_{i-2} + 11w_{i-1} \\ &+ 13w_i) + \frac{103}{1440} (\Delta z)^5 w^{(4)}(\zeta) \\ &(z_{i-4} < \zeta < z_i) \quad (i=5, 6, \dots) \end{aligned} \right\} (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{z_{i-5}}^{z_i} w(z) dz &= \frac{\Delta z}{1152} (1375w_{i-4} + 500w_{i-3} \\ &+ 2010w_{i-2} + 500w_{i-1} + 1375w_i) \\ &+ \frac{5575}{193536} (\Delta z)^7 w^{(6)}(\zeta) \\ &(z_{i-5} < \zeta < z_i) \quad (i=6, 7, \dots) \end{aligned} \right\} (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{z_{i-6}}^{z_i} w(z) dx &= \frac{\Delta z}{640} (741w_{i-5} + 417w_{i-4} \\ &+ 762w_{i-3} + 762w_{i-2} + 417w_{i-1} + 741w_i) \\ &+ \frac{1111}{17920} (\Delta z)^7 w^{(6)}(\zeta) \\ &(z_{i-6} < \zeta < z_i) \quad (i=7, 8, \dots) \end{aligned} \right\} (10)$$

つぎに Newton-Cotes 式⁽⁶⁾を示す。ここで、 w を z の関数とし、分点を z_i 、 $w(z_i)$ を w_i 、分点間隔を Δz とする。

$$\left. \begin{aligned} \int_{z_{i-1}}^{z_i} w(z) dz &= \frac{\Delta z}{2} (w_{i-1} + w_i) \\ &- \frac{1}{12} (\Delta z)^3 w^{(2)}(\zeta) \\ &(z_{i-1} < \zeta < z_i) \quad (i=2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{z_{i-2}}^{z_i} w(z) dz &= \frac{\Delta z}{3} (w_{i-2} + 4w_{i-1} + w_i) \\ &- \frac{1}{90} (\Delta z)^5 w^{(4)}(\zeta) \\ &(z_{i-2} < \zeta < z_i) \quad (i=3, 4, \dots) \end{aligned} \right\} (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{z_{i-3}}^{z_i} w(z) dz &= \frac{\Delta z}{8} (3w_{i-3} + 9w_{i-2} + 9w_{i-1} \\ &+ 3w_i) - \frac{3}{80} (\Delta z)^5 w^{(4)}(\zeta) \\ &(z_{i-3} < \zeta < z_i) \quad (i=4, 5, \dots) \end{aligned} \right\} (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{z_{i-4}}^{z_i} w(z) dz &= \frac{\Delta z}{45} (14w_{i-4} + 64w_{i-3} + 24w_{i-2} \\ &+ 64w_{i-1} + 14w_i) - \frac{8}{945} (\Delta z)^7 w^{(6)}(\zeta) \\ &(z_{i-4} < \zeta < z_i) \quad (i=5, 6, \dots) \end{aligned} \right\} (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{z_{i-5}}^{z_i} w(z) dz &= \frac{\Delta z}{288} (95w_{i-5} + 375w_{i-4} \\ &+ 250w_{i-3} + 250w_{i-2} + 375w_{i-1} + 95w_i) \\ &- \frac{275}{12096} (\Delta z)^7 w^{(6)}(\zeta) \\ &(z_{i-5} < \zeta < z_i) \quad (i=6, 7, \dots) \end{aligned} \right\} (15)$$

3. 2 積分方程式の数値解法

Volterra 型第一種積分方程式は、つぎの式で表わされる。

$$\int_a^z k(z, \zeta) u(\zeta) d\zeta = f(z) \quad (16)$$

ここで $k(z, \zeta)$: 方程式の核
 $f(z)$: 既知関数
 $u(z)$: 未知関数

Maclaurin 式を適用する場合は、分点を z_i (ただし $z_1 = a$ とする)、分点 z_{i-1} と z_i との中点を z_{mi} (ただし $z_{m1} = a$ とする)、分点間隔を Δz 、 $f(z_i) \cdot u(z_{mi}) \cdot k(z_i, z_{mj})$ をそれぞれ $f_i \cdot u_i \cdot k_{ij}$ とすると、式(16)の数値解はつぎの式で与えられる。ただし、 $k_{ii} \neq 0$ とする。

$$u_i = \begin{cases} (f_i / \Delta z) / p_i k_{ii} & (i=2) \\ (f_i / \Delta z - \sum_{j=2}^{i-1} p_j k_{ij} u_j) / p_i k_{ii} & (i=3, 4, \dots) \end{cases} \quad (17)$$

