

うず巻ポンプ羽根車内の流れと吸込性能

(第1報：吸込性能の計算値と実験値の比較)

原 田
田 島

彊*
勲**

On the Flow in Centrifugal Pump Impellers and Suction Performance

Tsuyoshi HARADA

Isao TAJIMA

要 旨

うず巻ポンプ羽根車内の流れの数値解析を行い、キャビテーション発生状況について計算値と実験値の比較を試みた。

1 ま え が き

うず巻ポンプ羽根車の吸込性能については多くの実験結果が報告されているが、キャビテーションに対する最適設計のための理論的裏付けはいまだ得られていない。われわれはキャビテーションに対する最適設計法を確立することを目的として、羽根車内の流れと吸込性能の関係を種々の構造および比速度の羽根車について系統的にしらべることとした。第1報では、羽根車内の流れを理論的に解析し、実験的にしらべたキャビテーション発生状況と流れ解析の結果との関係をしらべた。

羽根車内の流れの解析は、流れを非粘性定常流とし、かつ流体は回転対称面上を流れるという仮定のもとに、Katsanisの準直交曲線法⁽¹⁾に基いて子午面内の流れを求め、これによって与えられる回転対称流面に対して妹尾らの方法⁽³⁾により羽根間の流れを求めた。なお羽根入口周辺の流れについてはKatsanisの逐次過緩和法⁽²⁾をあわせて用い、羽根間の流れを補正した。

2 記 号

b : 部分羽根車の幅
 C_p : 静圧係数
 K_a : キャビテーション係数
 l : 流れ面にそう入口からの長さ
 l_t : 流れ面にそう入口から出口までの長さ
 m : 子午面流線方向の座標
 N : 羽根枚数
 P : 静圧
 P_t : 羽根車入口全圧
 Q : 流量
 r : 物理面の半径座標
 r_c : 子午面内流線の曲率半径
 R : 写像面の半径座標
 s : 準直交曲線の座標
 t : 時間
 U : 羽根車周速度
 U^* : 写像面での半径 R の周速度
 v : 絶対速度
 w : 相対速度
 W : 写像面の相対速度
 z : 軸方向の座標
 α : 子午面内の流線と z 軸のなす角
 β : 相対速度の子午面分速度とのなす角
 γ : 座標線 S の法線と z 軸のなす角

* 助教授 機械工学科

** 助 手 機械工学科

θ : 物理面の角度座標
 ρ : 流体の密度
 ψ' : 質量流れの流れ関数
 ω : 角速度
 Θ : 写像面の角度座標
 λ : 入口予旋回量 ($= r_i \ v_{\theta i}$)

添字: $r, \theta, m, z, R, \Theta$ はそれぞれの方向の成分を示し, i, e はおのおの羽根入口, 出口における値を示す。

3 基礎式および計算法

(1) 子午面内の流れ

図1に示すように角速度 ω で羽根車とともに回転する相対円柱座標 (r, θ, z) において, 三次元非粘性流体に対するオイラーの運動方程式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw_r}{dt} - \frac{(w_\theta + \omega r)^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{dw_\theta}{dt} + \frac{w_r w_\theta}{r} + 2\omega w_r &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} \\ \frac{dw_z}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで

$$\frac{d}{dt} = w_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2)$$

q を任意曲線にそっての距離とすれば, この曲線にそっての圧力 P の変化は次式で与えられる。

$$\frac{dP}{dq} = \frac{\partial P}{\partial r} \frac{dr}{dq} + \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dq} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{dq} \quad (3)$$

