

碍子周辺が誘電体で囲まれた場合の電位分布解析

藤島豊*

鷺巣慎**

Analysis of Electric Potential In Case of Insulator Surrounded By Dielectric

Yutaka FUJISHIMA
Shin WASHISU

まえがき

碍子に雪・湿塩・雨などが附着した場合の電位分布の変化を知ることは、碍子の諸事故を想定した場合の一助となるであろう。

その一歩として碍子周辺を空気とは異なる誘電体が一様に囲んだ場合を考え、数値解析により電位分布状態を求めている。

この場合の解析は開放領域にわたる問題となることから、計算手法としては、自由空間におけるグリーン関数を導入した有限要素法を用いて解析を行なっている。

さらに対象としている碍子の対称性から軸対称三次元問題として取扱っている。

解析方法

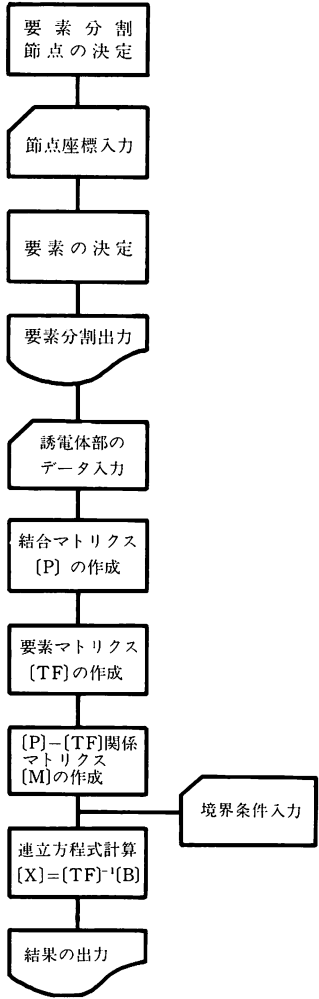
1. 解析手順

解析手順のアウトラインをフローチャート形式で示した。実際のプログラムのフローチャートはここでは称略している。

注意点としては、それぞれのマトリクススのディメンションを正しくとらなければならないことがあげられる。

2. 結合マトリクス〔P〕の算出

開放領域を含む場合のラプラスの方程式の取扱いは、図-1)に示すように、 S_B 上にポテンシャル ϕ_B と、対象領域のポテンシャル ϕ_C との関係を



* 助手 電気工学科
* * 北海道大学工学部電気工学科

図-A 解析手順フローチャート

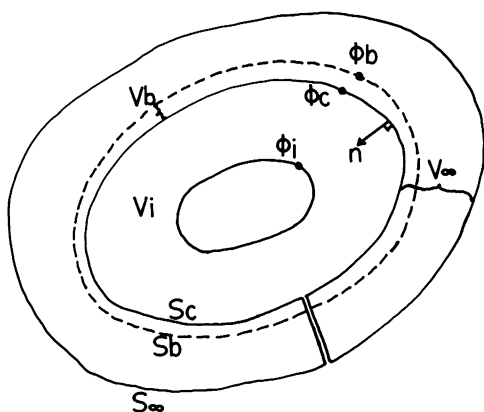


図-1 開放領域におけるグリーン
定理の適用

(1) 式で表わし、この〔P〕マトリクスを算出しなければならない。

$$[\phi_B] = [P][\phi_C] \dots\dots(1)$$

開放領域への有限要素法の適用は、Wexler 等⁽¹⁾が提唱しているように対象領域の外側に仮想境界を設けて関係式を求め、これを解くことになる。

ポテンシャル ϕ について示せば (2) 式の関係が得られる。

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_C} \left(G \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \dots\dots(2)$$