ここで p : Maclaurin 式の係数

Newton-Cotes 式を適用する場合は、分点を z_i (ただし $z_1 = a$ とする)、分点間隔を Δz 、 $f(z_i) \cdot u(z_i) \cdot k(z_i, z_j)$ をそれぞれ $f_i \cdot u_i \cdot k_{ij}$ とすると、式(16)の数値解はつぎの式で与えられる。ただし、 $k_{ii} \neq 0$ とする。

$$u_i = (f_i / \Delta z - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j p_j k_{ij} u_j) / p_i k_{ii} \quad (i=2, 3, \dots) \quad (18)$$

ここで p : Newton-Cotes 式の係数

α : 重み

なお、 u_1 はつぎの式で求められる。ただし、 $k_{11} \neq 0$ とする。

$$u_1 = f_1' / k_{11} \quad (19)$$

本稿では、Maclaurin 一間隔式・三間隔式(必要に応じ、一間隔式・四間隔式・五間隔式を併用する)・五間隔式(必要に応じ、一間隔式・三間隔式・四間隔式・六間隔式を併用する)および Newton-Cotes 二点式・三点式(必要に応じ、二点式・四点式を併用する)・五点式(必要に応じ、二点式・三点式・四点式・六点式を併用する)により数値解を求めた。なお導関数 f_1' は、Lagrange 五点中心微分式(必要な値を補外する)により求めた⁽²⁾。

3. 3 計 算 例

(1) Volterra 型第一種積分方程式

$$\int_0^z (1+z-\zeta) u(\zeta) d\zeta = z \quad (20)$$

の理論解は

$$u(z) = e^{-z} \quad (21)$$

である。この方程式の数値解を、前述の方法により分点間隔を 0.001, 0.005, 0.010, 0.015 として求め

表 1 積分方程式(2)の数値解

(a) Maclaurin 式による数値解

z_m	u_{M1}	u_{M3}	u_{M5}	$\exp(-z_m)$
.0145	.98561	.98560	.98560	.98560
.0295	.97093	.97093	.97093	.97093
.0445	.95648	.95648	.95648	.95648

($\Delta z=0.001$)

.1475	.86286	.86286	.86286	.86286
.2975	.74268	.74267	.74267	.74267
.4475	.63923	.63922	.63923	.63922

($\Delta z=0.005$)

.1450	.86503	.86502	.86503	.86502
.2950	.74454	.74453	.74453	.74453
.4450	.64083	.64083	.64083	.64082

($\Delta z=0.010$)

.1425	.86721	.86718	.86716	.86719
.2925	.74641	.74640	.74638	.74640
.4425	.64244	.64243	.64242	.64243

($\Delta z=0.015$)

(b) Newton-Cotes 式による数値解

z	u_{N2}	u_{N3}	u_{N5}	$\exp(-z)$
.004	.99601	.99602	.99603	.99601
.015	.98511	-.30344	-.851E01	.98511
.030	.97044	.109E08	.113E10	.97045
.045	.95600	-.587E14	-.827E17	.95600

($\Delta z=0.001$)

.020	.98020	.98060	.98069	.98020
.150	.86071	.309E09	.319E11	.86071
.300	.74082	.159E23	.202E27	.74082
.450	.63747	.817E36	.171E43	.63763

($\Delta z=0.005$)

.040	.96079	.96243	.96278	.96079
.150	.86066	-.147E03	-.107E04	.86071
.300	.74085	.143E10	.147E12	.74082
.450	.63756	-.882E16	-.123E20	.63763

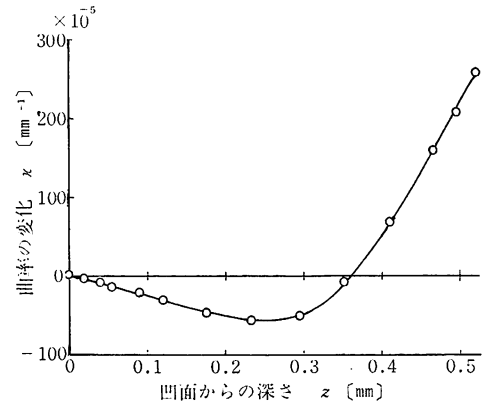
($\Delta z=0.010$)

