

棒状要素よりなる平面構造の側方不安定解析について

沢 田 知 之*
能 町 純 雄**

On Lateral Instability Analysis of a Plane Structure
Made-up of Hinge Connected Bar Elements

Tomoyuki SAWADA
Sumio. G. NOMACHI

要 旨

本稿は、矢板構造に見られるような、棒状要素からなる、平面構造についての側方不安定解析を行ない、その挙動を考察したものである。

Synopsis

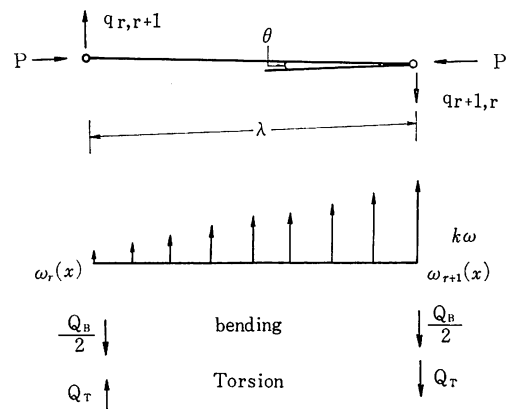
In this paper, the behaviour of the Lateral Instability Analysis about plane structure made-up of the bar elements, which appears in sheet-pile structures, is described.

1. ま え が き

本論において、矢板要素は Span- 方向に Hinge 結合され、弾性床上にある場合を考えている。各節点の鉛直力と水平力を各要素の鉛直方向変位と軸廻りの回転変位で表わし、節点での力の釣り合いを満足するように基本微分差分方程式を誘導する。これに、フーリエ定和変換及びフーリエ変換を適用しさらに Trial-method を用いることによって座屈荷重を求め得る。

2. 理論式の誘導

任意の Sheet-pile を取り出した図-1 より次の微分方程式が導かれる。



図—1

$$EI \cdot \frac{w_{r+1}^{IV}(x) + w_r^{IV}(x)}{2} = Q_B - \frac{w_r(x) + w_r(x)}{2} \cdot K \quad (1)$$

$$GJ \cdot \frac{\ddot{w}_{r+1}(x) \ddot{w}_r(x)}{\lambda} = -\lambda \cdot Q^T + \frac{K \cdot \lambda}{12} \{w_{r+1}(x) - w_r(x)\} + P \{w_{r+1}(x) - w_r(x)\} \quad (2)$$

EI : 曲げ剛性
 GJ : ねじり剛性
 $w_r(x)$: たわみ
 λ : Sheet-pile 幅
 k : 地盤反力係数
 K : $\lambda \cdot k$

* 講師 土木工学科

** 教授 北海道大学工学部土木工学科

又,

$$q_{r+1,r} = \frac{Q_B}{2} + Q_T \quad (3)$$

$$q_{r,r+1} = \frac{Q_B}{2} + Q_T \quad (4)$$

(1) (2) より Q_B , Q_T を (3) (4) に代入して, $q_{r,r-1}$, $q_{r,r+1}$ を求める。

故に 節点条件

$$q_{r,r-1} - q_{r,r+1} = 0 \quad (5)$$

よって (5) 式より次式が導かれる。

$$\begin{aligned} & \frac{EI}{4} \{w_{r+1}^{IV}(x) + 2w_r^{IV}(x) + w_{r-1}^{IV}(x)\} + \frac{K}{4} \{w_{r+1}(x) + 2w_r(x) + w_{r-1}(x)\} \\ & + \frac{GJ}{\lambda^2} \{\ddot{w}_{r+1}(x) - 2\ddot{w}_r(x) + \ddot{w}_{r-1}(x)\} - \frac{K}{12} \{w_{r+1}(x) - 2w_r(x) + w_{r-1}(x)\} \\ & - \frac{P}{\lambda} \{w_{r+1}(x) - 2w_r(x) + w_{r-1}(x)\} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで 2 次差分式

$$\Delta^2 w_{r-1}^{IV}(x) = w_{r+1}^{IV}(x) - 2w_r^{IV}(x) + w_{r-1}^{IV}(x) \text{ とおくと, (6) は次の如く示される。}$$

$$\frac{EI}{4} \{\Delta^2 w_{r-1}^{IV}(x) + 4w_r^{IV}(x)\} + \frac{GJ}{\lambda^2} \Delta^2 \ddot{w}_{r-1}(x) + \frac{K}{6} \Delta^2 w_{r-1}(x) + K \cdot w_r(x) - \frac{P}{\lambda} \Delta^2 w_{r-1}(x) = 0 \quad (7)$$

