

ヒンヂ結合された棒状要素による平面構造 の実験的研究について

澤 田 知 之*

能 町 純 雄**

On Experimental study in a plane Structure
Made of Hinge Connected Bar Elements

Tomoyuki SAWADA

Sumio. G. NOMACHI

要 旨

本研究は棒状要素が軸方向にヒンヂ結合された平面構造の応力挙動を、偏微分及び差分方程式で表わし、和分変換、有限フーリエ変換を用いて解析し、理論値と実験値の検討を行なったものである。

Synopsis

In this study, the stress behaviour of the plane stucture made of Bar elements which are connected with one another, by longwise Hinge, is described in partial diffrential and diffrence equations, and they are solved by means of Fourier Integration Transforms and Finite Fourier Transforms.

The analytical results are compared with the experimental ones in the case of acrylite cylindrical bar elements.

1. 解析の概論

本論では、軸方向にヒンヂ結合された棒要素による平面構造について取り上げているが、解析にあたっては、要素の断面変形は考慮せず、又弾性床の上にあると仮定する。

要素における鉛直力と振りモーメントの均り合いから求め、ヒンヂ接合点での力の均り合いを満足するように誘導された基本微分差分方程式を、スパン直角方向にはフーリエ定和分変換を行ない、スパン方向には、有限フーリエ変換を行なって解析を進める。これらに有限フーリエ逆変換を施すことにより、境界条件を与えると、変位で表わされた未知数は、2元の連立方程式を解くことに帰着する。変位の一般式を知った後は、フーリエ定和分逆変換を行なうことにより、必要とする変位、断面力が得られる。

2. 弾性床における板要素の 基本微分差分方程式

図-1の如くの平板要素 r , $r+1$ に対して、曲げのみに関係する q_r^b , 振りのみに関係する q_r^T を考えることにより、次式が導かれる。

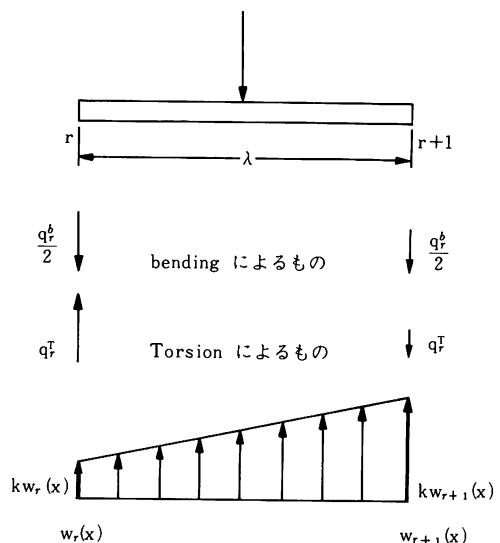


図-1

* 助教授 土木工学科

** 教授 北海道大学工学部

$$EI \cdot \frac{\ddot{W}_r(x) + \ddot{W}_{r+1}(x)}{2} = q_r^b - \frac{W_r(x) + W_{r+1}(x)}{2} \times K \quad (1)$$

$$GJ \cdot \frac{\dot{W}_{r-1}(x) - \dot{W}_r(x)}{\lambda} = -q_r^T \times \lambda + \frac{K\lambda}{12} \{W_{r+1}(x) - W_r(x)\} \quad (2)$$

$$\text{図より} \quad q_{r,r+1} = q_r^T - \frac{q_r^b}{2} \quad (3)$$

$$q_{r+1,r} = q_r^T + \frac{q_r^b}{2} \quad (4)$$

(1)(2)(3)(4)より

$$q_{r,r+1} = -\frac{EI}{4} \{ \ddot{W}_r(x) + \ddot{W}_{r+1}(x) \} - \frac{GJ}{\lambda^2} \{ \dot{W}_{r+1}(x) - \dot{W}_r(x) \} - \frac{K}{6} \{ W_{r-1}(x) + 2W_r(x) \} \quad (5)$$

$$q_{r+1,r} = \frac{EI}{4} \{ \ddot{W}_r(x) + \ddot{W}_{r+1}(x) \} - \frac{GJ}{\lambda^2} \{ \dot{W}_{r+1}(x) - \dot{W}_r(x) \} + \frac{K}{6} \{ 2W_{r+1}(x) + W_r(x) \} \quad (6)$$

(5), (6)を節点条件 $q_{r,r+1} - q_{r,r-1} = 0$ に代入することにより,

$$-\frac{EI}{1} \{ 2\ddot{W}_r(x) + \ddot{W}_{r+1}(x) + \ddot{W}_{r-1}(x) \} + \frac{GJ}{\lambda^2} \{ 2W_r(x) - W_{r+1}(x) - \dot{W}_{r-1}(x) \} - \frac{K}{6} \{ 4W_r(x) + W_{r-1}(x) \} = 0 \quad (7)$$

$$\therefore \frac{EI}{4} \{ \Delta^2 \ddot{W}_{r-1}(x) + 4\ddot{W}_r(x) \} + \frac{GJ}{\lambda^2} \Delta^2 \dot{W}_{r-1}(x) + \frac{K}{6} \{ \Delta^2 W_{r-1}(x) - 6W_r(x) \} = 0 \quad (8)$$

ここで

EI : 曲げ剛性 ($\text{kg}\cdot\text{cm}^2$)

k : 地盤反力係数 (kg/cm^3)

GJ : ねじり剛性 ($\text{kg}\cdot\text{cm}^2$)