.060	.94177	.94551	.94631	.94176
.150	.86073	.306E01	.914E01	.86071
.300	.74086	.902E05	.154E07	.74082
.450	.63770	.370E10	.381E12	.63763

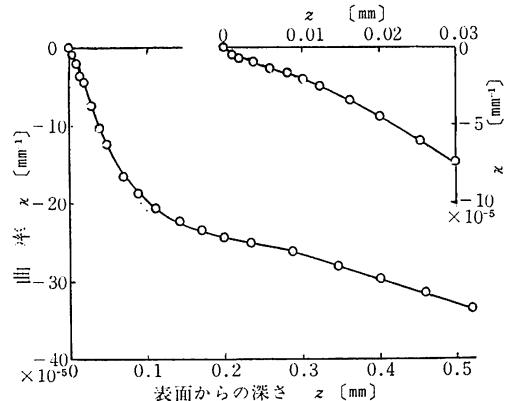
($\Delta z=0.015$)

た。その結果を理論値と対比して表 1 に示す。ここで、Maclaurin 一・三・五間隔式・五間隔式による数値解をそれぞれ u_{M1} ・ u_{M3} ・ u_{M5} 、Newton-Cotes 二点式・三点式・五点式による数値解をそれぞれ u_{N2} ・ u_{N3} ・ u_{N5} とする。

(2) 筆者らが平板の残留応力を測定する際に得られた試験片の曲率(の変化)と除去深さとの関係曲線を図 2 に示す。



(a) 曲げ加工



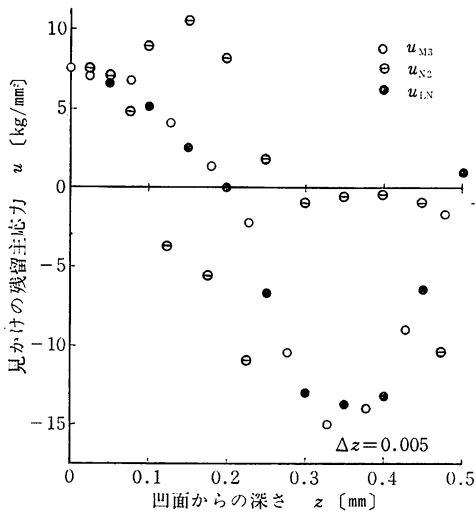
(b) 研削加工

図 2 曲率の変化

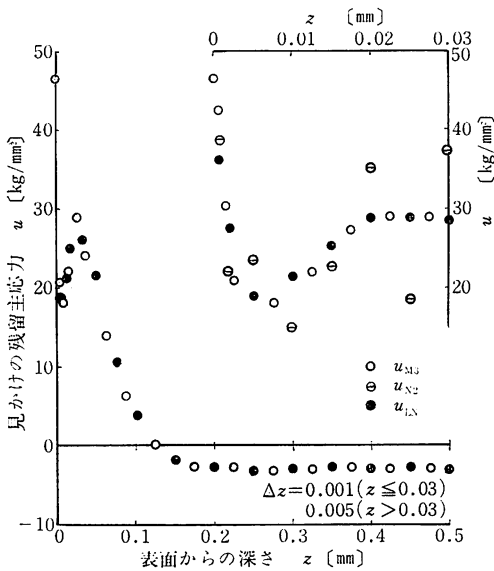
これを基にして、積分方程式(2)の数値解を、前述の方法により分点間隔を 0.005, 0.010 または 0.015 (必要に応じ 0.001) として求めた。その結果を図 3 に示す。なお、同図には式(3)の計算値 u_{LN} (数値微分は Lagrange 五点中心微分式に、数値積分は Newton-Cotes 三点式による)⁽²⁾ を付記した。

3. 4 考 察

以上の計算結果によると、Volterra 型第一種積分方程式の数値解を求めるのに Newton-Cotes 式を適



(a) 曲げ加工



(b) 研削加工

図 3 見かけの残留主応力

用することは、一般に誤差が拡大され累積されていき異常な値を示すので不適当である⁽⁷⁾。これに対し、

Maclaurin 式を適用するとこのようなことはない。

分点間隔がこれらの計算例のように小さい場合は、Maclaurin 一間隔式・三間隔式および五間隔式による計算値は互いによく一致しており、計算例(1)では理論値とよく一致し、計算例(2)では式(3)の計算値と連続的である。分点間隔を 0.005 から 0.010, 0.015 に変えてもその差は小さい。