式(1)を用いて式(3)を表わせば

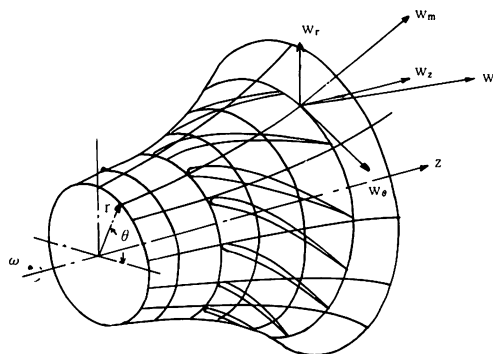


図-1 回転流面と座標

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dq} &= \left\{ \frac{dw_r}{dt} - \frac{(w_\theta + \omega r)^2}{r} \right\} \frac{dr}{dq} \\ &+ \left\{ r \frac{dw_\theta}{dt} + w_r w_\theta + 2\omega w_r \right\} \frac{d\theta}{dq} \\ &+ \frac{dw_z}{dt} \frac{dz}{dq} \end{aligned} \quad (4)$$

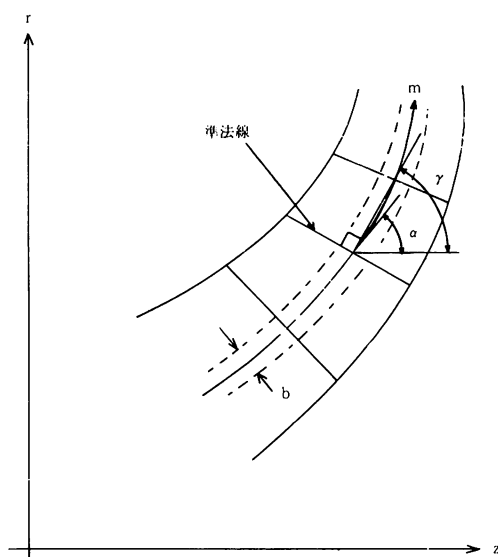


図-2 子午面

非圧縮性流体を仮定すれば, 羽根車内の任意の点における静圧は羽根車入口中心軸上の全圧を P_t として次式で与えられる。

$$P = P_t - \rho \omega \lambda + \rho \frac{\omega^2 r^2 - w^2}{2} \quad (5)$$

式(5)を q について微分すれば

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dq} = \frac{d}{dq} \left(\frac{P_t}{\rho} \right) - \omega \frac{d\lambda}{dq} + \omega^2 r \frac{dr}{dq} - w \frac{dw}{dq} \quad (6)$$

式(6)を式(4)に代入すれば

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dq} &= \frac{1}{w} \left\{ \frac{d}{dq} \left(\frac{P_t}{\rho} \right) - \omega \frac{d\lambda}{dq} \right\} + \frac{1}{w} \left\{ \omega^2 r + \frac{dw_r}{dt} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(w_\theta + \omega r)^2}{r} \right\} \frac{dr}{dq} + \frac{1}{w} \left\{ r \frac{dw_\theta}{dt} + w_r w_\theta \right. \\ &\quad \left. + 2\omega w_r \right\} \frac{d\theta}{dq} + \frac{1}{w} \frac{dw_z}{dt} \frac{dz}{dq} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで速度三角形の関係より

$$\left. \begin{aligned} w_m &= w \cos \beta, \quad w_r = w_m \sin \alpha \\ w_z &= w_m \cos \alpha, \quad w_\theta = w \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

また

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{dm} \frac{dm}{dt} = \frac{w_m}{r_c} \quad (9)$$

曲線 q を子午面に回転投影した曲線を準直交曲線座標 s とすれば、この方向の速度こう配式は式(7), (8), (9)から次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{dw}{ds} &= \left(A \frac{dr}{ds} + B \frac{dz}{ds} \right) w + C \frac{dr}{ds} + D \frac{dz}{ds} \\ &+ \left\{ \frac{d}{ds} \left(\frac{P_t}{\rho} \right) - \omega \frac{d\lambda}{ds} \right\} \frac{1}{w} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\cos \alpha \cdot \cos^2 \beta}{r_c} - \frac{\sin^2 \beta}{r} \\ &\quad + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta \frac{\partial \theta}{\partial r} \\ B &= -\frac{\sin \alpha \cdot \cos^2 \beta}{r_c} + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ C &= \sin \alpha \cdot \cos \beta \frac{dw_m}{dm} - 2 \omega \sin \beta \\ &\quad + r \cdot \cos \beta \left(\frac{dw_\theta}{dm} + 2 \omega \sin \alpha \right) \frac{\partial \theta}{\partial r} \\ D &= \cos \alpha \cdot \cos \beta \frac{dw_m}{dm} + r \cdot \cos \beta \left(\frac{dw_\theta}{dm} \right. \\ &\quad \left. + 2 \omega \sin \alpha \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