$K = k \cdot \lambda$ (kg/cm^2)

λ : 平板要素幅 (cm)

w : たわみ (cm)

q_r^b : 曲げのみに参与する力 (kg/cm^2)

q_r^T : ねじりのみに参与する力 (kg/cm^2)

$$\Delta F_r = F_{r+1} - F_r \\ \Delta^2 F_r = F_{r+2} - 2F_{r+1} + F_r$$

(公式)

○ Fourier 定和分変換

$$S_i[\Delta^2 f_{r-1}] = -\sin \frac{i\pi}{n} \left\{ (-1)^i f_n - f_0 \right\} - D_i \cdot S_i[f_r]$$

$$C_i[\Delta^2 f_{r-1}] = \Delta f_{n-1} \cdot (-1)^i - \Delta f_0 - D_i \cdot \left\{ \frac{1}{2} f_n (-1)^i + \frac{1}{2} f_0 + C_i[f_r] \right\} \\ D_i = 2 \cdot (1 - \cos \frac{i\pi}{n})$$

○ 有限 Fourier-Sine 変換

$$\int_0^l \frac{d^4 f(x)}{dx^4} \cdot \sin \frac{m\pi}{l} x \cdot dx \\ = \left[-\frac{m\pi}{l} f''(x) \cdot \cos \frac{m\pi}{l} x \right]_0^l \\ + \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^3 f(x) \cdot \cos \frac{m\pi}{l} x \right]_0^l \\ + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{m\pi}{l} x \cdot dx \\ \int_0^l \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \cdot \sin \frac{m\pi}{l} x \cdot dx \\ = \left[-\left(\frac{m\pi}{l} \right) \cdot f(x) \cdot \cos \frac{m\pi}{l} x \right]_0^l \\ - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{m\pi}{l} x \cdot dx$$

よって(8)に、軸直角方向に定和分変換をし、又軸方向に有限 Fourier-Sine 変換を施こして、整理し、次に示す様な境界条件を考慮すると(9)の如くなる。

○ 境界条件

$r = 0$, $r = n$ 番目は、要素軸に沿って単純支持である。 $x = 0$ (天端) で自由端, $x = l$ (根入れ端) で、固定とする。よって

$$w_0(x) = w_n(x) = 0$$

$$w_0(x) = w_n(x) = 0$$

$$w_0(0) = w_n(l) = 0$$

$$\ddot{\bar{W}}_r(x) =$$

$$\frac{A \cdot \left(\frac{\pi}{l} \right) \cdot \left\{ m^3 + B \cdot m \right\} \bar{W}_r(0) + A \left(\frac{l}{\pi} \right) \cdot m \cdot (-1)^m \ddot{\bar{W}}_r(l)}{A \cdot \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cdot \left\{ m^4 + B m^2 + C \right\}}$$

(9)

(9)に有限Fourier-Sine逆変換を施す。

$$\bar{W}_r(x) = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{W}_r(x) \cdot \sin \frac{m\pi}{l} x \cdot dx = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left\{ m^3 + Bm \right\} \cdot \bar{W}_r(0) + \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \cdot m \cdot (-1)^m \ddot{\bar{W}}_r(l)}{\left(\frac{\pi}{l} \right) \left\{ m^4 + Bm^2 + C \right\}} \cdot \sin \frac{m\pi}{l} x \quad (10)$$

(10)は次の公式によって閉じた解（厳密解）で表わされる。

$$(i) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{m(m^2 + \alpha^2 - \beta^2)}{(m^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} \cdot \sin m\pi\zeta \\ = \frac{\cosh \alpha\pi(2-\zeta) \cdot \cos \beta\pi\zeta - \cosh \alpha\pi\zeta \cdot \cos \beta\pi(2-\zeta)}{\cosh 2\alpha\pi - \cos 2\beta\pi} = Q(\zeta) \quad (\because \zeta = \frac{x}{l})$$

$$(ii) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\alpha\beta m}{(m^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} \sin m\pi\zeta \\ = \frac{\sinh d\pi(2-\zeta) \cdot \sin \beta\pi\zeta - \sinh \beta\pi\zeta \cdot \sin \beta\pi(2-\zeta)}{\cosh 2\alpha\pi - \cos 2\beta\pi} = P(\zeta)$$

$$* B = 2(\alpha^2 - \beta^2) \quad C = (\alpha^2 + \beta^2)^2 \text{より} \quad \alpha = \frac{1}{4}(2\sqrt{C} + B) \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{C} - B}{2} - \frac{B}{4}}$$

従って、(10)は次のようになる。

$$\bar{W}_r(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{m \cdot (m^2 + \alpha^2 - \beta^2)}{(m^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} \cdot \bar{W}_r(0) \cdot \sin \frac{m\pi}{l} x \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(\alpha^2 - \beta^2)m}{(m^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} \cdot \ddot{\bar{W}}_r(l) \cdot \sin \frac{m\pi}{l} x \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \cdot \frac{(-1)^m \cdot m}{(m^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} \cdot \ddot{\bar{W}}_r(l) \cdot \sin \frac{m\pi}{l} x \\ = Q(\zeta) \cdot \bar{W}_r(0) + \frac{B - (\alpha^2 - \beta^2)}{2\alpha\beta} \cdot P(\zeta) \cdot \bar{W}_r(0) + \frac{1}{2\alpha\beta} \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \cdot P(1-\zeta) \cdot \ddot{\bar{W}}_r(l) \quad (11)$$

$$\text{次に、} x = l \text{ 端でたわみ角} = 0 \rightarrow \dot{\bar{W}}_r(x) = 0 \quad (12)$$

$$x = 0 \text{ 端での剪断力の均り合い} \rightarrow \frac{EI}{4} (4 - D_i) \cdot \ddot{\bar{W}}_r(0) - \frac{GJ}{\lambda^2} \cdot D_i \cdot \dot{\bar{W}}_r(0) = \bar{P} \quad (13)$$