上述のことから、残留応力の計算には Maclaurin 三間隔式を適用し、分点間隔を測定装置の精度にもよるが、一般に 0.005 または 0.010 とし、必要に応じより小さくまたはより大きくするとよい。

なお、計算に要する時間は式(3)の数値計算に要する時間より若干長い、その差は僅少である。

4. 残留応力計算用プログラム

4.1 残留応力計算用基本プログラム

平板の残留応力計算の流れ図を図 4 に示す。

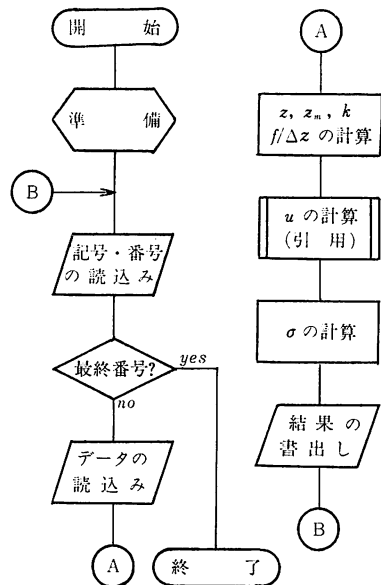


図 4 流れ図

前節の結果を考慮に入れて作成した曲率法による場合の残留応力計算用基本プログラムをつぎに示す。このプログラムに用いた変数名はつぎの通りである。

NS : 記号	H : h	CKPX : κ_x	UX : u_x
NO : 番号	DELZ : d_z	CKPY : κ_y	UY : u_y
N : データ数	Z : z	FDX : $f_x/dz, (f'_x)$	SGMX : σ_x
YE : E	ZM : z_m	FDY : $f_y/dz, (f'_y)$	SGMY : σ_y
PN : ν	CK : k		

なお、このプログラムから、分点間隔を変える場合⁽⁸⁾⁽¹⁰⁾、異方性平板の場合⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾等のプログラムを、
合、ひずみゲージ法による場合、主応力方向未知の場合⁽⁸⁾⁽¹⁰⁾、容易に導くことができる。