また子午面内の連続の式は

$$Q = \int_{s_1}^{s_x} \rho w \cos \beta \cdot \cos(\gamma - \alpha) (2\pi r - N t_\theta) ds \quad (12)$$

(ただし s_1, s_x はおのおの座標線 s のハブ上, シュラウド上の値)

座標 s の方向の力の平衡方程式(10)は、子午面内の連続の式(12)を同時に満足するように数値解析する。これを解くために必要な変数のうち $\beta, \frac{dw_m}{dm}, \frac{dw_\theta}{dm}, \frac{\partial \theta}{\partial r}, \frac{\partial \theta}{\partial z}$ などは羽根間流れの解析により求められる。

(2) 羽根間流れ

1) 回転流面の流れ

羽根間の流れを代表する流線を z 軸のまわりに回転してできる回転流面上を流体は流れるものと

する。子午面内の流線方向を m とし、絶対速度 v の m, θ 方向の成分を v_m, v_θ とすれば、羽根間流れの絶対流れが非回転である条件は

$$\frac{\partial(v_\theta r)}{\partial m} - \frac{\partial v_m}{\partial \theta} = 0 \quad (13)$$

質量流れの流れ関数 ψ' を次のように定義する。

$$\frac{\partial \psi'}{\partial m} = -b \rho w_\theta, \quad \frac{\partial \psi'}{\partial \theta} = b \rho w_m \quad (14)$$

絶対速度と相対速度の関係は

$$w_m = v_m, \quad w_\theta = v_\theta - r\omega \quad (15)$$

また図2から

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \sin \alpha \quad (16)$$

式(15), (16)の関係を用いて式(13), (14)から次のように回転流面上の流れの基礎式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial m^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\ln(b\rho))}{\partial \theta} \frac{\partial \psi'}{\partial \theta} \\ + \left\{ \frac{1}{r} \sin \alpha - \frac{\partial(\ln(b\rho))}{\partial m} \right\} \frac{\partial \psi'}{\partial m} = 2b\rho\omega \sin \alpha \end{aligned} \quad (17)$$

この式を差分法で解くために流れ関数 ψ' を次のように定義しなおす。

$$u = \frac{\psi'}{W_c} \quad (\text{ただし } W_c \text{ は翼1ピッチ当りの流量}) \quad (18)$$

このとき式(17)は

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial m^2} + \left\{ \frac{1}{r} \sin \alpha - \frac{\partial(\ln b)}{\partial m} \right\} \frac{\partial u}{\partial m} \\ = \frac{2b\omega}{W_c} \sin \alpha \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)を差分方程式で表わし、境界条件のもとに緩和法を用いて解くことができる。

2) 写像面の流れ

回転流面上の羽根列を次の関係のもとに $R-\Theta$ 平面上の円形翼列に写像する。

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{\Theta}{\theta} = E, \quad \frac{1}{r} \frac{dm}{d\theta} = \frac{1}{R} \frac{dR}{d\Theta} \quad (20)$$

$$R = R_0 e^{\int_i^m \left(\frac{1}{r} \right) dm} \quad (21)$$

$b\rho = \text{const.}$ と仮定し、 $\Psi = \psi'/b\rho$ とおいて式(17)を式(20)、(21)によって変形すれば

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} = 2\omega \sin \alpha \left(\frac{r}{RE} \right)^2 \quad (22)$$

