移動荷重による半無限体内の変位，応力に関する一考察

中　辻　　　隆*
芳　村　　　仁**

A Study on Stersses and Displacements Produced in An Elatic half Plane by Moving Loads

Takashi NAKATUJI
Jin YOSHIMURA

要　旨

半無限弾性体上を移動する荷重による弾性体内の変位，応力はJ. ColeとJ. Huthが二次元問題に対しその厳密解を求めた[2]。三次元問題に対しては，L. Frybaがフーリェ変換の手法を用いて解[1]を求めたが，数値解を得るためには二重数値積分を施す必要がある。本解析においては，移動荷重を級数展開することにより，容易に三次元問題に対する変位および応力の数値解を得る事が出来たので報告したい。

また，半無限弾性体上を正弦波荷重が移動する問題について，文献(4)で二次元問題に対する解が得られているが，三次問題に対する数値解も併せて報告したい。

Synopsis

Stresses and displacements produced in an elastic half plane by moving loads were first obtained by J. Cole and J. Huth for the two dimensional problem. Solutions for the three dimensional probem were obtained by L. Fryba using the Fourier Transform Method. But, we can have the numerical solutions for the three-dimensinal problem only through the procedure of numerical integrations. In this report, we have indicated that the solutions can easily be obtained by Fourier-Transformation of moving loads.

Futhermore we refer to three dimensional stresses and disslacements produced by moving harmonic waves loads which were shown in reference (4) for the two dimensional problem.

1. 基礎方程式

x軸方向に荷重がcの等速度で移動している時荷重に添った慣性座標系での弾性の基礎方程式は

$$\begin{aligned}(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial x}+G\nabla^2 u&=\rho c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial y}+G\nabla^2 v&=\rho c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\\(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial z}+G\nabla^2 w&=\rho c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\end{aligned}\quad(1)$$

となる。[1] ここでu, v, wはそれぞれx, y, z方向の変位であり，λ，Gはラメの定数，ρは半無限弾性体の密度である。またeは体積ひずみを，∇^2はラプラス演算子を表わす。

変位u, v, wはスカラポテンシャルφとベクトルポテンシャル$\Omega(\omega_1;\omega_2,\omega_3)$を導入する事により

$$(u, v, w)=\mathrm{grad}\ \varphi+\mathrm{rot}\ \Omega \quad (2)$$

と表わすことが出来るのでrot $\Omega=\Psi(\psi_1,\psi_2,\psi_2)$として式(2)を式(1)に代入すると

$$\begin{aligned}\left[\nabla^2-M_1^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\varphi&=0\\\left[\nabla^2-M_2^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\psi_i&=0\ (i=1,2,3)\end{aligned}\quad(3)$$

* 助　手　土木工学科
** 教　授　北海道大学工学部土木工学科

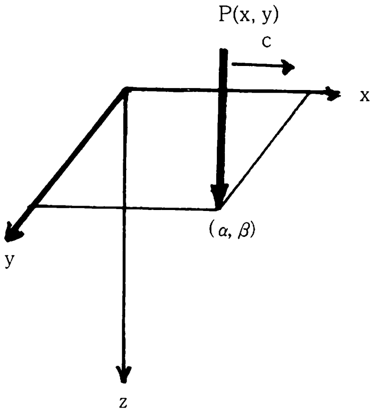

図１－１　任意点に作用する荷重

が得られる。ここで，M_1, M_2はそれぞれ，荷重の移動速度の変容波，回転波速度に対する比（マッハ数）である。

二重フーリェ変換を次のように定義する。

$$F(\xi,\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{i(\xi x+\eta y)}dxdy$$
$$f(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi,\eta)e^{-i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta \tag{4}$$