G は $\Delta G = 0$ を満足するグリーン関数である。

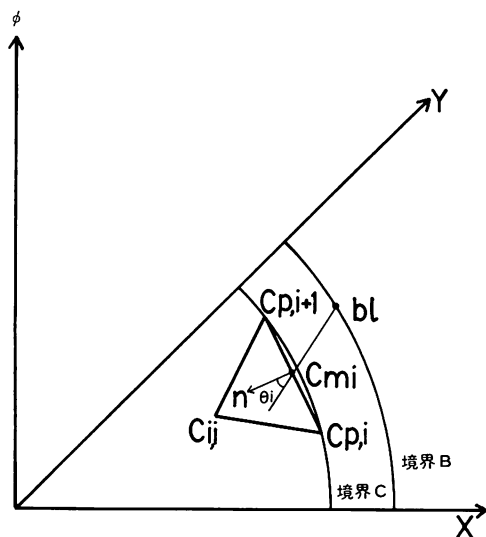


図-2 三角要素と境界 B の関係(1)

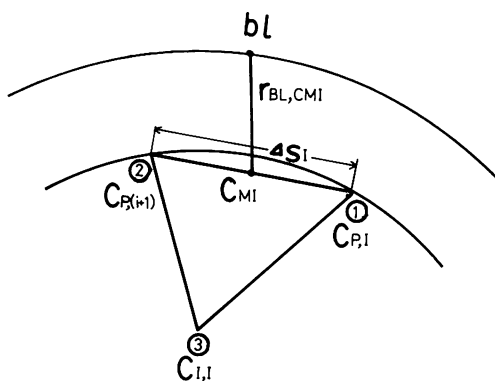


図-3 三角要素と境界 B の関係(2)

図-2), 図-3)に示した様に境界 C 内の三角要素 C_i と境界 B 上の節点 bl のポテンシャル ϕ_{bl} の関係は(3)式のごとく表わされる。

$$\phi_{bl} = \sum_{i=1}^N \int \left\{ \phi_{C_i} \frac{\partial G_{(bl, C_i)}}{\partial n} - G_{(bl, C_i)} \frac{\partial \phi_{C_i}}{\partial n} \right\} dS \dots\dots(3)$$

ここで $\left\{ \begin{array}{l} C_i ; \text{三角要素の C 上の辺} \\ C_{mi} ; \text{辺 } C_i \text{ の中点} \\ C_{pi} \\ C_{p, (i+1)} \end{array} \right\} ; \text{辺 } C_i \text{ の両端の節点}$
 $N ; C_i \text{ の個数}$
 $\Delta S_i ; \text{辺 } C_i \text{ の長さ}$

(3) 式の離散化を行なって

$$\phi_{bl} = \sum_{i=1}^N \left\{ \phi_{C_{mi}} \frac{\partial G_{(bl, C_{mi})}}{\partial n} - G_{(bl, C_{mi})} \frac{\partial \phi_{C_{mi}}}{\partial n} \right\} \Delta S_i \dots\dots(4)$$

ここでグリーン関数は

$$G_{(bl, C_{mi})} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{(bl, C_{mi})}} \right)$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{(bl, C_{mi})}^2} \frac{\partial r_{(bl, C_{mi})}}{\partial n} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\cos \theta_i}{r_{(bl, C_{mi})}^2} \dots\dots(5) \end{aligned}$$

ϕ_{Cmi} については面積座標(ξ)を導入して(6)式で表わすことができる。

$$\phi_{Cmi} = \left[\begin{array}{c} \xi_{CP,i} \quad \xi_{CP,(i+1)} \quad \xi_{Ci,i} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \phi_{CP,i} \\ \phi_{CP,(i+1)} \\ \phi_{Ci,i} \end{array} \right] \dots\dots\dots(6)$$

したがって

$$\frac{\partial \phi_{Cmi}}{\partial n} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \xi_{CP,i}}{\partial n} \quad \frac{\partial \xi_{CP,(i+1)}}{\partial n} \quad \frac{\partial \xi_{Ci,i}}{\partial n} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \phi_{CP,i} \\ \phi_{CP,(i+1)} \\ \phi_{Ci,i} \end{array} \right] \dots\dots\dots(7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_3 = \Delta S_i, \quad \alpha = 2A \quad (A \text{ は要素 } C_i \text{ の面積}) \\ \beta_1 = y_2 - y_3, \quad \beta_2 = y_3 - y_1, \quad \beta_3 = y_1 - y_2 \\ \gamma_1 = x_3 - x_2, \quad \gamma_2 = x_1 - x_2, \quad \gamma_3 = x_3 - x_1 \end{array} \right.$$

