

有限要素法による軸対称三次元モデルの解析

藤 島 豊*

Analysis of Axcal Symmetry Three Dimensional Model by Finit Element Method

Yutaka FUJISIMA

ま え が き

軸対称場におけるポテンシャルの問題は不均一二次元問題と等価であることに着目し、同心球導体のモデルを想定し、内球に電位を与えた場合の同心球間の電位分布解析を試み良好な結果を得たので報告する。

1. 計 算 手 法

二次元ポテンシャル場において三角要素を考えこの三角要素内のポテンシャルを $\phi(x, y)$ とすると、ポテンシャルエネルギー T_e は

$$T_e = \frac{1}{2} \omega^{-2} \iint_e \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

となり、一次試験関数変化で表現すれば

$$T_e = \frac{1}{2} \omega^{-2} \phi_e^T T F_e^{(1)} \phi_e$$

$$T F_e^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \theta_i A_i$$

となる。ここで θ_i ($i = 1, 2, 3$) は要素の三頂点での頂角であり、

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である。

軸対称の場合は

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} \omega^{-2} \iiint_e \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 \right\} dr dz d\theta \\ &= \frac{1}{2} \omega^{-2} \iint_e 2\pi r \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 \right\} dr dz \end{aligned}$$

となり、二次元場との相違は、積分内に $2\pi r$ が入っていることである。

(面積座標の導入)

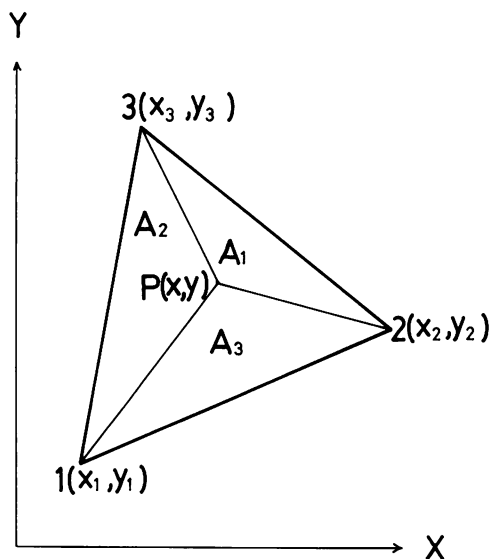


図-(1) 面積座標の導入

図-(1)に示したごとく、三角要素の内点を $P(x, y)$ とし、 Δe を要素の面積、さらに A_1, A_2, A_3 に面積を分割し、三つの小三角形とすると、

$$\Delta e = A_1 + A_2 + A_3$$


```

***** DIMENSION *****
1= (0.1570E-05,0.5000E 01) 2= (0.4755E 01,0.4904E 11) 3= (0.1915E 01,0.4619E 01) 4= (0.2778E 01,0.4157E 01)
5= (0.5550E 01,0.3536E 01) 6= (0.4157E 01,0.2778E 11) 7= (0.4619E 01,0.1915E 01) 8= (0.4904E 01,0.9755E 00)
9= (0.5550E 01,0.0 ) 10= (0.1915E-05,0.6000E 01) 11= (0.1171E 01,0.5885E 01) 12= (0.2296E 01,0.5543E 01)
13= (0.5550E 01,0.4989E 01) 14= (0.4755E 01,0.4243E 01) 15= (0.4989E 01,0.3333E 01) 16= (0.5543E 01,0.2296E 01)
17= (0.5550E 01,0.1171E 01) 18= (0.6000E 01,0.0 ) 19= (0.2198E-05,0.7000E 01) 20= (0.1362E 01,0.6865E 01)
21= (0.2674E 01,0.6467E 01) 22= (0.3889E 01,0.5820E 01) 23= (0.4950E 01,0.4950E 01) 24= (0.5820E 01,0.3889E 01)
25= (0.6467E 01,0.2679E 01) 26= (0.6465E 01,0.1366E 01) 27= (0.7000E 01,0.0 ) 28= (0.2512E-05,0.8000E 01)
29= (0.1371E 01,0.7846E 01) 30= (0.3061E 01,0.7391E 01) 31= (0.4445E 01,0.6652E 01) 32= (0.5657E 01,0.5657E 01)
33= (0.6652E 01,0.4445E 01) 34= (0.7391E 01,0.3061E 01) 35= (0.7846E 01,0.1366E 01) 36= (0.8000E 01,0.0 )
37= (0.7846E-05,0.9000E 01) 38= (0.1756E 01,0.8827E 01) 39= (0.8344E 01,0.8315E 01) 40= (0.5000E 01,0.7483E 01)
41= (0.8344E 01,0.6354E 01) 42= (0.7483E 01,0.5000E 01) 43= (0.8315E 01,0.3444E 01) 44= (0.8827E 01,0.1756E 01)
45= (0.9000E 01,0.0 ) 46= (0.5147E-05,0.1000E 02) 47= (0.1951E 01,0.9800E 01) 48= (0.3827E 01,0.9239E 01)
49= (0.5570E 01,0.8315E 01) 50= (0.7071E 01,0.7071E 01) 51= (0.8315E 01,0.5556E 01) 52= (0.9239E 01,0.3827E 01)
53= (0.9800E 01,0.1951E 01) 54= (0.1000E 02,0.0 )

