Littlewoodの定理の活用について

菅　原　道　弘*

On Making Use of Littlewood's Theorem

Michihiro SUGAWARA

要　旨
高専の数学に Littlewood の定理を活用したさい期待される効果について述べた。

Synopsis
In this note we try to describe the effects on our technical college students when we teach them Littlewood's theorem in mathematics classes.

§1　は　じ　め　に

「(大学教育を受けるのに)どれほどの能力が要求されるかは，どんな教え方が採用されるかに依存する。シカゴ大学のブルームの話によると，彼の大学の医学部を無事卒業する学生の比率は，かつては三分の一にすぎなかったが，現在では教授法の改善により九九パーセントに達しているという。卒業の判定基準はむしろ高くなっているのに，である。

どこが(大学教育を受けるに必要な最低能力の)下限かの議論をする暇があったら，大学教育の内容・方法の改善を試みるほうがよい。」(〔1〕)という言葉には深く考えさせられる。大学を高専に置きかえるとそのまま我々にはね返ってくるからである。しかも現実をみると限られた時間に盛り沢山な内容となっている。これは高専のみではないのであるが。従って，伊藤俊彦〔2〕の言う「精選された教材について，『指導の重点』をはかる事」，あるいは，仲田紀夫〔3〕の言うように「もはや沢山の数学的知識というよりも『自らが学ぶことの魅力，学ぶ意欲，学ぶ方法を身につける』ということの指導に力を入れるべきであろう」ということになる。

こんなとき，知的好奇心を刺激する具体的材料として，やや難しくはあるが，Littlewood の定理を取り上げてみた。

§2　定理への導入

本校においては微積分の授業は2年生から始まる。使用教科書は「微分積分学」(古屋茂他，大日本図書)で，次の二定理(定理2は定理1より導かれる)がその拠所となる。

定理1．有界なる単調数列は収束する

定理2．(Cauchy の収束条件定理)

数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は，任意の $\varepsilon>0$ に対して番号 n_0 が定められて，$p, q \geqq n_0$ なる任意の自然数 p，q に対して $|a_p-a_q|<\varepsilon$ なることである。

定理1は実数の連続性の一つの表現とも考えられるので，この事実を実数の基本性質と認め理論を組立てて行くのである。

いま，$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とおく。二項定理を利用すれば，数列 $\{a_n\}$ が単調増加であることと上に有界であることとがわかる。従って，定理1により数列 $\{a_n\}$ は収束する。この極限値を e と定めるわけである。すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \qquad \cdots(1)$$

* 講師　一般教科数学

さて，ここで $0 \leqq b < a$ とすれば

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

より次の不等式が導かれる。

$$n(a-b)b^{n-1} \leqq a^n - b^n \leqq n(a-b)a^{n-1}$$

この不等式により $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ の存在を確かめる方法もある。(〔4〕)

しかし，定理1が基本である。使いやすく従って応用範囲も広い。例えば，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\ (p>1)$ の収束することの証明にも直ちに活用できる。なお，調和級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ の発散の証明については定理2の対偶を利用するのも面白い。

さて，　$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$　が定義されると，ここから

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \cdots(2)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \cdots(3)$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \cdots(4)$$

が導かれ，さらに対数関数の連続性により

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x} = 1 \qquad \cdots(5)$$

が導かれる。そして

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \cdots(6)$$

に至り，指数関数，対数関数の導関数へと発展していく。少しずつ工夫しつつ，定理1に源を発するこの流れを辿ることは，問題が解けて嬉しいというのとは違った感動を与えてくれる。数学が論理的，体系的に組立てられている面を窺い知ることができるのである。

§3　単葉関数の係数問題と Littlewood の定理

単葉関数の基本定理の1つとして，次の Bieberbach の面積定理がある。

定理3（Bieberbach の面積定理）

$f(z) = z + \frac{d_1}{z} + \frac{d_2}{z^2} + \cdots\cdots$ を $1 < |z| < \infty$ で正則かつ単葉とすれば $\sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|^2 \leqq 1$

この定理から Bieberbach の係数定理が導かれる。

定理4（Bieberbach の係数定理）

$f(z) = z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n + \cdots$ を

$|z| < 1$ で正則かつ単葉とすれば $|a_2| \leqq 2$

等号は Koebe の極値関数 $z/(1-e^{i\theta}z)^2$ に限る。

さて，一般に $|a_n| \leqq n\ (n=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成立するだろうというのが L. Bieberbach の予想（1916年）である。