として

$$\frac{\partial \phi_{Cmi}}{\partial n} = \frac{1}{\alpha S_3} \left[\begin{array}{c} \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 \quad \beta_3 \beta_2 + \gamma_3 \gamma_2 \\ \beta_3 \beta_3 + \gamma_3 \gamma_3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \phi_{CP,i} \\ \phi_{CP,(i+1)} \\ \phi_{Ci,i} \end{array} \right] \dots\dots\dots(8)$$

$$\text{ここで} \left\{ \begin{array}{l} R = \frac{1}{r_{(bl,Cmi)}}, \quad RR = (r_{(bl,Cmi)}^2) \\ \delta_{31} = \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1, \quad \delta_{32} = \beta_3 \beta_2 + \gamma_3 \gamma_2 \\ \delta_{33} = \beta_3 \beta_3 + \gamma_3 \gamma_3 \\ \xi_{P,i} = \frac{1}{2}, \quad \xi_{P,(i+1)} = \frac{1}{2}, \quad \xi_{Ci,i} = 0 \end{array} \right.$$

とおいて、 ϕ_{bl} への ϕ_c 上の積分の寄与は $\phi_{bl'i}$ で表わすと

$$\phi_{bl,i} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \left[\frac{R}{2A} \delta_{31} + \frac{S_3}{2RR} \cos \theta_i \frac{R}{2A} \delta_{32} + \frac{S_3}{2RR} \cos \theta_i \frac{R}{2A} \delta_{33} \right] \left[\begin{array}{c} \phi_{C,i} \\ \phi_{CP,(i+1)} \\ \phi_{Ci,i} \end{array} \right] \dots\dots\dots(9)$$

すなわち〔P〕マトリクスは

$$[P] = \sum_{i=1}^N \left[\frac{R}{2A} \delta_{31} + \frac{S_3}{2RR} \cos \theta_i \frac{R}{2A} \delta_{32} + \frac{S_3}{2RR} \cos \theta_i \frac{R}{2A} \delta_{33} \right]$$

を作成することになる。

3. 軸対称回転体の場合

実際の計算過程においては、三角要素を固定し、外側の ϕ_b をY軸を中心に一回転させる方法を用いており、前式の $r_{bl,Cmi}$ 、 θ_i は図-4)に示すごとく回転することにより変化するわけで、以下のように考えなければならない。

Y軸を中心に ϕ だけ回転した場合のポテンシャルを B_ϕ とすると

$$\left\{ \begin{array}{l} B_\phi(X, Y, Z) \\ X = BBX \\ Y = BBY \times \cos \phi \\ Z = BBY \times \sin \phi \end{array} \right.$$

(ここでBBX, BBYは $B(x, y, 0)$ のそれぞれのx, yの値である)

として、 $r_{bl,Cmi}$ の変化をRIJ, θ_i の変化を θ として表わすと

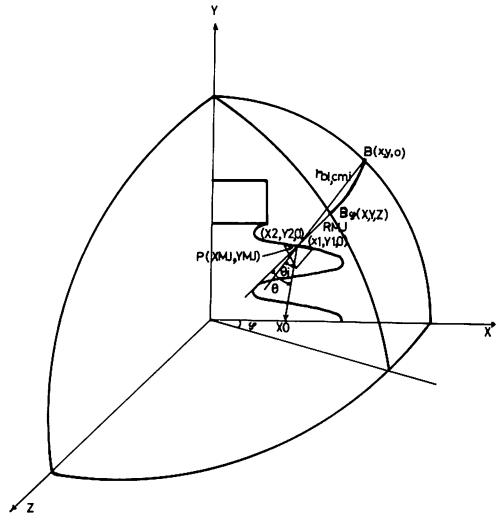


図-4 境界Bを回転した場合の B_ϕ

$$\begin{aligned} (RIJ)^2 &= (\overrightarrow{B_\phi \cdot P})^2 \\ &= (BBX - XMJ)^2 + (BBY - YMJ)^2 \\ &\quad + (BBZ)^2 \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

$$X_o = XMJ - YMJ \frac{\beta_3}{\gamma_3} \quad \text{として}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(X_o - XMJ)(XMJ - BBX)}{\sqrt{(X_o - XMJ)^2 + (o - YMJ)^2}} \\ &\quad + \frac{(o - YMJ)(YMJ - BBY)}{\sqrt{(RIJ)^2}} \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