よって, (7) に次に示す, Fourier-Sine 定和分変換を施すと (8) になる。

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{n-1} \Delta^2 f(r-1) \cdot \sin \frac{i\pi}{n} r &= -\sin \frac{i\pi}{n} \{(-1)^i f(n) - f(0)\} - D_i \cdot \sum_{r=1}^{n-1} f(r) \cdot \sin \frac{i\pi}{n} r \\ D_i &= 2 \cdot (1 - \cos \frac{i\pi}{n}) \\ \therefore \frac{EI}{4} &\left[-S_i \cdot \{(-1)^i w_n^{IV}(x) - w_0^{IV}(x)\} - D_i w_i^{IV}(x) + 4w_i^{IV}(x) \right] \\ &+ \frac{GJ}{\lambda^2} \left[-S_i \cdot \{(-1)^i \ddot{w}_n(x) - \ddot{w}_0(x)\} - D_i \ddot{w}_i(x) \right] \\ &+ \frac{K}{6} \left[-S_i \cdot \{(-1)^i w_n(x) - w_0(x)\} - D_i \bar{w}_i(x) + 6\bar{w}_i(x) \right] \\ &- \frac{P}{\lambda} \left[-S_i \cdot \{(-1)^i w_n(x) - w_0(x)\} - D_i \bar{w}_i(x) \right] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

ここで

$$\begin{aligned} \bar{w}_i(x) &= \sum_{r=1}^{n-1} w_r(x) \cdot \sin \frac{i\pi}{n} r \\ S_i &= \sin \frac{i\pi}{n} \end{aligned}$$

(8) にさらに Fourier -Sine 変換を行なう。

$$\begin{aligned} \text{尚, } \int_0^{\ell} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} \sin \frac{m\pi}{\ell} x \cdot dx &= \left[-\frac{m\pi}{\ell} \cdot f''(x) \cdot \cos \frac{m\pi}{\ell} x \right]_0^{\ell} + \left[\left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^3 \cdot f(x) \cdot \cos \frac{m\pi}{\ell} x \right]_0^{\ell} \\ &+ \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^4 \cdot \int_0^{\ell} f(x) \cdot \sin \frac{m\pi}{\ell} x \cdot dx \\ \int_0^{\ell} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \cdot \sin \frac{m\pi}{\ell} x \cdot dx &= \left[-\frac{m\pi}{\ell} f(x) \cdot \cos \frac{m\pi}{\ell} x \right]_0^{\ell} - \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^2 \cdot \int_0^{\ell} f(x) \cdot \sin \frac{m\pi}{\ell} x \cdot dx \end{aligned}$$