$R-\Theta$ 平面座標上の相対速度は

$$\frac{\partial \Psi}{\partial R} = -W_\theta, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} = RW_R \quad (23)$$

式(22)はポアソンの方程式であるので、一般解は特解 Ψ^* と零解 Ψ_0 とにより次のように表わされる。

$$\Psi = \Psi_0 - \Psi^* \quad (24)$$

ここで Ψ^* は羽根車の回転による流れと、羽根入口における境界条件によりきまる中心のうず Γ_0 による流れおよび連続の条件を満足する流れのそれぞれに対応する項から成り次式で与えられる。

$$\Psi^* = \int_{R_i}^{R_e} \frac{1}{2\pi R} \int_{R_i}^{R_e} 2\omega \sin \alpha \left(\frac{r}{RE} \right)^2 \cdot 2\pi R dR dR + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln R + (R \cdot \overline{W}_R) \Theta - C_1 \quad (25)$$

ここで $\overline{W}_R$ は半径 R の円周上の平均半径速度であり次式で与えられる。

$$\overline{W}_R = \frac{Q}{2\pi R - t_\theta N} \quad (26)$$

Ψ^* に対応する速度を次のように定義する。

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial R} = -U^*, \quad \frac{\partial \Psi^*}{R \partial \Theta} = -\overline{W}_R \quad (27)$$

Ψ_0 は次のようにラプラスの方程式を満足する。

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_0}{\partial R} = 0 \quad (28)$$

ポテンシャル流れの流れ関数 Ψ_0 は二次元円形翼列理論を適用して解くことができる⁽⁴⁾。 Ψ_0 に対応する速度を次のように定義する。

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial R} = -V_\theta, \quad \frac{\partial \Psi_0}{R \partial \Theta} = V_R \quad (29)$$

V_θ, V_R は、羽根をうず zu に置換えこのうずによる誘起速度と、式(27)に示される回転流れの速度および平均半径速度との和が羽根表面にそうようにうず分布を決定することにより求めることができる。

る。

物理面における速度 w_θ, w_w は、写像面の速度 $W_\theta = V_\theta - U^*, W_R = V_R + \overline{W}_R$ から次の式により求める。

$$\frac{w_\theta}{W_\theta} = \frac{w_w}{W_R} = \frac{R}{r} E \quad (30)$$

(3) 数値計算法

羽根車内の流れは基礎式(10)、(12)および(22)を差分方程式に置換えて数値計算により求める。そのための電子計算機プログラムのフローチャートを図3に示す。

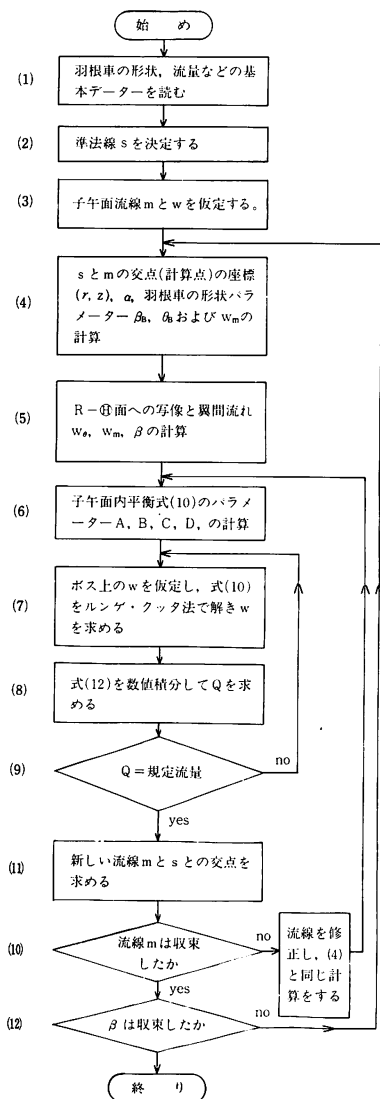


図-3 フローチャート

計算に用いた子午面流線の数 s は13本、座標線 s の数は17～22本、うず点の数は37個、参照点は9個である。また羽根間流れの計算に当っては、写像面の羽根中心線上に分布するうずが近接計算点に及ぼす特異性の影響をできるだけ避けるために、参照点および速度計算点の R 座標はすべてうずとうずの中間に位置するように決めて速度を計算し、その後に仮の計算点から求めるべき計算点へ値を移す方法をとった。