式(3)をx，yに関してフーリェ変換すると

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-n_1^2\Phi=0$$
$$\frac{\partial^2\Psi_i}{\partial z^2}-n_2^2\Psi_i=0\quad(i=1,2,3) \tag{5}$$

$$n_1^2=(1-M_1^2)\xi^2+\eta^2$$
$$n_2^2=(1-M_2^2)\xi^2+\eta^2 \tag{6}$$

となる。ここで，Φ，Ψ_iはそれぞれφ，ψ_iのフーリェ変換である。M_1，M_2のとる値によってn_1，n_2は実数や複素数となるが，本解析においては亜音速状態（$M_1<M_2<1$）のみを取り扱う。$z\to\infty$では，変位，応力とも０であるので(b)の解は

$$\Phi=A_4e^{-n_1z}$$
$$\Psi_i=A_ie^{-n_2z}\quad(i=1,2,3) \tag{7}$$

U, V, Wをフーリェ変換された変位そして，上に－を付けてフーリェ変換された応力を示すものとすると，弾性学の公式から

$$U=(-i\xi)A_4e^{-n_1z}+A_1e^{-n_2z}$$
$$V=(-i\eta)A_4e^{-n_1z}+A_2e^{-n_2z} \tag{8}$$
$$W=-n_1\quad A_4e^{-n_1z}+A_3e^{-n_2z}$$

$$\bar{\sigma}_x=-G[\{(M_2^2-2M_1^2)\xi^2+2\xi^2\}A_4e^{-n_1z}+2i\xi A_1e^{-n_2z}]$$
$$\bar{\sigma}_y=-G[\{(M_2^2-2M_1^2)\xi^2+2\eta^2\}A_4e^{-n_1z}+2i\eta A_2e^{-n_2z}]$$
$$\bar{\sigma}_z=\quad G[(\xi^2+\eta^2+n_2^2)A_4e^{-n_1z}-2n_2A_3e^{-n_2z}]$$
$$\bar{\tau}_{xy}=-G[2\xi n\quad A_4e^{-n_1z}+i(\eta A_1+\xi A_2)e^{-n_2z}] \tag{9}$$
$$\bar{\tau}_{yz}=\quad G[2i\eta n_1A_4e^{-n_1z}-(n_2A_2+i\eta A_3)e^{-n_2z}]$$
$$\bar{\tau}_{zx}=\quad G[2i\xi n_1A_4e^{-n_1z}-(n_2A_1+i\xi A_3)e^{-n_2z}]$$

が得られる。

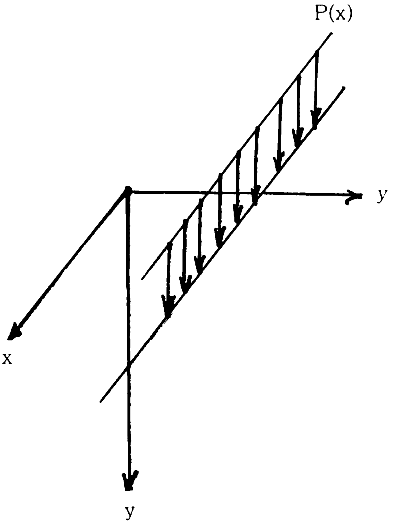

図１－２　平面ひずみ状態の荷重

境界条件

図１－１に示す様に半無限弾性体上の任意の点$x=\alpha, y=\beta$の地点に，大きさ$P(\alpha,\beta)$の集中荷重がz方向に作用する時境界条件は$z=0$で

$$\sigma_z=-P(\alpha,\beta)\,\delta(x-\alpha)\,\delta(y-\beta)$$
$$\tau_{yz}=\tau_{zx}=0 \tag{10}$$

ここで，$\delta(x)$，$\delta(y)$はデルタ関数である。式(10)をフーリェ変換すると次のようになる。

$$\bar{\sigma}_z=-P(\alpha,\beta)\,e^{i(\xi\alpha+\eta\beta)}$$
$$\bar{\tau}_{yz}=\bar{\tau}_{zx}=0 \tag{11}$$