(12), (13)より境界値 $w_r(0)$, $w_r(l)$ は知り得る。よって、(11)を、次に示す。Fourier-Sine 定積分逆変換すると、たわみ $w_r(x)$ を得る。

$$\therefore W_r(x) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \cdot \bar{W}_r(x) \cdot \sin \frac{i\pi}{n} r \quad (14)$$

$$* P(\zeta), \dot{P}(\zeta), \ddot{P}(\zeta), \ddot{\ddot{P}}(\zeta) \quad Q(\zeta), \dot{Q}(\zeta), \ddot{Q}(\zeta), \ddot{\ddot{Q}}(\zeta) \quad \text{の計算}$$

$$P(\zeta) = \frac{\sinh \alpha\pi(2-\zeta) \cdot \sinh \beta\pi\zeta - \sinh \alpha\pi\zeta \cdot \sinh \beta\pi(2-\zeta)}{\cosh 2\alpha\pi - \cos 2\beta\pi} \\ - \frac{\alpha\pi}{l} \left\{ \cosh \alpha\pi(2-\zeta) \cdot \sin \beta\pi\zeta + \cosh \alpha\pi\zeta \cdot \sin \beta\pi(2-\zeta) \right\} \\ + \frac{\beta\pi}{l} \left\{ \sinh \alpha\pi(2-\zeta) \cdot \cos \beta\pi\zeta + \sinh \alpha\pi\zeta \cdot \cos \beta\pi(2-\zeta) \right\} \\ \dot{P}(\zeta) = \frac{\sinh 2\alpha\pi - \cos 2\beta\pi}{\cosh 2\alpha\pi - \cos 2\beta\pi}$$

$$\begin{aligned}\dot{P}(\zeta) &= \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 (\alpha^2 - \beta^2) \cdot P(\zeta) - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 2\alpha\beta \cdot Q(\zeta) \\ \ddot{P}(\zeta) &= \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \dot{P}(\zeta) - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 2\alpha\beta \cdot \dot{Q}(\zeta) \\ Q(\zeta) &= \frac{\cos h \alpha \pi (2 - \zeta) \cdot \cos \beta \pi \zeta - \cos h \alpha \pi \zeta \cdot \cos \beta \pi (2 - \zeta)}{\cos h 2\alpha \pi - \cos 2\beta \pi} \\ &\quad - \frac{\alpha \pi}{l} \left\{ \sinh \alpha \pi (2 - \zeta) \cdot \cos \beta \pi \zeta + \sinh \alpha \pi \zeta \cdot \cos \beta \pi (2 - \zeta) \right\} \\ \dot{Q}(\zeta) &= \frac{-\frac{\beta \pi}{l} \left\{ \cos h \alpha \pi (2 - \zeta) \cdot \sin \beta \pi \zeta + \cos h \alpha \pi \zeta \cdot \sin \beta \pi (2 - \zeta) \right\}}{\cos h 2\alpha \pi - \cos 2\beta \pi} \\ \dot{Q}(\zeta) &= \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 (\alpha^2 - \beta^2) \cdot Q(\zeta) + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 2\alpha\beta \cdot P(\zeta) \\ \ddot{Q}(\zeta) &= \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \dot{Q}(\zeta) + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 2\alpha\beta \cdot \dot{P}(\zeta)\end{aligned}$$

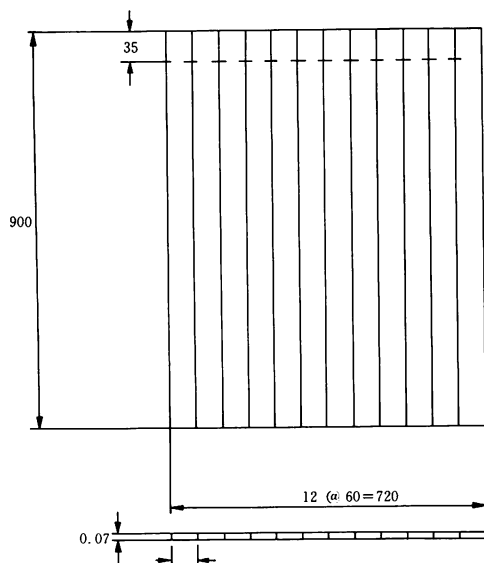
3. 実 験

§ 1 実験供試体及び実験概要

一般図、及び全体図を図-2、写真1、2に示す供試体材料は、幅6.0cm、厚さ0.055cm、長さ90.0cmを12枚使用した。又、歪測定は写真3に示す様に東京測機のデジタル多点歪測定機TDS-256によって共和電業の箔フェステル・ゲージKFC-11を用いた。たわみはダイヤル・ゲージで測定した。弾性床材料としてはマットレスを使用し単純支持辺は上下ローラー支持とし、(写真