よって, 上の 2 式をもって (8) は, 次の如く整理される。

$$\left\{ \frac{EI}{4} D_i \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^4 - EI \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^4 \frac{GJ}{\lambda^2} D_i \left(\frac{m\pi}{\ell} \right) - \frac{K}{6} (6 - D_i) + \frac{P}{\lambda} D_i \right\} \cdot w_i(x)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{EI}{4}(-1)^i \cdot S_i \left[\left(\frac{m\pi}{\ell} \right) \{ \ddot{w}_n(\ell) \cdot (-1)^m - \ddot{w}_n(0) \} + \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^3 \{ w_n(\ell) \cdot (-1)^m - w_n(0) \} \right. \\
&\quad + \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^4 \tilde{w}_n(x) \left. \right] + \frac{EI}{4} \cdot S_i \left[- \left(\frac{m\pi}{\ell} \right) \{ \ddot{w}_n(\ell) \cdot (-1)^m - \ddot{w}_n(0) \} + \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^3 \{ w_n(\ell) \cdot (-1)^m \right. \\
&\quad - w_n(0) \} + \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^4 \tilde{w}_0(x) \left. \right] - \frac{EI}{4} D_i \left[- \left(\frac{m\pi}{\ell} \right) \{ \ddot{\bar{w}}_i(\ell) \cdot (-1)^m - \ddot{\bar{w}}_i(0) \} \right. \\
&\quad + \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^3 \{ \bar{w}_i(\ell) \cdot (-1)^m - \bar{w}_i(0) \} \left. \right] + EI \cdot \left[- \left(\frac{m\pi}{\ell} \right) \{ \ddot{\bar{w}}_i(\ell) \cdot (-1)^m - \ddot{\bar{w}}_i(0) \} \right. \\
&\quad + \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^3 \{ \bar{w}_i(\ell) \cdot (-1)^m - \bar{w}_i(0) \} \left. \right] + \frac{GJ}{\lambda^2} (-1)^i S_i \cdot \left[\left(\frac{m\pi}{\ell} \right) \{ w_n(\ell) \cdot (-1)^m - w_n(0) \} \right. \\
&\quad + \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^2 \tilde{w}_n(x) \left. \right] + \frac{GJ}{\lambda^2} \cdot S_i \left[- \left(\frac{m\pi}{\ell} \right) \{ w_0(\ell) \cdot (-1)^m - w_0(0) \} - \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^2 \cdot \tilde{w}_0(x) \right] \\
&\quad - \frac{GJ}{\lambda^2} D_i \left[- \left(\frac{m\pi}{\ell} \right) \{ \bar{w}_i(\ell) \cdot (-1)^m - \bar{w}_i(0) \} \right] - \frac{K}{6} S_i (-1)^i \cdot \tilde{w}_n(x) \\
&\quad + \frac{K}{6} S_i \cdot \tilde{w}_0(x) - \frac{P}{\lambda} S_i (-1)^i \cdot \tilde{w}_n(x) + \frac{P}{\lambda} S_i \cdot \tilde{w}_0(x)
\end{aligned} \tag{9}$$

3. 境界条件及び一般式

$$\text{自由端} \quad \ddot{w}(0)=0 \tag{10}$$

$$\text{固定端} \quad w(\ell)=0 \tag{11}$$

$$\text{単純支持端} \quad \ddot{w}_n = \ddot{w}_0 = 0 \tag{12}$$

$$w_n = w_0 = 0 \tag{13}$$

今, Span- 方向に相対する両端単純支持, $x=0$ 端自由, $x=\ell$ 端固定なる構造物を考えると, (9) は (10) (11) (12) (13) より整理され, Fourier-Sine 逆変換を施すことによって (14) に示す一般式となる。

$$\bar{w}_i(x) = \frac{2}{\ell} \sum_{\xi}^{\infty} \tilde{w}_i(x) \cdot \sin \frac{m\pi}{\ell} x = \{ Q(\xi) + \frac{1}{2\alpha\beta} P(\xi) \} \cdot \bar{w}_i(0) + \frac{1}{2\alpha\beta} P(1-\xi) \cdot \ddot{\bar{w}}_i(\ell) \tag{14}$$

ここで

$$P(\xi) = \sum \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\alpha \cdot \beta \cdot m}{(m^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} \sin m\pi\xi = \frac{\sinh \alpha\pi(2-\xi) \cdot \sin \beta\pi\xi - \sinh \alpha\pi\xi \cdot \sin \beta\pi(2-\xi)}{\cosh 2\alpha\pi - \cos 2\beta\pi}$$

$$Q(\xi) = \sum \frac{2}{\pi} \cdot \frac{m(m^2 + \alpha^2 - \beta^2)}{m^2 + \alpha^2 - \beta^2 + 4\alpha^2\beta^2} \sin m\pi\xi = \frac{\cosh \alpha\pi(2-\xi) \cdot \cos \beta\pi\xi - \cosh \alpha\pi\xi \cdot \cos \beta\pi(2-\xi)}{\cosh 2\alpha\pi - \cos \beta\pi}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{A+2C}}{2} \quad \beta = \frac{\sqrt{2C-A}}{2} \quad C = \sqrt{-B}$$

$$A = \frac{GJ}{EI} \cdot \frac{4D_i}{(4-D_i)} \left(\frac{\ell}{\pi\lambda} \right) \quad \xi = \frac{x}{\ell}$$

$$B = \left\{ \frac{K(6-D_i)}{6} - \frac{P \cdot D_i}{\lambda} \right\} \left\{ \frac{4}{EI} \frac{1}{(4-D_i)} \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^4 \right\}$$