式(9)と式(11)から$A_1\sim A_4$が決定されるので，変位，応力は次のように表わされている。

$$u = \frac{P(\alpha,\beta)}{4\pi^2 G}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\xi}{B}\,[(\xi^2+\eta^2+n_2^2) e^{-n_1 z}-2n_1 n_2 e^{-n_2 z}]\,e^{-i\{\xi(x-\alpha)+\eta(y-\beta)\}} d\xi\, d\eta$$

$$v = \frac{P(\alpha,\beta)}{4\pi^2 G}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\eta}{B}\,[(\xi^2+\eta^2+n_2^2) e^{-n_1 z}-2n_1 n_2 e^{-n_2 z}]\,e^{-i\{\xi(x-\alpha)+\eta(y-\beta)\}} d\xi d\eta$$

$$w = \frac{P(\alpha,\beta)}{4\pi^2 G}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n_1}{B}\,[(\xi^2+\eta^2+n_2^2) e^{-n_1 z}-2(\xi^2+\eta^2)e^{-n_2 z}]\,e^{-i\{\xi(x-\alpha)+\eta(y-\beta)\}} d\xi d\eta \qquad (12)$$

$$\sigma_x = \frac{P(\alpha,\beta)}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{B}\,[\{2\xi^2-(2M_1^2-M_2^2)\xi^2\}(\xi^2+\eta^2+n_2^2)e^{-n_1 z}-4\eta^2 n_1 n_2 e^{-n_2 z}]\,e^{-i\{\xi(x-\alpha)+\eta(y-\beta)\}} d\xi\, d\eta$$

$$\sigma_y = \frac{P(\alpha,\beta)}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{B}\,[\{2\eta^2-(2M_1^2-M_2^2)\xi^2\}(\xi^2+\eta^2+n_2^2)e^{-n_1 z}-4\eta^2 n_1 n_2 e^{-n_2 z}]\,e^{-i\{\xi(x-\alpha)+\eta(y-\beta)\}} d\xi d\eta$$

$$\sigma_z = -\frac{P(\alpha,\beta)}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{B}\,[(\xi^2+\eta^2+n_2^2)^2 e^{-n_1 z}-4n_1 n_2(\xi^2+\eta^2)e^{-n_2 z}]\,e^{-i\{\xi(x-\alpha)+\eta(y-\beta)\}} d\xi d\eta$$

$$\tau_{xy} = \frac{P(\alpha,\beta)}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\xi\eta}{B}[(\xi^2+\eta^2+n_2^2)e^{-n_1 z}-2n_1 n_2 e^{-n_2 z}]\,e^{-i\{\xi(x-\alpha)+\eta(y-\beta)\}} d\xi d\eta$$

$$\tau_{yz} = -\frac{P(\alpha,\beta)}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2i\eta n_1}{B}\,(\xi^2+\eta^2+n_2^2)[e^{-n_1 z}-e^{-n_2 z}]\,e^{-i\{\xi(x-\alpha)+\eta(y-\beta)\}} d\xi d\eta$$

$$\tau_{zx} = -\frac{P(\alpha,\beta)}{4\pi^2 G}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2i\xi n_1}{\beta}\,(\xi^2+\eta^2+n_2^2)[e^{-n_1 z}-e^{-n_2 z}]\,e^{-i\{\xi(x-\alpha)+\eta(y-\beta)\}} d\xi d\eta \qquad (13)$$

ここで

$$B=(\xi^2+\eta^2+n_2^2)^2-4n_1 n_2(\xi^2+\eta^2) \qquad (14)$$

必要に応じて，α，β に関して積分すると，表面上に作用する任意の分布荷重に対する変位，応力式を導くことができる。なお，式(12)，(13)において $\alpha=\beta=0$ とおいたのが L,Frýbn の求めた解であることは言を待たない。

以下の解析のために二，三の例をあげる。

(a) 平面ひずみ（図1－2）

式(12)，(13)において，$P(x,y)=P(x)$ とおき β に関して $-\infty$ から $+\infty$ まで積分すると

$$u = \frac{P(\alpha)}{2\pi G}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\xi}{B}[(\xi^2+n_2^2)e^{-n_1 z}-2n_1 n_2 e^{-n_2 z}]\,e^{-i\xi(x-\alpha)}d\xi$$

$$w = \frac{P(\alpha)}{2\pi G}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n_1}{B}[(\xi^2+n_2^2)e^{-n_1 z}-2\xi^2 e^{-n_2 z}]\,e^{-i\xi(x-\alpha)}d\xi \qquad (15)$$

$$\sigma_x = \frac{P(\alpha)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{B}\,[\{2\xi^2-(2M_1^2-M_2^2)\xi^2\}(\xi^2+n_2^2)e^{-n_1 z}-4\xi^2 n_1 n_2 e^{-n_2 z}]\,e^{-i\xi(x-\alpha)}d\xi$$

