道路除雪問題に対する数理計画的考察

—— 除雪車走行ルート選定について ——

桝　谷　有　三*

A Study on the Snow Removal Problem of the Road Network by the Mathematical Programming

—— Routing for the Snow Plow ——

Yuzo MASUYA

要　旨

本研究は，降・積雪による道路・交通条件の悪化によってまねく都市内交通の混雑・まひを最小にくいとめるための除雪車の合理的運用について数理計画的な面より考察を行なった。

Synopsis

It is a serious problem in urban area to stay the traffic congestion and jam, which is caused by the aggrevation of the road network and traffic conditions on account of the snowfall and snowdrifts.

so,in this paper auother study its problem from the aspect of mathematical programming.

1. まえがき

最近，自動車交通の発達によって冬期積雪のみられる都市においても，自動車による輸送需要が増大し，特に都市内街路においては夏期と同じ様な交通を呈している。従って，降・積雪による道路条件・交通条件の悪化は，都市内交通のまひ・混雑をまねく，一方これらに対処すべく，除雪路線の延長，除排雪の高度化等種々対策が講じられてきた。また，現在までこの道路除雪問題に対して，除雪の経済効果推定，除雪機械の開発，雪処理技術の開発，除雪システムの開発等種々研究が行なわれてきた。しかし，上述の問題を解決するために，また，さらに高度のサービスを提供するためにはいままで行なわれてきた研究をふまえた上での除雪車の合理的配置・合理的運用という問題について考えなければならない。除雪車の増強をはかる事は，サービス向上の上からも望まれる所であるが，それとともに経費の増大をまねく。従って，限られた除雪車の台数で迅速に，効率的に行なう除雪運用計画が望まれる。また，道路除雪問題に対しては多くの考慮しなければならない要因（たとえば，降（積）雪量，除雪車の所要台数，除雪路線網，除雪完了時間等）がある。これらの事を考慮して，本稿はある一降雪に対してある与えられた除雪路線網を限られた除雪車で除雪する場合について考える。従って，問題は除雪車がどのような走行ルートを選定するとある目的関数（評価基準）を最大なり最小にするかとなる。本稿においては，この問題に対してオペレーションズ・リサームの一分野であるスケジューリング理論・および 0–1 整数計画法より考察を行なった

2. スケジューリング理論による考察

1) 問題の定株化

いま，ある与えられた街路網を n 個のノード (node) と m 個のアーク (arc) をもつ有向グラフ (Digraph) とすると，

$$G=(N,\ A) \tag{1}$$

$$N=\{n_i\,|\,i=1,\ 2,\ \dots\ n\} \tag{2}$$

$$A=\{a_i\,|\,i=1,\ 2,\ \dots\ m\} \tag{3}$$

ここで $N,\ A$ はノード，アークの集合

となり，この街路網を S 台の除雪車が担当するものとする。

次に，与えられたグラフ G の枝行列 (Edge Matrix)

* 助手　土木工学科

$\boldsymbol{E}$ を考える。この行列 $\boldsymbol{E}$ は，アークがノードによってつながれていると考えて(4)式で表わすことができる。

$$\boldsymbol{E}=[e_{ij}]_{m\times m} \tag{4}$$

$$e_{ij}=\begin{cases}1；\text{アーク } i \text{ があるノードに入連結，アーク } j \text{ が同じノードに出連結のとき}\\ 0；\text{そうでないとき}\end{cases}$$

さらに，スケジューリング理論において作業間の順序関係を示す先行作業行列と同じ考えのもにアーク相互間の順序関係を示すアーク順序行列を $\boldsymbol{P}$ とすると(5)式で表わすことができる。

$$\boldsymbol{P}=[p_{ij}]_{m\times m} \tag{5}$$

$$p_{ij}=\begin{cases}1；\text{除雪車がアーク } i \text{ をアーク } j \text{ に先行して除雪するとき}\\ 0；\text{そうでないとき}\end{cases}$$