プログラム 残留応力計算用基本プログラム

```

(a) 主プログラム 曲率法
C *** FORTRAN PROGRAM RCV 0010
C DETERMINATION OF RESIDUAL STRESSES IN PLATES BY CURVATURE METHOD RCV 0020
C *** MAIN PROGRAM RCV 0030
C *** PREPARATION RCV 0040
C DIMENSION Z (150), ZM (150), CK (150, 150), RCV 0050
1 CKPX (150), CKPY (150), FDX (150), FDY (150), RCV 0051
2 UX (150), UY (150), SGMX (150), SGMY (150) RCV 0052
C *** INPUT RCV 0060
10 READ (5, 5000) NS, NO RCV 0070
IF (NO.EQ. 9999) STOP RCV 0080
READ (5, 5100) YE, PN, H, DELZ, N, (CKPX (I), I=1, N), (CKPY (I), I=1, N) RCV 0090
5000 FORMAT (5X, A 10, I10) RCV 0100
5100 FORMAT (5X, 4F10.0, I10/(5X, 5F10.0)/(5X, 5F10.0)) RCV 0110
C *** COMPUTATION RCV 0120
DO 100 I=3, N RCV 0130
Z (I)=FLOAT (I-3) *DELZ RCV 0140
IF (I.GE. 4) GO TO 20 RCV 0150
ZM (I) =0. RCV 0160
CK (I, I)=H/2. RCV 0170
FDX (I) =-YE*H**3*((CKPX (I-2)-CKPX (I-1))*8. RCV 0180
+8.*CKPX (I+1)-CKPX (I+2))/12.*/DELZ RCV 0181
1 FDY (I) =-YE*H**3*((CKPY (I-2)-CKPY (I-1))*8. RCV 0190
+8.*CKPY (I+1)-CKPY (I+2))/12.*/DELZ RCV 0191
GO TO 100 RCV 0200
20 ZM (I) =(Z (I-1)+Z (I))/2. RCV 0210
DO 110 J=4, I RCV 0220
CK (I, J)=(H+Z (I))/2. -ZM (J) RCV 0230
110 CONTINUE RCV 0240
FDX (I) =-YE*(H-Z (I))*3*CKPX (I)/(12. *DELZ) RCV 0250
FDY (I) =-YE*(H-Z (I))*3*CKPY (I)/(12. *DELZ) RCV 0260
100 CONTINUE RCV 0270
CALL VLTREQ (N, CK, FDX, UX) RCV 0280
CALL VLTREQ (N, CK, FDY, UY) RCV 0290
DO 200 I=3, N RCV 0300
SGMX (I)=(UX (I)+PN*UY (I))/(1. -PN**2) RCV 0310
SGMY (I)=(UY (I)+PN*UX (I))/(1. -PN**2) RCV 0320
200 CONTINUE RCV 0330
C *** OUTPUT RCV 0340
WRITE (6, 6000) NS, NO, H, YE, PN, RCV 0350
1 (Z (I), CKPX (I), CKPY (I), RCV 0351
2 ZM (I), UX (I), UY (I), SGMX (I), SGMY (I), I=3, N) RCV 0352
6000 FORMAT (1H1/1H0, 10X, 3HNO., A 5, 1H-, 14/ RCV 0360
1 1H0, 10X, 2HH=, 0PF6.3, 5X, 3HYE=, 1PE10.3, 3HPN=, 0PF6.3/ RCV 0361
2 1H0, 12X, 1HZ, 10X, 4HCKPX, 11X, 4HCKPY, RCV 0362
3 10X, 2HZM, 11X, 2HUX, 13X, 2HUY, 12X, 4HSGMX, 11X, 4HSGMY/ RCV 0363
4 (1H, 0PF15.3, 1PE15.3, 0PF11.4, 1P4E15.3)) RCV 0364
C *** GOING AROUND AGAIN RCV 0370
GO TO 10 RCV 0380
C *** FINISH RCV 0390
END RCV 0400

(b) 副プログラム Volterra 型積分方程式の数値解
C *** SUBPROGRAM RSV 0010
C NUMERICAL SOLUTION OF VOLTERRA EQUATION RSV 0020
C SUBROUTINE VLTREQ (N, CK, FD, U) RSV 0030
C *** PREPARATION RSV 0040
C DIMENSION CK (150, 150), FD (150), U (150), P (5, 5) RSV 0050
P (1, 1)= 1. RSV 0060
P (3, 1)= 9./ 8. RSV 0070
P (3, 2)= 6./ 8. RSV 0071
P (3, 3)= 9./ 8. RSV 0072
P (4, 1)= 13./ 12. RSV 0080
P (4, 2)= 11./ 12. RSV 0081
P (4, 3)= 11./ 12. RSV 0082
P (4, 4)= 13./ 12. RSV 0083
P (5, 1)=1375./1152. RSV 0090
P (5, 2)= 500./1152. RSV 0091
P (5, 3)=2010./1152. RSV 0092
P (5, 4)= 500./1152. RSV 0093
P (5, 5)=1375./1152. RSV 0094
C *** COMPUTATION RSV 0100
DO 100 I=3, N RSV 0110
SKU =0. RSV 0120
IF (I.GE. 4) GO TO 10 RSV 0130
PCK =CK (I, I) RSV 0140
GO TO 60 RSV 0150
10 IF (I-5) 30, 20, 40 RSV 0160

```

```

20  SKU = P (1, 1)*CK (I, I-1)*U (I-1)+SKU
30  PCK = P (1, 1)*CK (I, I)
   GO TO 60
40  MD =MOD (I, 3)
   M  =MD+2
   IF (I .LE. 8) GO TO 50
   II  =I-MD-5
   DO 200 J=4, II, 3
   SKU = (P (3, 1)*CK (I, J)*U (J)+P (3, 2)*CK (I, J+1)*U (J+1)
1    +P (3, 3)*CK (I, J+2)*U (J+2))+SKU
200  CONTINUE
50  DO 300 J=1, M
   JJ =I-MD-3+.
   SKU=P (MD+3, J)*CK (I, JJ)*U (JJ)+SKU
300  CONTINUE
   PCK = P (MD+3, MD+3)*CK (I, I)
60  U (I)=(FD (I)-SKU)/PCK
100  CONTINUE
C *** FINISH
   RETURN
   END