$$\sigma_z = -\frac{P(\alpha)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{B}\,[(\xi^2+n_2^2)^2 e^{-n_1 z}-4n_1 n_2 \xi^2 e^{-n_2 z}]\,e^{-i\xi(x-\alpha)}d\xi$$

$$\tau_{zx} = -\frac{P(\alpha)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2i\xi n_1}{B}(\xi^2+n_2^2)\,[e^{-n_1 z}-e^{-n_2 z}]\,e^{-i\xi(x-\alpha)}d\xi \qquad (16)$$

ここで

$$n_1^2=(1-M_1^2)\xi^2=m_1^2\xi^2,\ n_2^2=(1-M_2^2)\xi^2=m_2^2\xi^2 \qquad (17)$$

$$B=(\xi^2+n_2^2)^2-4n_1 n_2\xi^2=\xi^4[(2-M_2^2)^2-4m_1 m_2] \qquad (18)$$

今 $\alpha=0$ として ξ に関し積分すると J.CoLe と J. Huth の求めた解となる。即ち

$$u = \frac{P}{\pi G}[K_2 \ln r_1 - m_2 K_1 \ln r_2]$$
$$w = \frac{P}{\pi G}[m_1 K_2(\pi-\theta_1)-K_1(\pi-\theta_2)] \qquad (19)$$

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi}[(2-2M_1^2+M_2^2)K_2\frac{x}{r_1^2}-2m_2 K_1\frac{x}{r_2^2}]$$
$$\sigma_z = -\frac{P}{\pi}\,2m_2 K_1[\frac{x}{r_1^2}-\frac{x}{r_2^2}] \qquad (20)$$
$$\tau_{xz} = \frac{P}{\pi}[2m_1 K_2\frac{a_1 z}{r_1^2}-(2-M_2^2)K_1\frac{m_2 z}{r_2^2}]$$

ここに

$$K_1=\frac{2-M_2^2}{(2-M_2^2)^2-4m_1 m_2}$$
$$K_2=\frac{2m_2}{(2-M_2^2)^2-4m_1 m_2} \qquad (21)$$

$$r_1^2=x^2+m_1^2 z^2,\qquad r_2^2=x^2+m_2^2 z^2$$
$$\theta_1=\arg(x+i m_1 z),\ \theta_2=\arg(x+i m_2 z) \qquad (22)$$

(b) x 軸方向に正弦波荷重が作用する時（図1－3）

式(12)，(13)において $P(x,y)=Qe^{-ikx}$ とおき，α に関し $-\infty$ から $+\infty$ まで積分する。

$$u = \frac{Qe^{-ikx}}{2\pi G}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ik}{B}\,[(k^2+\eta^2+n_2^2) e^{-n_1 z}-2n_1 n_2 e^{-n_2 z}]\,e^{-i\eta(y-\beta)}d\eta$$

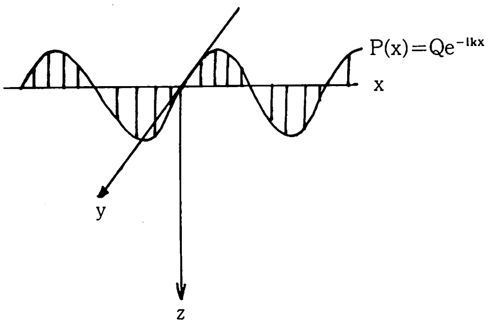

図1－3 x方向正弦波荷重

$$v = \frac{Qe^{-ikx}}{2\pi G}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\eta}{B}[(k^2+\eta^2+n_2^2)e^{-n_1 z} -2n_1 n_2 e^{-n_2 z}]e^{-i\eta(y-\beta)}d\eta \quad (23)$$

$$w = \frac{Qe^{-ikx}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n_1}{B}[(k^2+\eta^2+n_2^2)e^{-n_1 z} - 2(k^2+\eta^2)e^{-n_2 z}]e^{-i\eta(y-\beta)}d\eta$$