```

出外結果-(2) 全要素番号

0.10000E+01	0.10000E+01	0.10000E+01	0.10000E+01	0.10000E+01	0.10000E+01	0.10000E+01	0.10000E+01	0.10000E+01	0.10000E+01
0.66564E+00	0.64744E+00	0.65922E+00	0.66208E+00	0.65463E+00	0.66234E+00	0.65891E+00	0.66136E+00	0.67354E+00	0.67354E+00
0.42671E+00	0.42950E+00	0.42976E+00	0.43141E+00	0.42235E+00	0.43092E+00	0.42976E+00	0.43053E+00	0.43566E+00	0.43566E+00
0.24833E+00	0.24729E+00	0.24860E+00	0.24537E+00	0.24674E+00	0.24513E+00	0.24855E+00	0.24800E+00	0.25564E+00	0.25564E+00
0.11017E+00	0.10639E+00	0.11293E+00	0.10516E+00	0.10109E+00	0.10511E+00	0.10271E+00	0.10658E+00	0.11462E+00	0.11462E+00
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

出力結果-(3) 計算結果

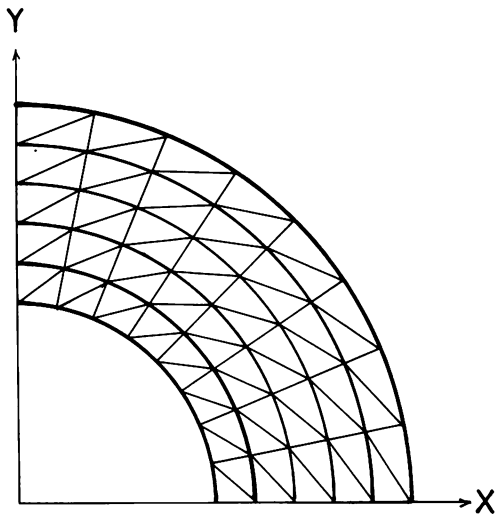


図-(2) 要素分割モデル

掛けることにより、軸対称場のマトリクス $TF_e^{(n)}$ を作成することができる。

以上、作成したマトリクスを用いて、境界条件を与えて連立一次方程式を解くことにより解を得ることができる。

次に TF マトリクス作成のプログラムを示し、あわせて出力結果を載せてある。

2. 結 論

内球に 1 (v), 外球に 0 (v) を境界条件として与え、計算した出力結果を、出力結果-(3)として示している。

図-(2)は要素分割図であり、その節点座標、全

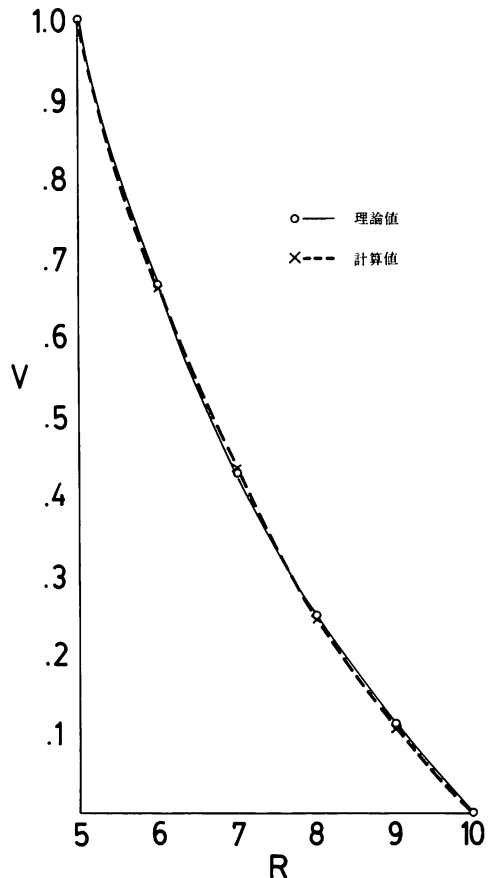


図-(3) 理論値と計算値の比較

要素は出力結果－(1), 出力結果－(2)として示している。

図－(3)は理論値と計算値の比較図で、最大で3%の誤差があるが、ほぼ満足のいく結果を得ている。

要素分割を細かくすることにより、さらに精度の向上がはかられ、またポアソンの問題、さらには開放領域にわたる問題へも応用が可能である。

最後に計算機使用に際して御協力いただいた技官佐藤雄二氏に感謝致します。

参 考 文 献

- (1) 加川幸雄 “電気・電子のための有限要素法入門” (オーム社)
- (2) 戸川隼人 “FORTRAN による有限要素法入門” (サイエンス社)
- (3) 藤野 勉 “熱伝導と熱応力” コンピュータによる構造工学講座II－4－B (培風館)
- (4) 吉識雅夫・山田嘉昭 “マトリクス有限要素法” (培風館)
- (5) “電気工学における有限要素法の応用” 昭和51年電気学会全国大会シンポジウム (S.7)
- (6) 加川幸雄 “有限要素法の電気工学への応用” (電子科学5月号)

(昭和53年11月30日受理)