6) 固定辺はスパン直角方向に2枚の鉄製プレートを用いて、上下から支持台に押えた。(写真7) 載荷荷重は、中央平面要素の $x=0$ (自由端) 付近 (正確には、自由端より1.2cm) に、ロードセルとジャッキによって集中荷重を載荷した。(写真8)

ヒズミ・ケージ接着位置及びprinter番号を図-3に、ダイヤルゲージ取り付け位置及び載荷点位置を図-4に示す。



供 試 体 一 般 図

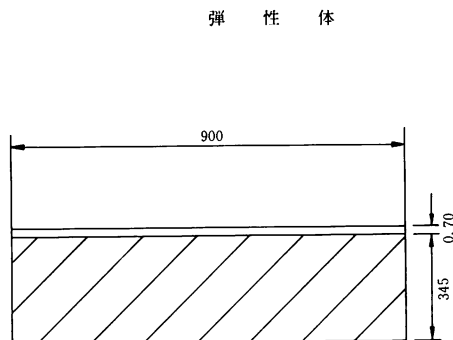


図-2

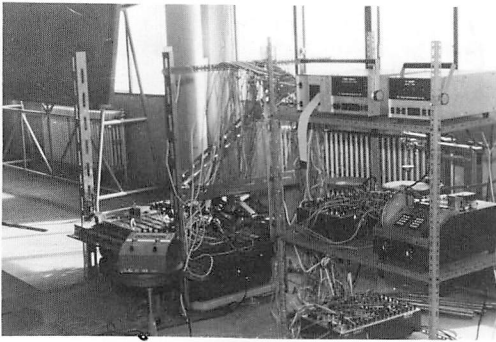


写真-1



写真-2

031	021	011	001	111	121	.	.	.	.	.	.
102	122	012	002	112	122	.	.	.	.	.	.
103	023	013	003	113	123	.	.	.	.	.	.
104	024	014	004	114	124	.	.	.	.	.	.
105	025	015	005	115	125	.	.	.	.	.	.
106	026	016	006	116	126	.	.	.	.	.	.
107	027	017	007	117	127	.	.	.	.	.	.
108	028	018	008	118	128	.	.	.	.	.	.
109	029	019	009	119	129	.	.	.	.	.	.
110	030	020	010	120	130	.	.	.	.	.	.