$x=0$ 端での剪断力の釣り合いは,

$$\begin{aligned}
&\frac{EI}{4}(3-D_i) \cdot \left[\{ \ddot{Q}(0) + \frac{1}{2\alpha\beta} \ddot{P}(0) \} \bar{w}_i(0) + \frac{1}{2\alpha\beta} \cdot \ddot{P}(1) \cdot \ddot{\bar{w}}_i(\ell) \right] \\
&\quad - \frac{GJ}{\lambda^2} \cdot D_i \left[\{ \dot{Q}(0) + \frac{1}{2\alpha\beta} \dot{P}(0) \} \cdot \bar{w}_i(0) + \frac{1}{2\alpha\beta} \dot{P}(1) \cdot \ddot{\bar{w}}_i(\ell) \right] = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

$x=\ell$ 端でたわみ角がないことより

$$\{ \dot{Q}(1) + \frac{1}{2\alpha\beta} \cdot \dot{P}(1) \} \cdot \bar{w}_i(0) + \frac{1}{2\alpha\beta} \cdot \dot{P}(0) \cdot \ddot{\bar{w}}_i(\ell) = 0 \tag{16}$$

故に(15)(16)より P なる座屈荷重が求まり、境界値 $\bar{w}_i(0)$, $\bar{w}(\ell)$ を決定し、(17)に示す如くの Fourier-Sine 定和分逆変換公式により、たわみ (Mode) を求めることができる。

$$\therefore w_r(x) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \bar{w}_i(x) \cdot \sin \frac{i\pi}{n} r \quad (17)$$

4. 数値計算例

今、フローチャートを図-2に示す。

例として、今、 $n=10$, $\ell=100$ cm, $\lambda=10$ cm, $E=2.1 \times 10^6$ kg/m², $G=8.0 \times 10^5$ kg/cm², 厚さ 1 cm と 1 のものについて $x=0$, ℓ 端で単純支持のものについて座屈荷重と枚数の関係を図-3, 図-4に示す。