(ここで XMJ, YMJ は要素の辺の中点 P の X, Y の値である)
となる。

4. $[M]$ マトリクスの算出

$[P]-[TF]$ の関係マトリクス $[M]$ の算出は、図-1)に示した V_I 領域と V_B 領域に有限要素法を適用することにより、この領域に関するマトリクス方程式は、以上述べてきた $[\phi_B] = [P][\phi_C]$ として(12)式として表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_B &= \begin{bmatrix} 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_I \\ \phi_C \end{bmatrix} \\ TF \cdot \phi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

よって

$$\begin{bmatrix} TF_{II} & TF_{IC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_I \\ \phi_C \end{bmatrix} + TF_{IB}\phi_B = [0]$$

$$\begin{bmatrix} TF_{CI} & TF_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_I \\ \phi_C \end{bmatrix} + TF_{CB}\phi_B = [0]$$

$$\begin{bmatrix} TF_{BI} & TF_{BC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_I \\ \phi_C \end{bmatrix} + TF_{BB}\phi_B = [0]$$

ϕ_B は未知数であるから ϕ_B を消去して

$$\begin{bmatrix} TF_{II} & TF_{IC} + TF_{IB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_I \\ \phi_C \end{bmatrix} = [0]$$

$$\begin{bmatrix} TF_{CI} + P^T TF_{BI} & TF_{CC} + TF_{CB}P + P^T TF_{BC} \\ + P^T TF_{BB}P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_I \\ \phi_C \end{bmatrix} = [0]$$

として $[M]$ マトリクスを算出することが出来る。

以上の手法を用い、境界条件として、図-5)-aに示したモデル化した碍子の上、下端子にそれぞれ $+1(v), -1(v)$ 、碍子の中心を $o(v)$ とおいて、さらに誘電率を与えて全体の電位分布を求めている。

結 果

碍子の分割は節点数 155,要素数 221 であり、その外側に誘電体部・境界を設け全体として節点数 285, 要素数 484 とした。

図-5)-bは分割モデル、図-6)は碍子周辺が空気の場合(すなわち $\epsilon=1.0$)の電位分布状態図、図-7)は碍子の囲りが $\epsilon=3.0$ の誘電体で囲まれた場合の電位分布状態図を示している。この場合は導体への電界の集中が若干ではあるがされてい

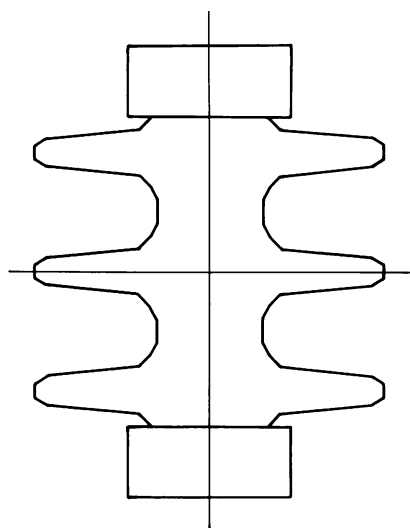
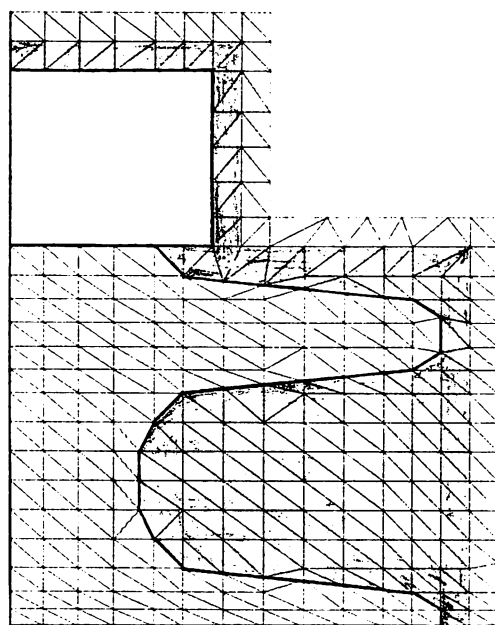