fix

ヒズミゲージ接着位置及びプリンター番号

図-3

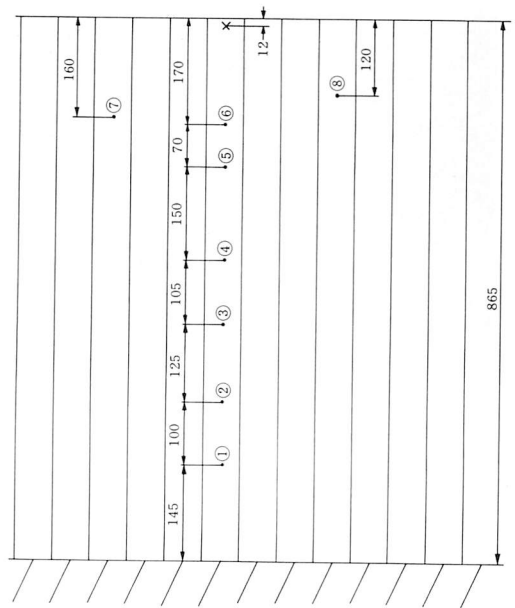


図-4

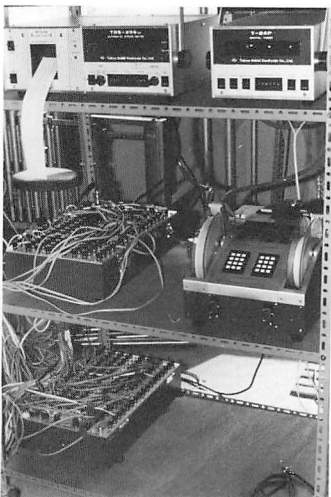


写真-3

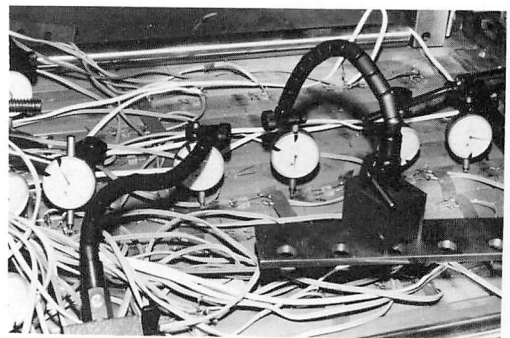


写真-4

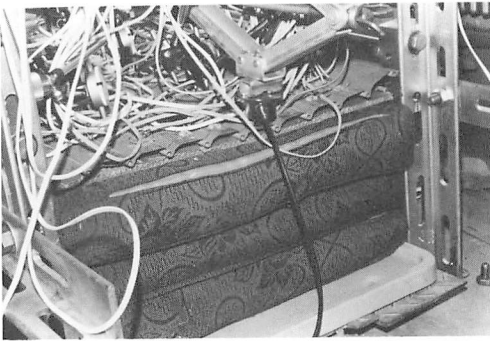


写真-5

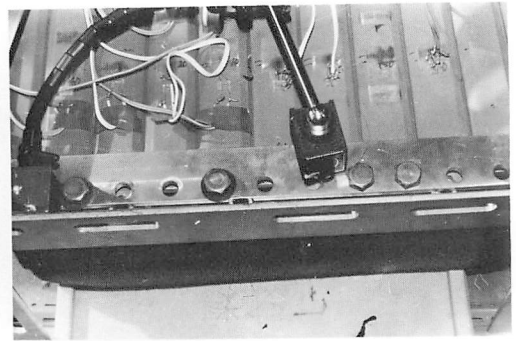


写真-7

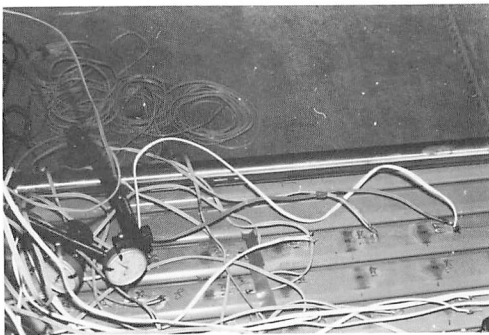


写真-6

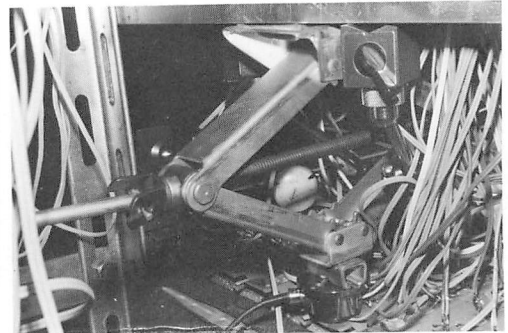


写真-8

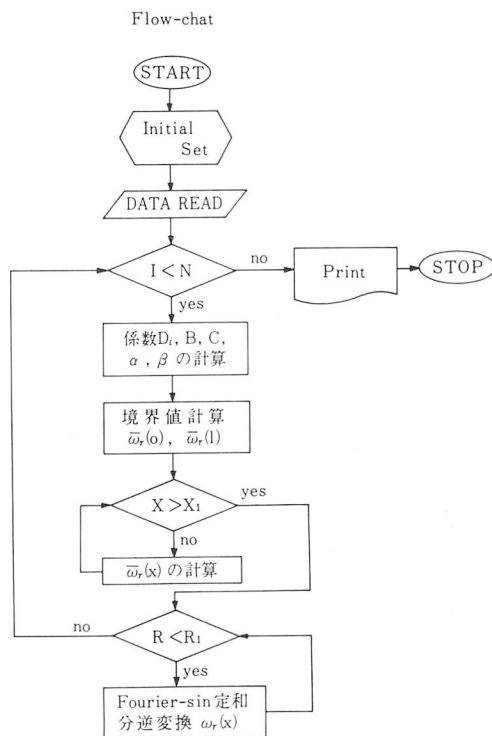


図-5

§ 2 実験値と理論値の比較

図-5に理論計算のFlow-chartを示し、図6～19に変位の実験値と理論値の比較を図6～12までは要素方向（軸直角方向）の天端の変位を41 kg から10 kg まで载荷時のものを、図13～19までは、同条件の要素軸方向のものを示す。