```

RSV 0170
RSV 0180
RSV 0190
RSV 0200
RSV 0210
RSV 0220
RSV 0230
RSV 0240
RSV 0250
RSV 0251
RSV 0260
RSV 0270
RSV 0280
RSV 0290
RSV 0300
RSV 0310
RSV 0320
RSV 0330
RSV 0340
RSV 0350
RSV 0360

4.2 残留応力測定例

実験に供した試料は、市販の炭素工具鋼5種(SK5)帯板を真空電気炉で焼なまししたもの(試料の機械的性質を表2に、焼なまし条件を表3に示す)で、試験片は全長140 mm(うち溶解部の長さ70 mm)幅10 mmの短ざく状とした。

この試験片を電解法(電解条件を表4に示す)により片面から逐次薄層を除去しつつ、適当時間ごとに曲率の変化を望遠鏡と尺度の法(尺度は1000 mmの円

表2 試料の機械的性質(焼なまし状態)

降伏点	引張強さ	破断伸び	絞り
42 kg/mm ²	54 kg/mm ²	19.4%	36.0%
縦弾性係数	Poisson 比	Vicker's かたさ	
2.06×10 ⁴ kg/mm ²	0.281	168	

表3 焼なまし条件

昇温時間	焼なまし温度	保持時間	冷却速度
1 h	750°C	40 min	20 deg/h (500°Cまで) 炉冷 (500°C以下)

表4 電解条件

電解液組成			電解液温度	陽極電流密度
塩化第一鉄	塩化カルシウム	水		
300 g	335 g	1 ℓ	30±0.5°C	0.12 0.60 1.7 A/cm ²

(注) 溶解深さ 0.0171 mm/(A/cm²)min

弧状とし、鏡と尺度間の距離を1000 mmとした)またはランプと尺度の法(光源にHe-Neガスレーザ発振器を用い、鏡と尺度間の距離を5000 mmとした)により、また試験片背面のひずみをひずみゲージ(使用したひずみゲージ等を表5に示す)を用いて測定した。

表5 ひずみゲージ・接着剤・防水剤・緑緑塗料

ひずみゲージ	ゲージ箔の厚さ	ゲージベースの厚さ	結線
箔フェステルゲージ (自己温度補償型) ゲージ長5 mm	10 μ	25 μ	3線式
接着剤	接着剤層の厚さ	防水剤	絶縁塗料
シアノアクリレート系樹脂	30 μ	エポキシ系樹脂	ラッカペイント

表6 研削条件

研削といし	といし周速度	テーブル縦送り
1号A, 205×19×32 WA, 46, J, m2, V	1540 m/min	12 m/min
テーブル送り	切込み深さ	研削方式
0.15 mm/pass	0.06 mm	乾式

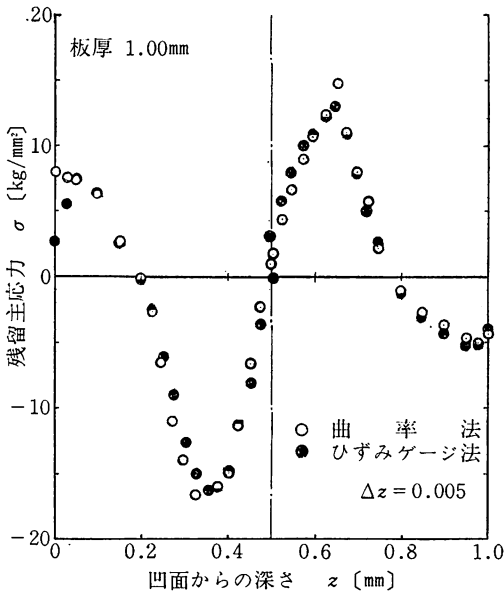
(1) 曲げ加工による帯板の残留応力

前述の試験片を曲率半径約240 mmに成形し、その残留応力を曲率法(望遠鏡と尺度の法)とひずみゲージ法を併用して測定した。応力値を前述の方法により計算した結果を図5に示す。この結果によると、応力分布状況は久野・土肥の理論解析結果⁽⁴⁾とよく一致し