図-5)-a 碍子のモデル



(誘電体部)

図-5)-b 要素分割モデル

ると言える。

次に示した図-8)から図-10)は雪が碍子に附着し、外気温が低い場合には、雪は氷状態に近くなっているとの想定から氷の誘電率をそれぞれ 70, 80, 100 とした場合の分布状態である。

氷の誘電率を考える場合には、誘電余効現象、結晶状態などにより、さらに周波数、温度、不純

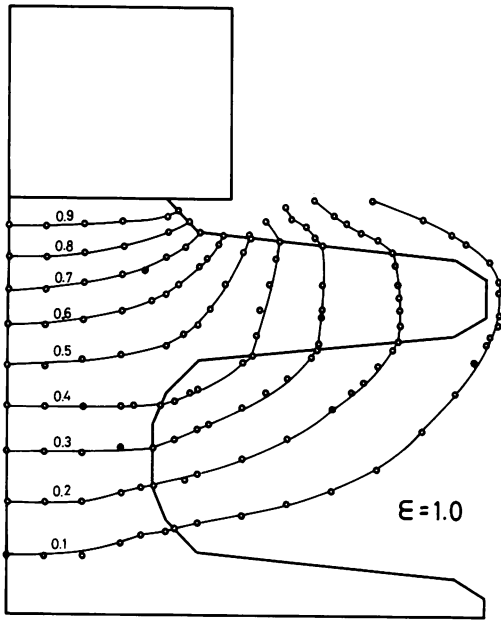


図-6 碍子周辺が空気 ($\epsilon=1.0$) の場合

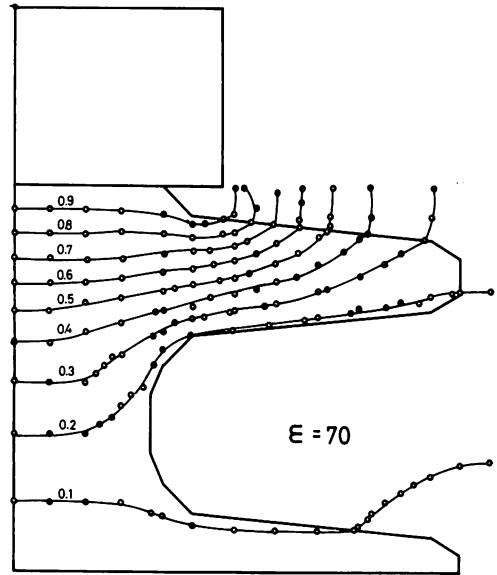


図-8 誘電体 $\epsilon=70$ の場合

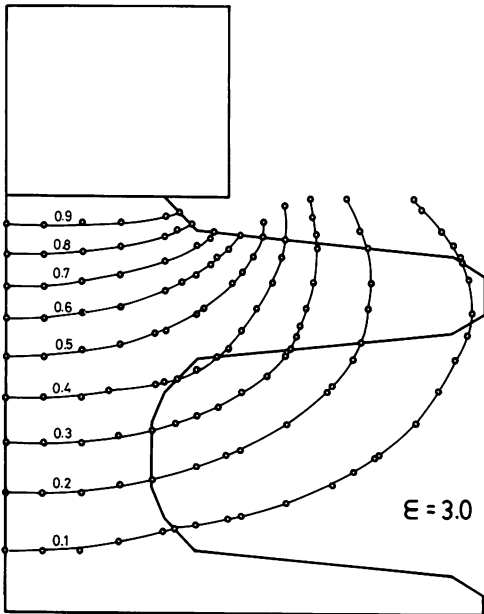


図-7 誘電体 $\epsilon=3.0$ の場合

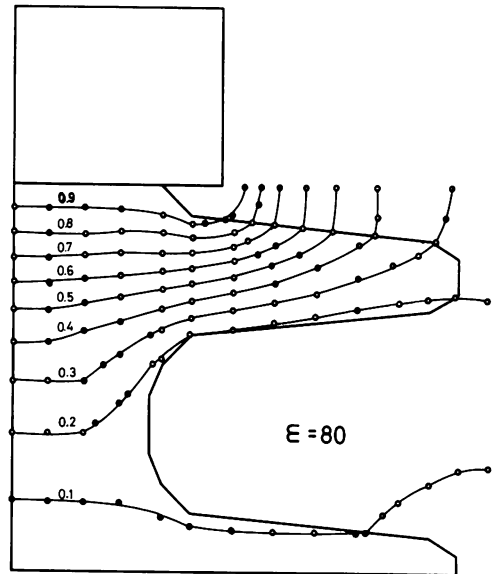


図-9 誘電体 $\epsilon=80$ の場合

物の影響もうけ、大きく変化する⁽³⁾ことから、今回は $\epsilon=70$, $\epsilon=80$, $\epsilon=100$ として解析したが、分布図から電界の集中は導体近傍の碍子部分に集中しており、氷の部分においては逆に電界の分散が起っていると言える。

以上、興味ある結果を得たが今後は雪の、より

実際的な場合を想定して解析を行なう所存である。

この場合には、軸対称性のみならず、全体の対称性が失われてしまい、プログラムの変更も余儀なくされるわけである。