又、図20, 21には8 kg, 10 kg 载荷時の応力の実験値を示す。

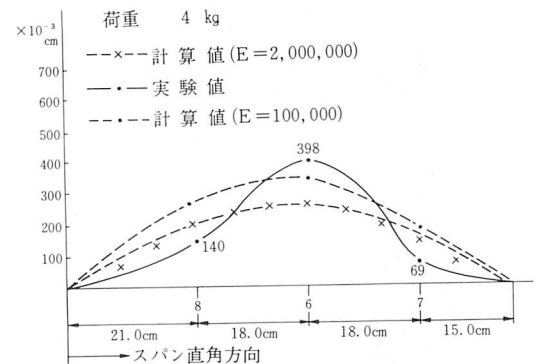


図-6

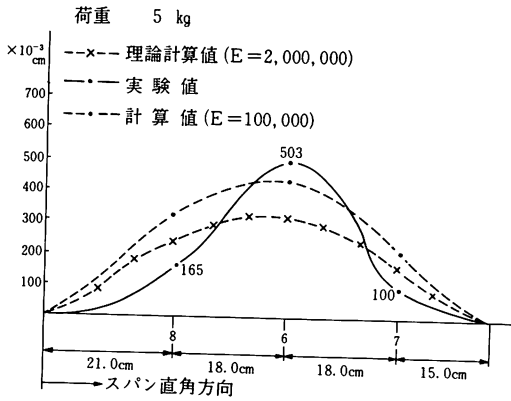


図-7

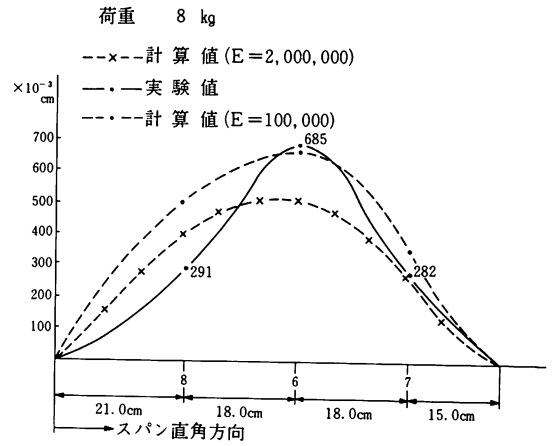


図-10

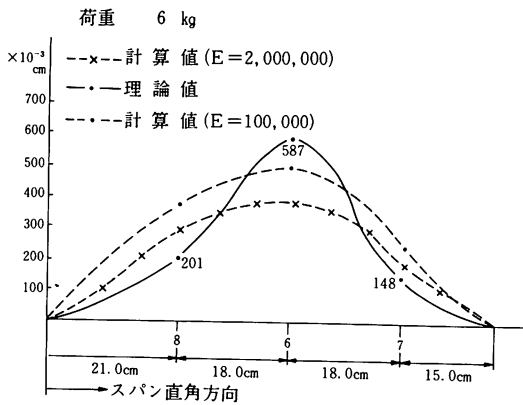


図-8

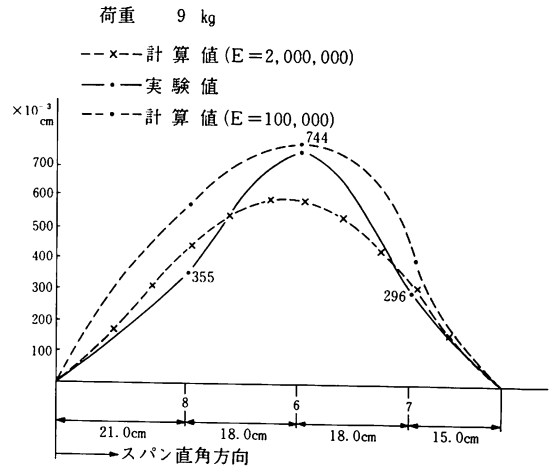


図-11

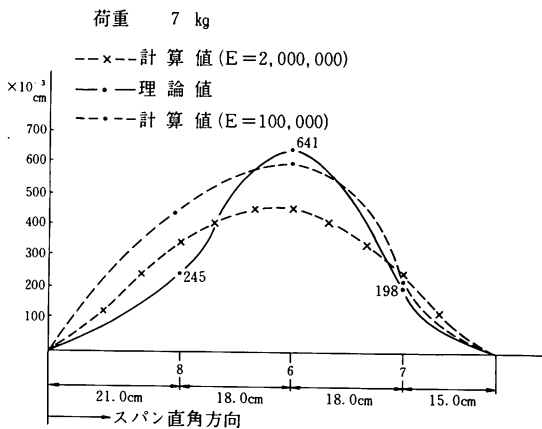


図-9

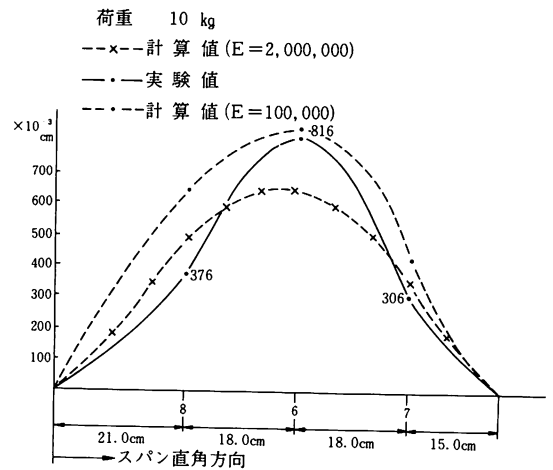


図-12

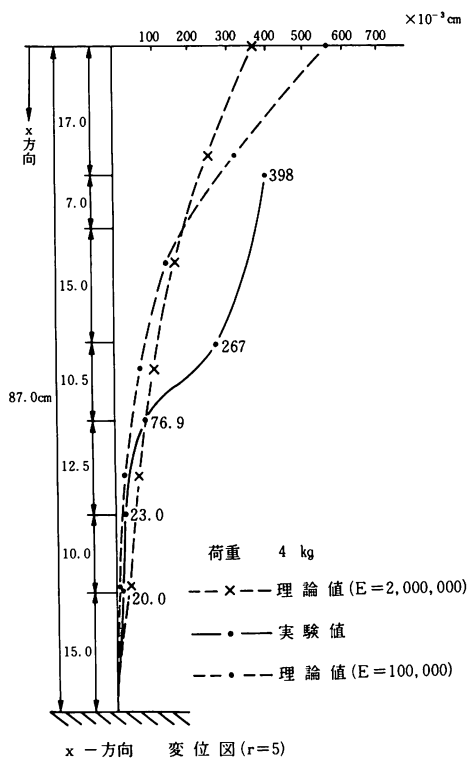


図-13

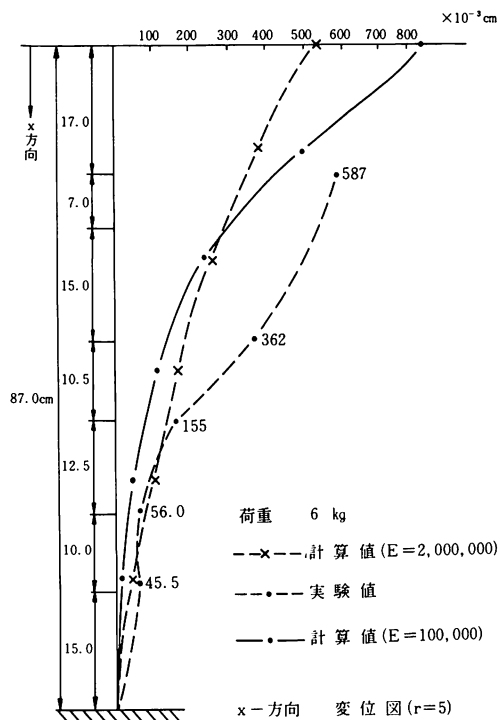


図-15

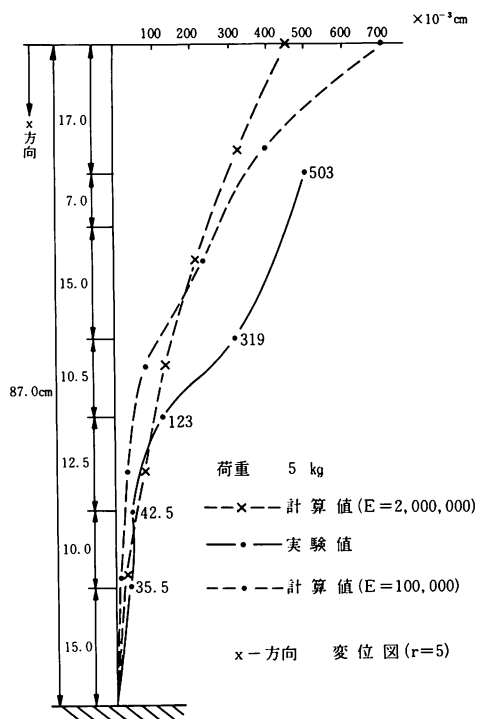


図-14

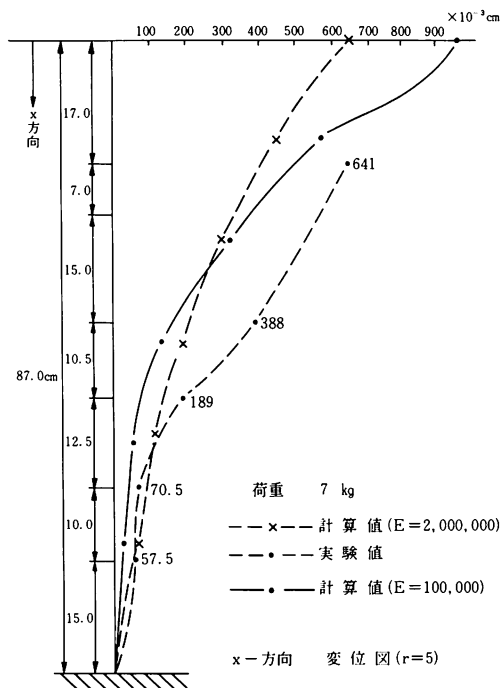


図-16

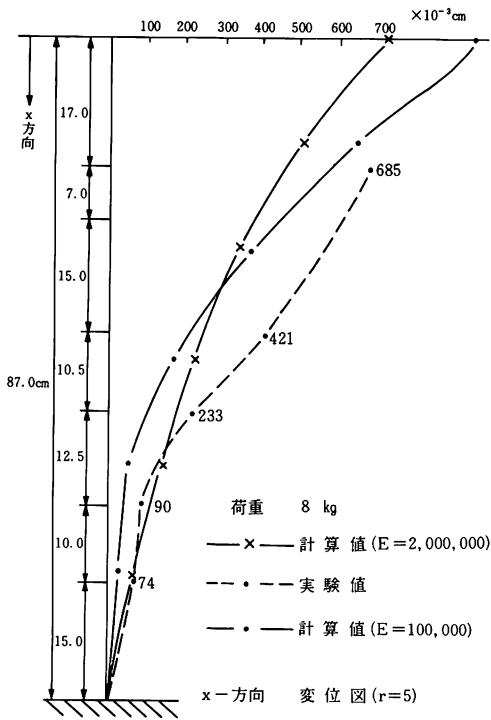


図-17