この行列 $\boldsymbol{P}$ は，除雪車が最初に走行するアークに対応する列ベクトルの要素がすべて0になりそれ以外の列ベクトルにおいてはかならず1個の1を含んでいる。同様に，除雪車が最後に走行するアークに対応する行ベクトルの要素がすべて0になり，それ以外の行ベクトルにおいてはかならず1個の1を含んでいる。

この2つの行列 $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{P}$ との各要素の間には(6)式で示される関係がある。この式は，アーク i とアーク

$$p_{ij}=\begin{cases}1 \text{ または } 0；e_{ij}=0 \text{ のとき}\\ 0 \qquad\qquad ；e_{ij}=1 \text{ のとき}\end{cases} \tag{6}$$

j がいずれかのノードによっても連絡されていないとき $(e_{ij}=0)$，除雪車はアーク i からアーク j への走行不可能を意味し，一方 $e_{ij}=1$ のときは，アーク i からアーク j へ走行可能を意味する。そうすると，行列 $\boldsymbol{P}$ の要素の集 p を(6)式により(7)式のように分割でき，さらに，列ベクトル $\boldsymbol{P}_k$ の要素の集合 p_k も(8)

$$\left.\begin{aligned}\overline{P}\ &=\{p_{ij}\mid \text{行列 } \boldsymbol{E} \text{ において } e_{ij}=1,\ i=1,2,\dots m,\ j=1,2,\dots m\}\\ \overline{\overline{P}}\ &=\{p_{ij}\mid \text{行列 } \boldsymbol{E} \text{ において } e_{ij}=0,\ i=1,2,\dots m,\ j=1,2,\dots m\}\\ P\ &=\overline{P}\subset\overline{\overline{P}},\ \overline{P}\cap\overline{\overline{P}}=\phi\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{P}_k\ &=\{p_{ik}\mid \text{行列 } \boldsymbol{E} \text{ において } e_{ik}=1,\ i=1,2,\dots m\}\\ \overline{\overline{P}}_k\ &=\{p_{ik}\mid \text{行列 } \boldsymbol{E} \text{ において } e_{ik}=0,\ i=1,2,\dots,m\}\\ P_k\ &=\overline{P}_k\cup\overline{\overline{P}}_k,\ \overline{P}_k\cap\overline{\overline{P}}_k=\phi\ (k=1,2,\dots m)\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

式の様に分割できる。また，この両式の間には(9)式の関係がある。

$$P=\cup_{k=1}^{m}P_k,\ \overline{P}=\cup_{k=1}^{m}\overline{P}_k,\ \overline{\overline{P}}=\cup_{k=1}^{m}\overline{\overline{P}}_k \tag{9}$$

従って，問題はそれぞれの行列の要素間に(6)式の関係を有しながら，与えられた行列 $\boldsymbol{E}$ より各々の除雪車の走行ルートを示す行列 $\boldsymbol{P}$ を求めることになる。

すべてのアークが順次除雪されていくとき，そのアークが除雪される最後のアークでないかぎり必ずつぎのアークへ除雪車は走行しなければならない。この条件を行列 $\boldsymbol{P}$ の要素 P_{ij} を用いて表わすと(10)，(11)式となる。

$$\sum_{P_{ij}\in\overline{P_j}} P_{ij}\leqq 1 \quad (j=1,2,\dots,m) \tag{10}$$

$$\sum_{P_{ij}\in\overline{P_i}} P_{ij}\leqq 1 \quad (i=1,2,\dots,m) \tag{11}$$

(10)式において，不等号が成り立つのはアーク i が最後に除雪される場合に限り，また(11)式において不等式が成り立つのはアーク j が最初に除雪される場合に限る。