使用した計算機は北大大型計算機FACOM 230-60/75であり、計算時間はCpu-Time 41700 MS, USE-Time 106053 MS, 容量は104 KWであった。

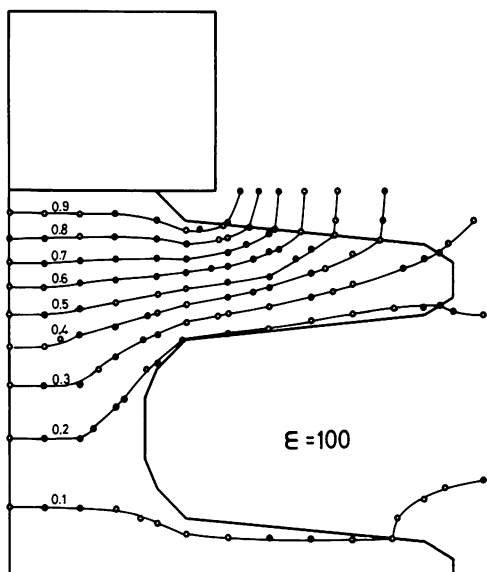


図-10 誘電体 $\epsilon=100$ の場合

謝 辞

終りにあたって、本研究に際して快く研修の場を提供していただき、適切な御指導をいただいた北大工学部電気工学科、深井一郎教授に、ここに深くお礼するとともに、北大工学部電気工学科L棟研究室の研究生諸氏の御協力に感謝します。

参 考 文 献

- (1) B. H. McDonald And A. Wexler, "Finite-Element Solution of Field Problems", IEEE Trans Microwave Theory Tech, Vol MTT-20, No 12 p841 Dec 1972
- (2) 藤野 勉; "熱伝導と熱応力" コンピュータによる構造工学講座II-4-B (倍風館)
- (3) 岡 小天・中田 修; 固体誘電体論 (岩波書店)
- (4) 北海道電力技術研究所年報第12巻昭和42年
- (5) 高橋隆一; "有限要素法による電界の数値解析" 昭和50年度電気四学会北陸支部連合大会
- (6) 藤島 豊・鷺巣 慎・深井一郎; 有限要素法による碍子周辺の電位分布解析" 昭和53年度電気四学会北海道支部連合大会

(昭和53年11月30日受理)