$|a_3| \leqq 3$ は K. Löwner（1923年）

$|a_4| \leqq 4$ は P. R. Garabedian と M. Schiffer（1955年）により証明された。さらに

R. N. Pederson（1968年）と小沢満（1969年）とが独立に $|a_6| \leqq 6$ を証明し

R. N. Pederson と M. Schiffer（1972年）は $|a_5| \leqq 5$ を証明した（〔5〕）。

ここで，$a_n\ (n \geqq 2)$ がすべて実数の場合 $|a_n| \leqq n$ となることに関しては O. Szāsz の証明などがある。

これに対して，J. E. Littlewood は次の結果を得た（1925年）。

定理5（Littlewood の定理）

$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots\cdots$ を $|z| < 1$ で正則かつ単葉とすれば $|a_n| < en\ (n=2,\ 3,\ \cdots)$

〔証明〕〔7〕

係数 a_n は Cauchy の積分表示式を用いて

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \quad (0<r<1) \qquad \cdots(7)$$

$$|a_n| \leqq \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|\,d\theta \qquad \cdots(8)$$

ここで

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|d\theta < \frac{r}{1-r}$$

を用いれば

$$|a_n| < \frac{1}{r^{n-1}(1-r)}$$

$r^{n-1}(1-r)$ は $r = 1-\frac{1}{n}$ のとき極大になる　…… (10)

から $r = 1-\frac{1}{n}$ とすれば

$$|a_n| < \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}} = n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$< en \qquad \cdots\cdots (11)$$

〔証明終〕

なお，C. Fitzgerald はこれより更に良い結果，すなわち $|a_n| \leqq n\sqrt{\frac{7}{6}}$ を得た（1972年）。

§4 教育的意義

本校では4年生になって初めて複素関数の基礎を学ぶ。従って Littlewood の定理の証明を学生に期待してもそれは無理である。e を定義した時点で可能なのは（11）の部分の証明だけで，間もなく（10）の部分も理解できるようになる。4年生になって（7）（8）が理解可能となり，（9）は彼等の将来の問題として残る部分であろう。従って一話題として取り上げる位しかできないのかもしれない。だが，この定理をその流れも含め取り上げることにより，どの教科もそうであるが，数学が固定したものではないという面，すなわち未解決問題をかかえ，それらを解決しつつ発展し，さらに新しい問題にぶつかって行く，そういう面に触れさせることができる。e がこんな所におさまっているという驚き，（9）にあったに違いない Littlewood の苦労，これらに思いをはせるとき，我々の先達の英知を引継いだ喜びを感じ，真に容易な事ではないのであるがさらに一歩前進させようという願望を持つのである。

梅沢敏夫〔8〕が言う「教科としての数学では，すでにでき上がった数学を，一応白紙に戻して，生徒の心の裡に再構成していくところに指導の要点があると考えられる。」という点から言えば（1）～（6）の流れは結構面白い所であるが，これにさらにプラス α の効果，すなわち現在獲得した知識が遠く発展して意外な所に活用されている事を知り，自分の知識の活用を考えるようになる効果が期待されるのである。

§5 おわりに

ただここで忘れてならない事がある。「同じ刺激を与えても，反応する主体の側の個人差によって，ある子どもは学習意欲をもやしても，他の子どもは反応しないということも起こりうるのである。」と渡辺秀敏〔9〕が言うように，学生の学習意欲を高めようと色々工夫してもそこに限界があることである。渡辺〔9〕はさらに続ける「学習意欲をひきだそうとする働きかけても，高校生や大学生では，自律的意志とでもいうべき一般的な意欲がなければ，効果のあげようがないということになる。」「長続きする学習意欲をひきだすには，授業における学習意欲を高める工夫と同時に，自分自身について考えることを刺激して，自分が何を欲し何に適しているかを見きわめる機会を与えることが，たいせつであろうと思う。」

従って，ここで，H. R. の活用も大きな問題となってくるのである。

最後に，常日頃暖かく励まして下さった本校数学教室の諸先生に深く感謝致します。

文　献

〔1〕波多野誼余夫，稲垣佳世子：知力の発達，岩波新書，（1977）。

〔2〕伊藤俊彦：学業不振の実態とその分析，数学教育，No. 197（1976），82－88。

〔3〕仲田紀夫：これからの数学教育の目的・目標論－現場からの試案－，日本数学教育学会誌－数学教育，第59巻第9号（1977），2－6。

〔4〕竹之内脩：何のための $\varepsilon-\delta$ か，現代数学増刊（1975），39－52。

〔5〕Z. Nehari : A proof of $|a_4| \leqq 4$ by Loewner's method, Lon. Math. Soc. Lecture note series 12, (1974).

〔6〕W. K. Hayman : Researce problems in function theory, 同上。

〔7〕辻　正次：複素函数論，槇書店（1974）。

〔8〕梅沢敏夫：数学教育の研究について，日本数学教育学会誌－数学教育，第58巻第3号（1976），55－57。

〔9〕渡辺秀敏：何が学習意欲を引出すか，授業研究，No. 168（1977），5－10。

（昭和52年12月3日受理）