さらに，各アークはいずれかの除雪車によってかならず除雪され，それはただ1度のみである。この事は与えられたグラフ G の各アークが互に素な s 個（除雪車の台数）のパス列かサイクル列かなる部分集合に分割されなければならない事を意味する。この条件は(12)式にて表わすことができる。

$$L(\boldsymbol{P})=N \tag{12}$$

次に，全体として求めるべき順序関係の数，すなわち1の値を与える変数の数に関する制約条件を求めなければならない。この条件式は，前述の様に m 個のアークに s 台の除雪車を投入した場合について考えているので，(13)式で表わすことができる。

$$\sum_{P_{ij}\in P} P_{ij}=m-s \tag{13}$$

最後に，何にを評価基準（目的関数）として各々の除雪車の走行ルートを選定するかという事について考えなければならない。除雪問題においてもその考慮する問題に応じて種々考えられてきた。本稿においては前述のようにあるひと降りごとの除雪に対して除雪車をどの様に走行させるかを目的としている。従って，この様な問題に対して，(1)除雪完了時間最小（総除雪所要時間最小），(2)街路網における全車両の総遅れ最小　などが考えられる。そうすると，除雪完了時間 T_R，総遅れ T_L はそれぞれ行列 $\boldsymbol{P}$ の関数として

$$T_R = T_R(\boldsymbol{P}) \tag{14}$$

$$T_L = T_L(\boldsymbol{P}) \tag{15}$$

となる。

以上述べてきた事をまとめると，本問題は(10),(11),(12),(13)式を制約条件として，(14)あるいは(15)式の目的関数を最小にするアーク順序行列 $\boldsymbol{P}$ を求める事になる。定式化から明らかな様に，この問題は一種の組合せ的な最適問題となるので D. P. (Dynamic Programming) あるいは分岐限界法 (Branch and Bound Krethod) を用いて解きうる。

2) D. P. を用いた解法

本稿においては，1) でのべた解法のうち D. P. によって考察を行なう。

いま，(5)式で定義された行列 $\boldsymbol{P}$ の列ベクトルを $\boldsymbol{P}_j$ $(j=1, 2, \dots m)$ とおくと，$\boldsymbol{P}_j$ は(16)式となる。

$$\boldsymbol{P}_j = \boldsymbol{0} \text{ または } e_i \begin{pmatrix} j=1, 2, \dots m \\ j=1, 2, \dots m \end{pmatrix} \tag{16}$$

ここで，$\boldsymbol{0}$ は m 次元ゼロベクトルであり，e_i は列ベクトルの要素 P_{ij} $(\in \overline{P_j})$ $(j=1, 2, \dots m)$ のうち第 i 番目の要素のみが 1 で他がすべて 0 であるような m 次元単位ベクトルを表わす。

この定義された列ベクトル $\boldsymbol{P}_j$ を用いて 1) でのべた定式化を行なうと，(17), (18), (19) 式を制約条件として，(20)あるいは(21)式を目的関数とする問題に書き改められる。

$$\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{P}_j \leqq \boldsymbol{1} \tag{17}$$

$$L(\boldsymbol{P}) = L(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \dots, \boldsymbol{P}_m) = N \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{P}'_j \boldsymbol{P}_j = m - s \tag{19}$$

$$T_R = T_R(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \dots, \boldsymbol{P}_m) \tag{20}$$

$$T_L = T_L(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \dots, \boldsymbol{P}_m) \tag{21}$$

ここで，$\boldsymbol{1}$ はすべての要素が 1 であるような m 次元列ベクトルであり，また $\boldsymbol{P}'_k$ は $\boldsymbol{P}_k$ の転置ベクトルである。

この問題の解 $(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \dots, \boldsymbol{P}_m)$ を同時に求めることはできないので，DP の多段階決定過程としてとらえることにより解を求めていくことにする。すなわちまずアーク数に等しい段階過程（この場合 m 段階）を設定し，各段階においてベクトル $\boldsymbol{P}_k$ を一つずつ定めていくようにする。そうすると，第 k 段階においては，ベクトル $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \dots, \boldsymbol{P}_k$ が定められていることになる。

このような配分過程を定めると，DP における最適性の原理により目的関数(20)あるいは(21)式は，(22)〜(25)式の漸化式で表わすことができる。

$$T_{R0}(\phi) = 0 \tag{22}$$

$$T_{L0}(\phi) = L_0 \tag{23}$$

$$T_{Rk}(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \dots, \boldsymbol{P}_k) = \min_{\boldsymbol{P}_k} \{T_{Rk-1}(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \dots, \boldsymbol{P}_{k-1}) + \Delta T_{Rk}(\boldsymbol{P}_k)\} \tag{24}$$

$$T_{Lk}(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \dots, \boldsymbol{P}_k) = \min_{\boldsymbol{P}_k} \{T_{Lk-1}(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \dots, \boldsymbol{P}_{k-1}) + \Delta T_{Lk}(\boldsymbol{P}_k)\} \tag{25}$$