又、Mode ($x=0$ 端) を図-5に示す。

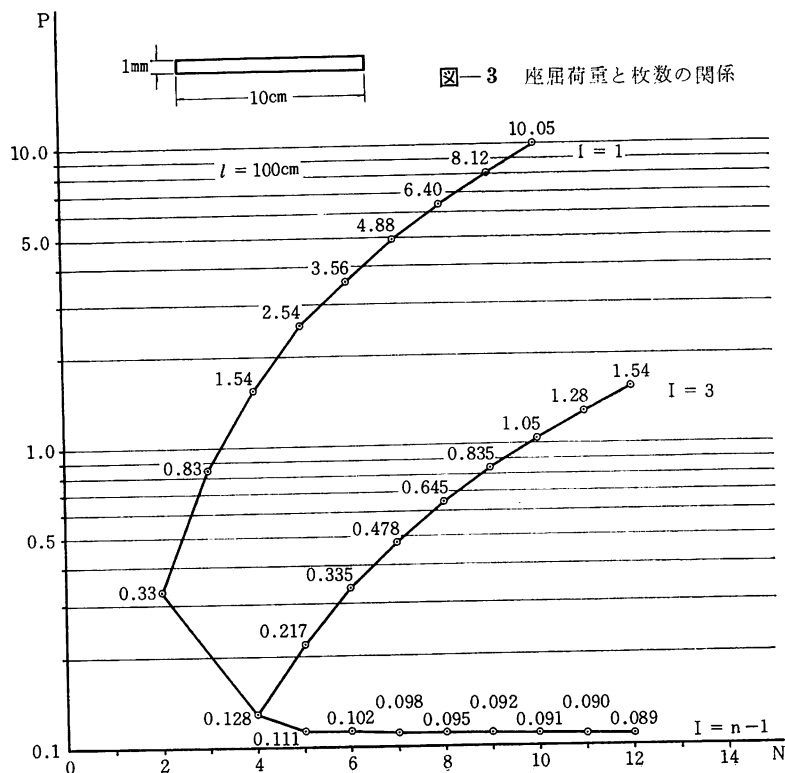
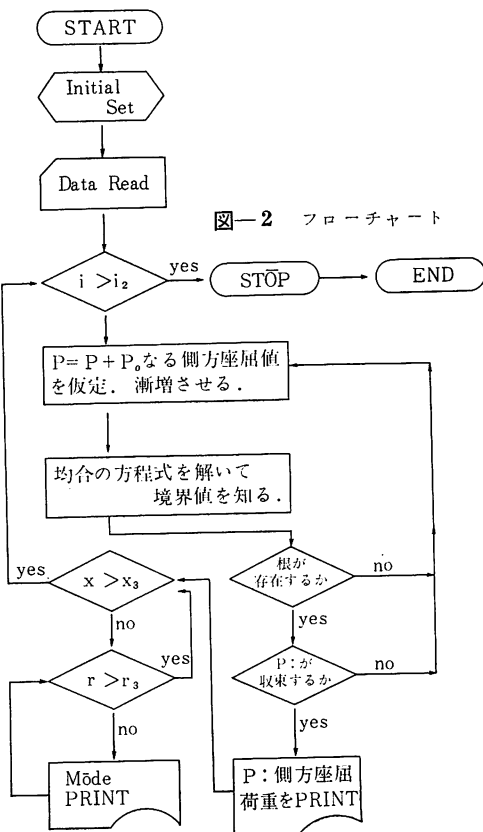
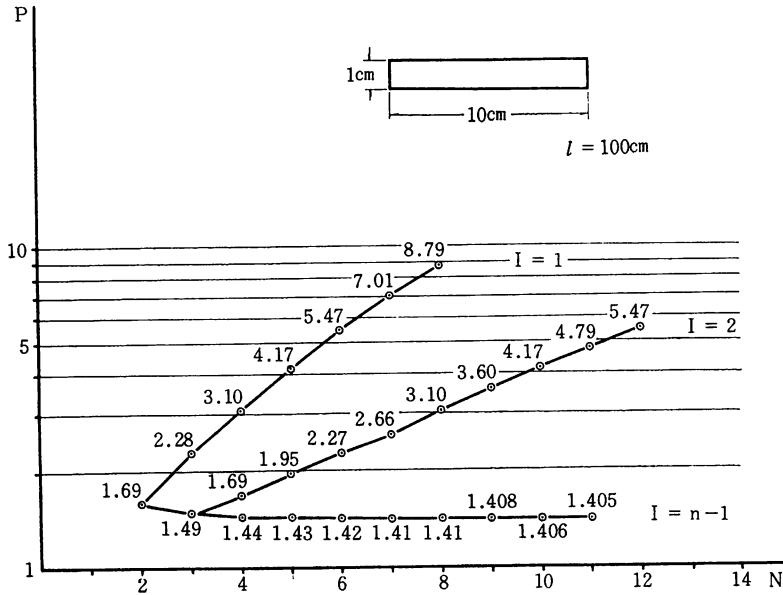
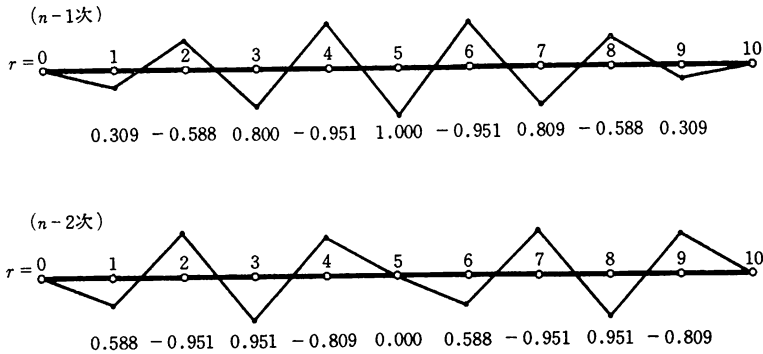


図-4 座屈荷重と枚数の関係

図-5 Mode at $x=0$ 

5. あとがき

以上、矢板構造における側方不安定構造解析を行なったが、free-fix 条件の場合、およびセル型矢板構造の数値計算も現在進めており、実験解析を行なって理論の検討をする予定である。