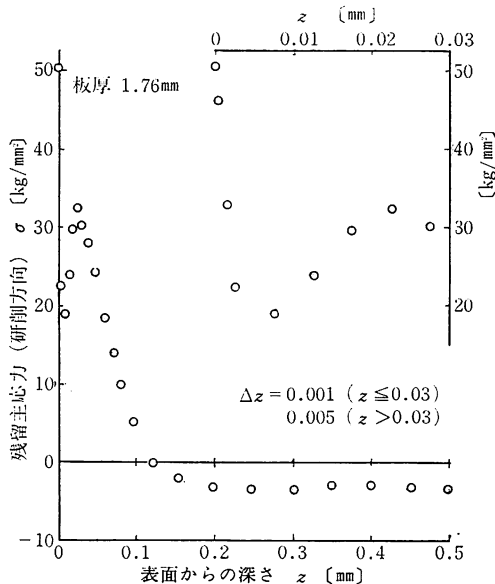
ている。

(2) 研削加工による帯板の残留応力

前述の試験片の両面を平面研削し（研削条件を表6に示す）、その残留応力を曲率法（ランプと尺度の法）により測定した。応力値を前述の方法により計算した結果を図5に示す。この結果によると、応力分布状況は Henriksen,⁽¹¹⁾ 高沢⁽¹²⁾ の残留応力発生機構説明図とよく一致している。



(a) 曲げ加工



(b) 研削加工

図5 帯板の残留主応力

5. 結 語

平板の残留応力を積分方程式の数値解により求めることについて検討した結果、つぎの結論が得られた。

(1) Volterra 型第一種積分方程式の数値解を求めるのに Newton-Cotes 式を適用することは、一般に誤差が拡大され累積されていき異常な値を示すので不適当であり、これに対し Maclaurin 式を適用するとこのようなことはなことはない。

(2) 平板の残留応力の計算には、Maclaurin 三間隔式を適用し、分点間隔を測定装置の精度にもよるが、一般に 0.005 または 0.010 とし、必要に応じより小さくまたはより大きくするとよい。なお平板表面の残留応力の計算には数値微分計算式を適用しなければならない。

(3) 本稿には、等方等質性平板の曲率法による残留応力計算用プログラム（主応力方向既知、分点間隔一様な場合）を示したが、これから分点間隔を変える場合、ひずみゲージ法による場合、主応力方向未知の場合、異方性平板の場合等のプログラムを容易に導くことができる。

(4) 計算に要する時間は、積分方程式の理論解の数値計算に要する時間より若干長い、その差は僅少である。

終りに、平板の残留応力測定について指導・助言を賜った北海道大学工学部土肥教授・鶴飼助教授、実験に多大の労を惜しまなかった本校中津助手、実験にご協力いただいた機械工学科ならびに実習工場の各位・電気工学科篠原技官、実験に多くの労をわずらわせた卒業研究残留応力班の学生諸君に深く感謝する。なお本稿の計算は北海道大学大型計算機センターを利用したものである。ここに記して感謝の意を表わす。

参 考 文 献

- (1) 立花敏之・中津正志：「平板の残留応力測定—曲率法およびひずみゲージ法についての考察—」苫小牧工業高等専門学校紀要第7号（1972）
- (2) 同 上：「平板の残留応力測定—応力計算についての考察—」同 上第8号（1973）
- (3) R. G. Treuting & W. T. Read, Jr.: "A mechanical determination of biaxial residual stresses in sheet materials" J. Applied Physics Vol. 22, No. 2 (1951)
- (4) 久野陸夫・土肥 修：「金属板の残留内測定」北海道大学工学部研究報告第9号（1953）
- (5) 土肥 修：抵抗線歪計による平板残留2主応力測定法—特に薄板に対する考慮—同 上第27号

- (1967)
- (6) 渡部 信夫：「計算法」基礎工業数学講座第 5 巻朝倉書店 (1964)
- (7) 磯田和男・大野 豊：“FORTRAN による数値計算ハンドブック” オーム社 (1971)
- (8) 土肥 修：「主応力方向が未知の場合の平板の残留主応力測定法」日本機械学会論文集第 30 巻第 215 号 (1964)
- (9) 土肥 修・片岡更一：「直交異方板の残留主応力測定法 (木材平板の残留主応力)」同上第 33 巻第 249 号 (1967)
- (10) 同 上：「主応力方向が未知の場合の直交異方板の残留主応力測定法」同上第 39 巻第 320 号 (1973)
- (11) E. K. Henriksen: “H. R. Letner & H. J. Snyder: Grinding and lapping stresses in Manganese oil hardening tool steel, Discussion” Trans. ASME Vol. 75 (1953)
- (12) 高沢孝哉：「研削加工変質層」精密機械 第 27 巻第 6 号 (1961)

(昭和49年12月2日受理)