ここで，(23)式の L_0 の値は，降雪後街路網全体がまったく除雪されていないときの遅れで，次の様にして求めることができる。

$$L_0 = \sum_{j=1}^{m} x_j \times (t'_j - t_j) \tag{26}$$

x_j ； アーク j における交通量（台）

t_j ； アーク j の除雪後（降雪前）の走行所要時間

t'_j ； アーク j の除雪前（降雪後）の走行所要時間

また，(24)，(25)式はそれぞれ第 k 段階までにおける除雪完了時間，全車両の総遅れであり，ΔT_{Rk}，ΔT_{Lk} は第 k 段階において列ベクトル $\boldsymbol{P}_k$ を定めることによって生じる損失時間，遅れの増分を表わしている。

さらに，各段階において列ベクトル $\boldsymbol{P}_k$ を定める際，(17), (18), (19) 式に相当する (27), (28), (29) 式の制約条件を満たしていなければならない。

$$\boldsymbol{0} \leqq \boldsymbol{P}_k \leqq \boldsymbol{1} - \sum_{l=1}^{k-1} \boldsymbol{P}_l \tag{27}$$

$$L(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \dots, \boldsymbol{P}_k, \underbrace{\boldsymbol{0}, \dots \boldsymbol{0}}_{(m-k)\text{個}}) \leqq N \tag{28}$$

$$\max\{0, k-s\} \leqq \boldsymbol{P}'_k \cdot \boldsymbol{P}_k + \sum_{l=1}^{k-1} \boldsymbol{P}'_l \cdot \boldsymbol{P}_l \leqq \min\{k, m-s\} \tag{29}$$

また，$\Delta T_{Rk}(\boldsymbol{P}_k)$，$\Delta T_{Lk}(\boldsymbol{P}_k)$ はそれぞれ次の様にして求めることができる。

$$\Delta T_{Rk}(\boldsymbol{P}_k) = \begin{cases} l_{jk} ; & \boldsymbol{P}_k = e_j \text{ のとき} \\ 0 ; & \boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{0} \text{ のとき} \end{cases} \tag{30}$$

$$\Delta T_{Lk}(\boldsymbol{P}_k) = \sum_{j \in A_k} X_j \times (t'_j - t_j) \tag{31}$$

l_{jk} ； 除雪車がアーク j からアーク k へ走

行するに用する時間

A_k ; 第 k 段階までに除雪されていないアークの集合

以上の手順をふまえて計算を順次行なっていくと第 m 段階においてそれぞれの目的関数を最小にするアーク順序行列 $\boldsymbol{P}$ を求めることができる。この様に，アークの除雪される順序を DP の段階分けに対応させることによって除雪車走行ルートを求めることができる。

以上によって求められる各々の除雪車の走行ルートは出発位置を固定しない，いわゆる除雪車のターミナルを考えない場合である。従って与えられた除雪路線網を最小の時間で，また全車両の遅れを最小にするように除雪する方法である。この場合，各除雪車を各ルートの最初に除雪されるアークに結合しているノードに配置される事が望まれる。しかし，実際的にはターミナルは固定されていて，除雪の開始とともに各々の除雪車はそのターミナルより出発する場合が考えられる。この様な場合に対しては，次節でのべる 0-1 整数計画法より考察を行なう。

3. 0-1 整数計画法による考察

いま与えられた街路網上に，除雪車が走行可能な k 本の走行ルートを選定する。そうすると，第 j 番目の走行ルートを示す列ベクトルを次の様に表わすことができる。

$$\boldsymbol{R}_j=[r_{mj}] \tag{32}$$

$$r_{mj}=\begin{cases}1; & \text{走行ルート } j \text{ にアーク } m \text{ が含まれているとき}\\ 0; & \text{しかざるとき}\end{cases}$$