又、数値計算は、北大型電子計算機 FACOM-230-60/75 を用いて行った。

尚、本研究は、北海道科学研究補助金の補助を受けて行ったことを付記する。

終りに、常日頃、協力いただいた室蘭工業大学松岡健一助教授に深く感謝の意を表します。

参考文献

- S. G. Nomachi : A Note on Fivite Fourier-Transforms Concerning Finite Integration (The Transcript from the Memories of the) (Muro Institute of Technology Vol. 5, No.2)
- 能町・松岡・沢田：スパン方向にヒンジで結合された棒状要素による面構造の応力について（土木学会第25回 年次学術講演集 I-99）
- 能町・松岡・沢田：スパン方向にヒンジ結合されたパイルによる平面構造について（土木学会 北海道支部研究発表会論文集 第27号）
- 能町・松岡・沢田：タイロッドを有する矢板の応力解析について（土木学会 第29回年次学術講演概要集 I-11）

（昭和49年11月29日受理）

Figure 1. Schematic diagram of the experimental setup.

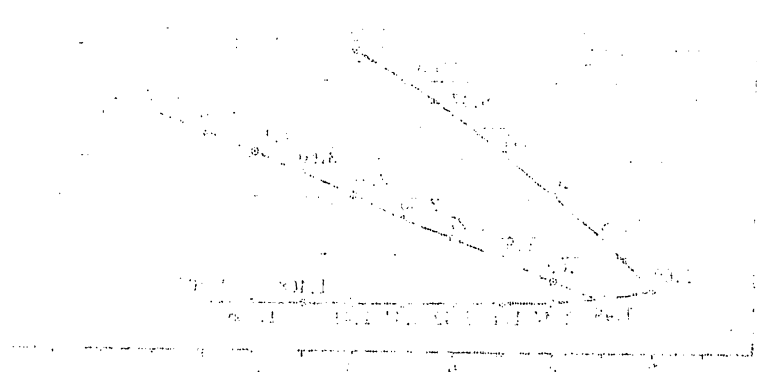


Figure 2. Schematic diagram of the experimental setup.

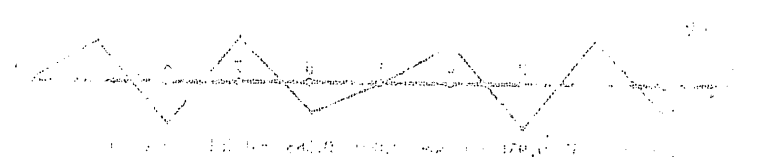
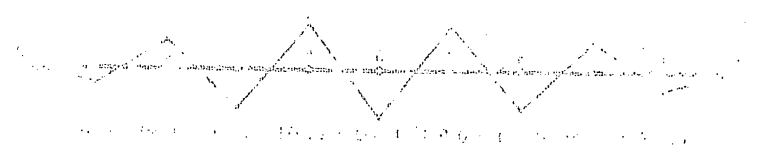


Figure 4. Schematic diagram of the experimental setup.

The experimental setup is shown in Figure 1. The system consists of a central channel and two side channels. The central channel is filled with water, and the side channels are filled with air. The interface between the water and air is shown as a dashed line. The coordinate system (x, y) is shown at the bottom right. The top channel is labeled 'Air' and the bottom channel is labeled 'Water'. The central channel is labeled 'Channel'. The side channels are labeled 'Side Channel'.

The experimental setup is shown in Figure 2. The system consists of a central channel and two side channels. The central channel is filled with water, and the side channels are filled with air. The interface between the water and air is shown as a dashed line. The coordinate system (x, y) is shown at the bottom right. The top channel is labeled 'Air' and the bottom channel is labeled 'Water'. The central channel is labeled 'Channel'. The side channels are labeled 'Side Channel'.

The experimental setup is shown in Figure 3. The system consists of a central channel and two side channels. The central channel is filled with water, and the side channels are filled with air. The interface between the water and air is shown as a dashed line. The coordinate system (x, y) is shown at the bottom right. The top channel is labeled 'Air' and the bottom channel is labeled 'Water'. The central channel is labeled 'Channel'. The side channels are labeled 'Side Channel'.

The experimental setup is shown in Figure 4. The system consists of a central channel and two side channels. The central channel is filled with water, and the side channels are filled with air. The interface between the water and air is shown as a dashed line. The coordinate system (x, y) is shown at the bottom right. The top channel is labeled 'Air' and the bottom channel is labeled 'Water'. The central channel is labeled 'Channel'. The side channels are labeled 'Side Channel'.