4 計算結果および考察

上述の方法に基づき、吸込性能の明らかな四種の羽根車（Ⅰ⁽⁵⁾、Ⅱ～Ⅳ⁽⁶⁾）について設計流量における流れの数値計算を行った。

(1) 速度分布

子午面流線の一例は図4に、子午面中央流線にそって流面の羽根間流線の一例は図5に、また羽根

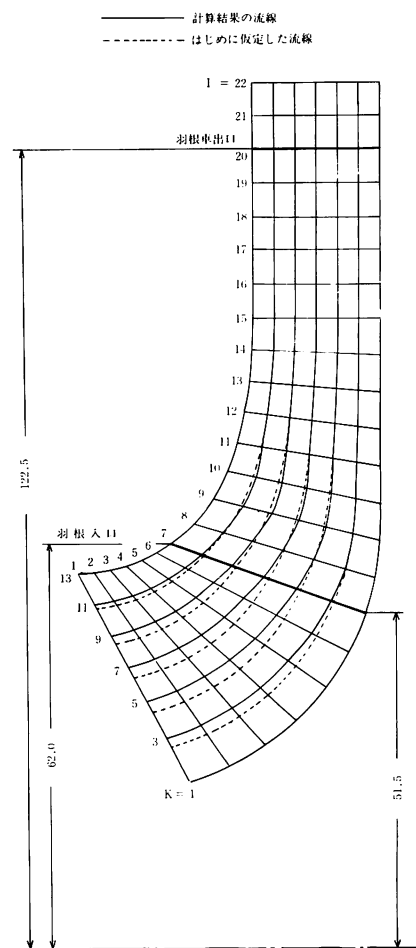


図-4 子午面内流線（ $Q=100\%$ ）

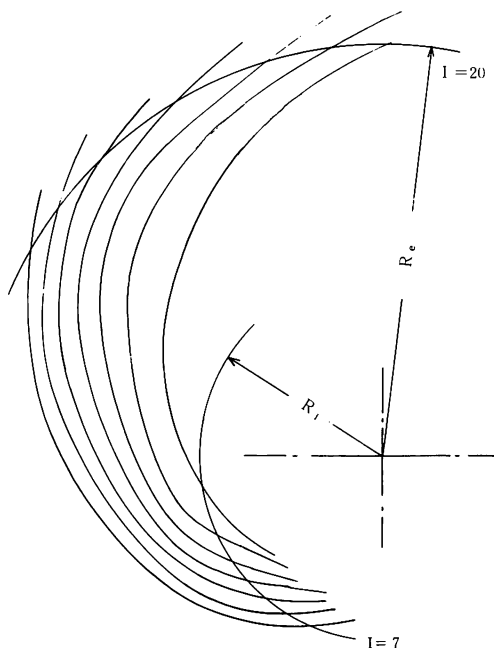


図-5 羽根間流線（中央、 $Q=100\%$ ）

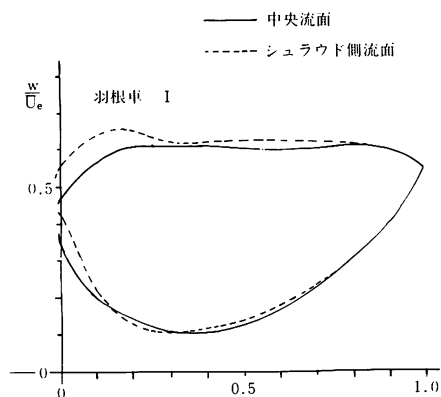


図-6(a) 相対速度分布

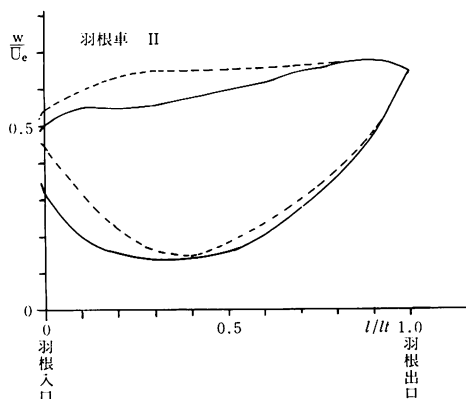


図-6(b) 相対速度分布

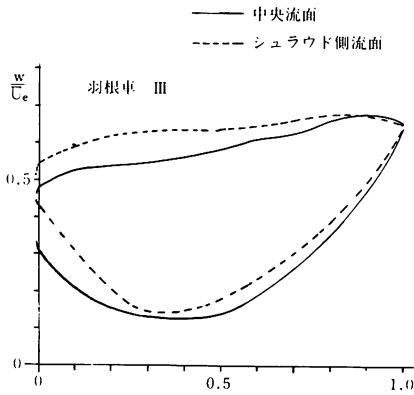


図-6(c) 相対速度分布

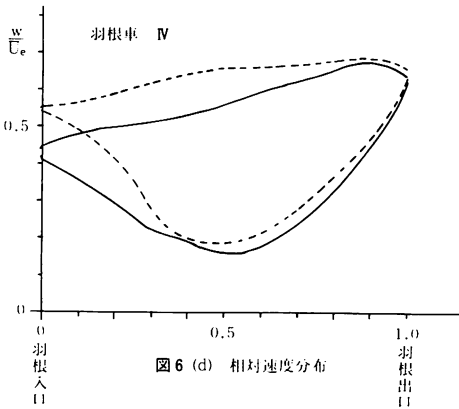


図-6(d) 相対速度分布

面にその相対速度分布を図6(a), 6(b), 6(c)および6(d)に示す。

(2) 圧力分布とキャビテーション発生状況

図7(a), 7(b), 7(c), 7(d)に羽根車I～IVについての羽根面圧力分布の計算結果を示す。図中静圧は次式により羽根車入口全圧 p_t を基準に、羽根入口最高点の周速度 U_a で無次元化した静圧係数で示した。

$$C_p = \frac{P - P_t}{\gamma \frac{U_a^2}{2g}} = \frac{1}{U_a^2} (U^2 - w^2 - 2U_i v_{\theta i}) \quad (31)$$

また同図には、実験によって得られたキャビテーションの初生点および揚程降下のはじまる点の正味吸込水頭をそれぞれ $NPSH_i$, $NPSH_c$ として静圧と同様に U_a で無次元化したキャビテーション係数 K_{ai} , K_{ac} をあわせて示してある。これによるとシュラウド側羽根入口付近にあらわれる羽根負圧側最低圧力点における圧力係数と初生キャビ

テーション係数とは、IVの羽根車を除いて比較的良好に一致しており、設計流量についての計算によるキャビテーション発生状況の予測の可能性を裏付けるものである。

図8は、羽根負圧側最低圧力点の圧力係数を計算キャビテーション係数として、これと実験値を比較して示したものである。これによると、初生点については一致の傾向がはっきり読みとれる