この各列ベクトル $\boldsymbol{R}_j$ に 0-1 変数 x_j を割りあて，$x_j=1$ ならば j 番目のルート選び，$x_j=0$ ならば選ばないとする。さらに，列ベクトル $\boldsymbol{R}_j$ より(33)式で表わされる除雪車走行ルート行列 $\boldsymbol{A}$ を考える。この行列 $\boldsymbol{A}$ は，行にアークを列に走行ルートをとる。

$$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times k} \tag{33}$$

$$a_{ij}=\begin{cases}1; & \text{アーク } i \text{ が走行ルート } j \text{ に含まれるとき}\\ 0; & \text{しかざるとき}\end{cases}$$

次に，上述した 0-1 変数 x_j の k 次ベクトルを $\boldsymbol{X}$ とする。そうすると，問題は (34), (35), (36) 式を制約条件として，(37)式の目的関数を最小にする事になる。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}\geqq \boldsymbol{1} \tag{34}$$

$$\sum_{j=1}^{k} x_j = N \tag{35}$$

$$x_j=1 \text{ または } 0 \quad (j=1, 2, \ldots k) \tag{36}$$

$$T_R=\sum_{j=1}^{k} t_j\times x_j \tag{37}$$

ここで，各式について説明すると，(34)式は各アークがかならずいずれかの走行ルートに属さなければならない条件である。(35)式は，選らばれる走行ルートの数は与えられた除雪車の台数に等しい事を示している。(36)式は，前述のように変数 x_j が 0 か 1 のみをとりうる変数である事を示している。さらに，目的関数(37)式はこの問題において用いた総除雪所要時間を表わしている。

この解法の場合，前節の解法に比べて事前に走行ルートを選定する手間を要する。しかし，前節の様なターミナルを固定しないときも考えられる。また，従来経験的に行なわれていたと思われるこの種の問題をより数理的に解きうる方法である。

この解法の計算方法は，行列 $\boldsymbol{A}$ および右辺の各要素が 0 あるいは 1 という特殊な形をしているため，従来開発されてきたアルゴリズムを用いることによって行なうことができる。

4. あとがき

街路網をグラフにモデル化して，いままであまり考えられていなかった道路除雪問題のうち，特に除雪運用計画について考察を行なった。街路網をグラフ，あるいはネットワークにモデル化すること，あるいはこの種の問題を DP, 0-1 整数計画法によって考察を行なうことも有効な方法であることがわかった。

今後さらに，次の諸点について研究を進めていく予定である。

1) 長時間連続的に降る場合の除雪運用計画
2) 前述の各要因の関連性
3) 除雪路線網増加に対する除雪車配車計画の信頼性を考慮するための感応分析
4) 街路除雪と交通規制・制御との関係

などである。

最後に，本研究を進めるにあたり御指導いただいた北海道大学工学部加来照俊教授に深く感謝の意を表します。

参考文献

(1) 桝谷有三・加来照俊：除雪車走行ルート選定に関する一考察，土木学会第29回年次学術講演概要集，1974 年 10 月．

(2) 桝谷有三・加来照俊：最適除雪ルート探索法に関する基礎的考察，土木学会北海道支部研究発表会論文集，1974年2月，第30号．

(3) 吉川和広・春名　攻：施工計画における最適ネットワーク作成法に関する一考察，土木学会論文報告集，第182号，1970．

(4) David H. Marks・Robert Stricker: Routing for Public Service Vehicles, Jourual of the Urbau Planning and Development Division Proceedings of A. S. C. E. December, 1971

(5) 小野寺力男著：グラフ理論の基礎，数学ライブラリー6，森北出版，1968．

(6) 山本正明：スケジューリング(1)，オペレーションズ・リサーチ，Vol. 17, No. 5, p. 58〜p. 63, 1970.

(7) 日科技連 DP 部会：ダイナミック・プログラミング入門，日科技連，1964．

(8) 桝谷有三・加来照俊：除雪路線網探索に関する一考察，第10回日本道路会議論文集，1973．

（昭和49年11月30日受理）