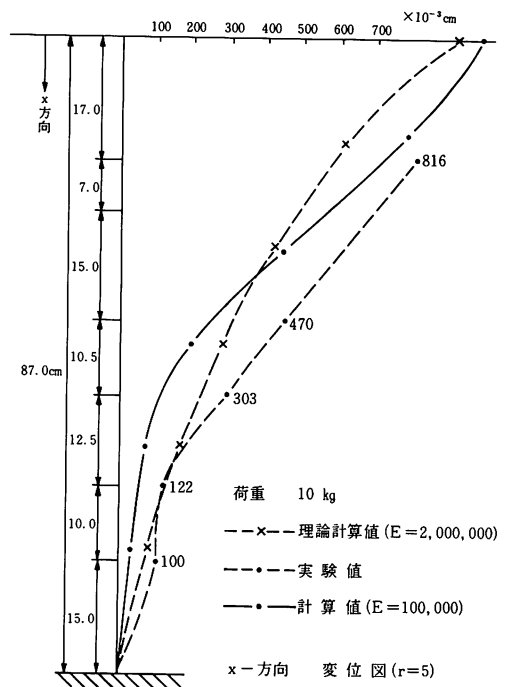


図-19

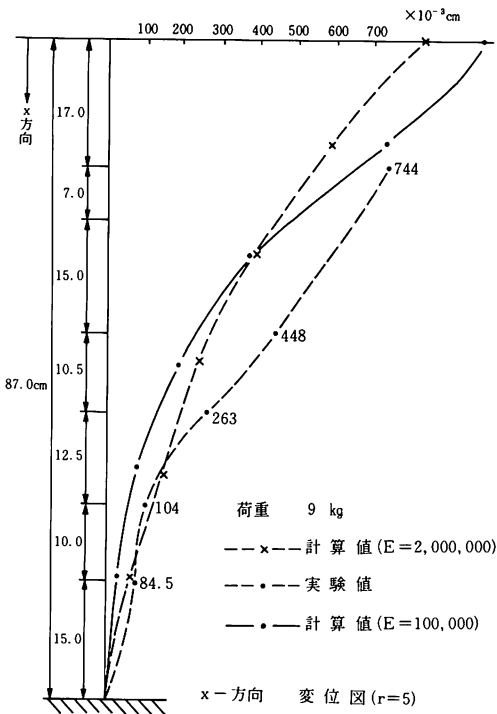


図-18

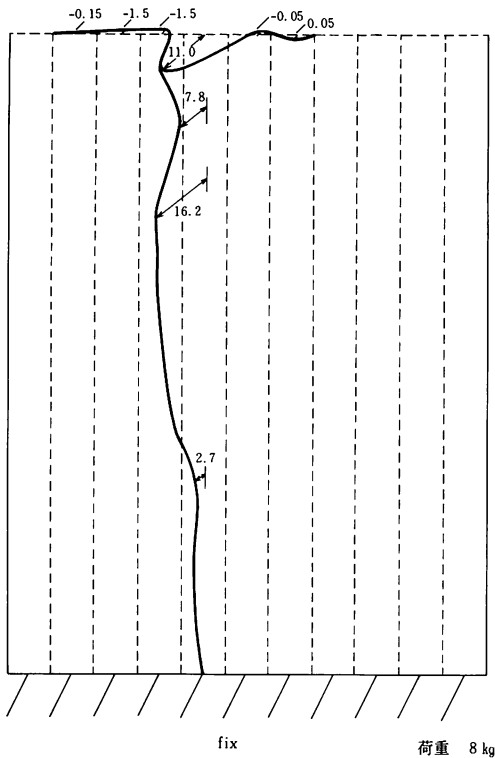


図-20

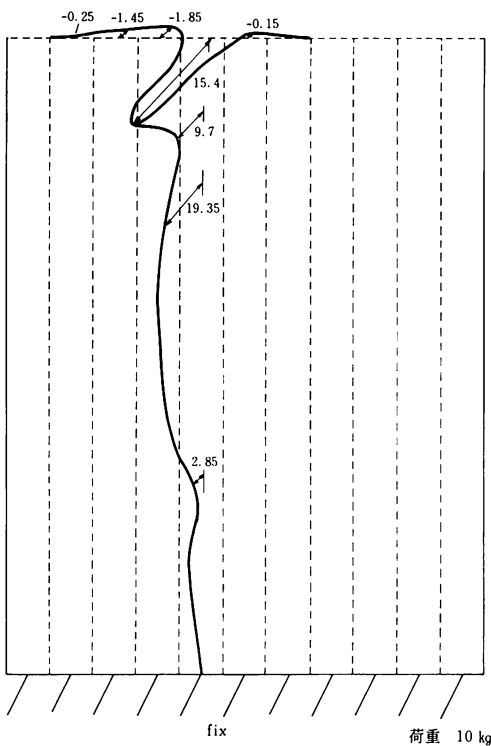


図-21

§ 3 考 察

図6～19に示す如く、理論値と実験値は、おおむね同じ値を示す。地盤反力係数は $k=0.01\text{kg}/\text{cm}^2$ という実測の基に理論値を計算した。

ヤング係数 E は、正確に実測できなかったため、 $E=100,000\text{kg}/\text{cm}^2$ と $2000,000\text{kg}/\text{cm}^2$ の時の値を示し、実験値はその間の所での値を示した。これは供試体が断面形状が直線型でなく、 $\sqrt{\quad}$ の様な形であったので、始め軸直角方向に変位が吸収された様が見られた。

ポアソン比は、 $\mu=0.3$ として数値計算を行った。図-20, 21からは、中央載荷の傾向が、よく表われている。実験供試体は境界条件をほぼ満足できる様に作製し得たが、弾性床としたマットレスの効果が考えていたものと大きく差異が生じた様に思われる。

以上、本理論解析は、矢板構造における応力挙動について、実験を兼ねて行なったが、実験供試体の分解能から考えて、その手がかりを知り得たとは思われるが、実験データの不足および、振動問題などでの解析、実験が必要と思われる。又、タイ・ロッドを有する大型の矢板実験等、実際例に近いものも必要と考えられる。

尚、数値計算は、北大大型計算機 FACOM-230/75、及び苫小牧高専 HITAC 8250 を使用した。

参 考 文 献

- S. G. Nomachi : A note on Finite Fourier Transforms concerning Finite Integration. (The Transcript from the Memories of the Muroran Institute of Technology vol. 5. No. 2)
- 澤田・能町：部分荷重が作用する直線形矢板構造の応力解析について（苫高専紀要 No. 11, 1976）
- 澤田・能町：棒状要素よりなる平面構造の側方不安定解析について（苫高専紀要 No. 11, 1976）
- 能町・澤田：スパン方向のヒンジで結合された棒状要素による面構造の応力について（土木学会年次学術講演会講演概要集，第25回，1-99）

※謝辞：本研究にあたり、図作製にお手伝い頂いた本校卒業研究班，阿部，為田，堤の3君に深く感謝の意を表します。

（昭和52年11月30日受理）