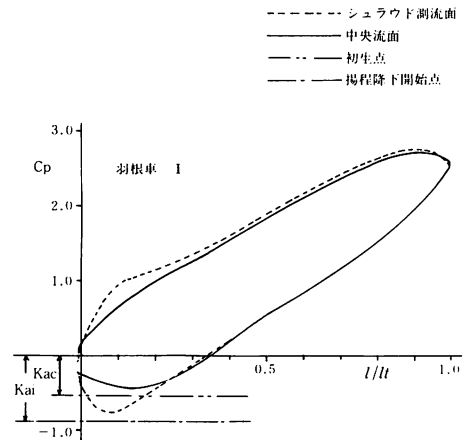


図-7(a) 圧力分布

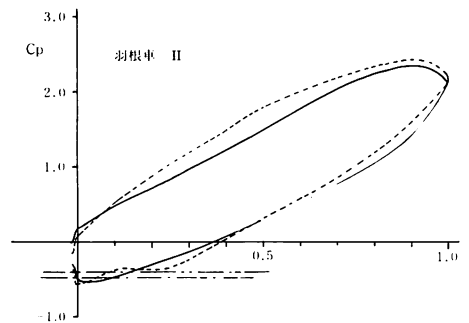


図-7(d) 圧力分布

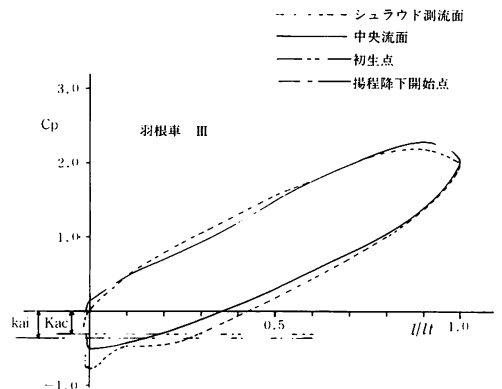


図-7(c) 圧力分布

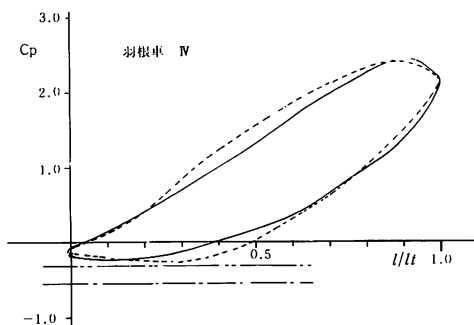


図-7(b)圧力分布

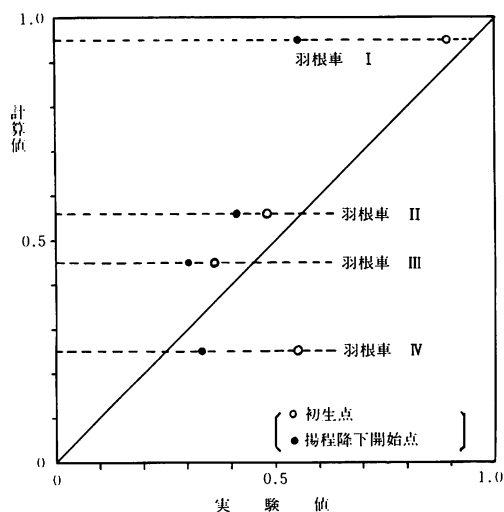


図-8 実験と計算によるキャビテーション係数

$$Ka \left(= \frac{NPSH}{Ua^2/2g} \right) \text{ の比較}$$

が、揚程降下開始点については実験値と計算値のはっきりした関連性を示唆するものはみられない。

5 結 言

うず巻ポンプ羽根車の流れ解析によって、正規流量について羽根面上の速度分布、圧力分布を求め、実験による吸込性能との関係をしらべた結果、計算によるキャビテーション発生状況の予測がかなりの程度まで実験結果と一致することが確かめられた。

数値計算には北海道大学大型電子計算機 FACOM-230/75 を使用した。

文 献

- (1) Katsanis, T., NA TN, D-2546 (1964)
- (2) Katanis, T., NA TN, D-4525 (1968)
- (3) 妹尾・中瀬, 日本機械学会論文集, 37-302 (昭46-10), 1927
- (4) 中瀬・妹尾, 日本機械学会論文集, 38-308 (昭47-4), 800
- (5) 原田・田島, 苫小牧高専紀要 No. 7, (昭47-3), 17
- (6) 南・ほか2名, 日本機械学会誌, 62-485 (昭34-6), 881

(昭和53年12月1日受理)