$$\sigma_x = \frac{Qe^{-ikx}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{B}[\{2k^2 -(2M_1^2-M_2^2)k^2\}(k^2+\eta^2+n_2^2)e^{-n_1 z} - 4k^2 n_1 n_2 e^{-n_2 z}]e^{-i\eta(y-\beta)}d\eta$$

$$\sigma_y = \frac{Qe^{-ikx}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{B}[\{2\eta^2 -(2M_1^2-M_2^2)k^2\}(k^2+\eta^2+n_2^2)e^{-n_1 z} - 4\eta^2 n n_2 e^{-n_2 z}]e^{-i\eta(y-\beta)}d\eta$$

$$\sigma_z = -\frac{Qe^{-ikx}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{B}[(k^2+\eta^2+n_2^2)^2 e^{-n_1 z} - 4n_1 n_2(k^2+\eta^2)e^{-n_2 z}]e^{-i\eta(y-\beta)}d\xi \quad (24)$$

$$\tau_{xy} = \frac{Qe^{-ikx}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2k\eta}{B}[(k^2+\eta^2+n_2^2)e^{-n_1 z} - 2n_1 n_2 e^{-n_2 z}]e^{-i\eta(y-\beta)}d\eta$$

$$\tau_{yz} = -\frac{Qe^{-ikx}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2i\eta n_1}{B}(k^2+\eta^2+n_2^2)[e^{-n_1 z} - e^{-n_2 z}]e^{-i\eta(y-\beta)}d\eta$$

$$\tau_{zx} = -\frac{Qe^{-ikx}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2ikn_1}{B}(k^2+\eta^2+n_2^2)[e^{-n_1 z} - e^{-n_2 z}]e^{-i\eta(y-\beta)}d\eta \quad (25)$$

ここで

$$B = (k^2+\eta^2+n_2^2)^2 - 4n_1 n_2(k^2+\eta^2) \quad (25)$$

$$n_1^2 = (1-M_1^2)k^2+\eta^2,\ n_2^2 = (1-M_2^2)k^2+\eta^2 \quad (26)$$

二次元の正弦波荷重が作用する時には，式(23)(24)において(a)と同様にβに関して積分すると文献(4)で求られた解となる。

$$u = \frac{Q}{G}\frac{ie^{-ikx}}{k}[K_1 e^{-m_1 kz} - m_2 K_3 e^{-m_2 kz}]$$

$$w = \frac{Q}{G}\frac{e^{-ikx}}{k}[m_1 K_1 e^{-m_1 kz} - K_3 e^{-m_2 kz}] \quad (27)$$

$$\sigma_x = Qe^{-ikx}[(2-2M_1^2+M_2^2)K_1 e^{-m_1 kz} - 2m_2 K_3 e^{-m_2 kz}]$$

$$\sigma_z = -Qe^{-ikx}[(2-M_2^2)K_1 e^{-m_1 kz} - 2m_2 K_3 e^{-m_2 kz}]$$

$$\tau_{zx} = -Qe^{-ikx}\times 2m_1 K_1[e^{-m_1 kz} - e^{-m_2 kz}] \quad (28)$$

ここで

$$K_3 = \frac{2m_1}{(2-M_2^2)^2 - 4m_1 m_2} \quad (29)$$

(c) x軸，y軸方向に正弦波荷重が作用する時（図1－4）。

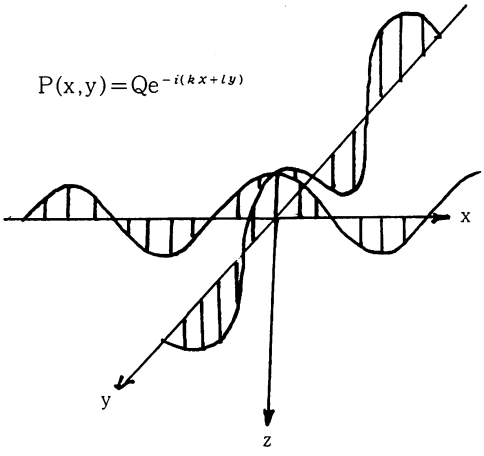

図1－4 x方向，y方向正弦波荷重

式(12)，(13)において$P(x,y)=Qe^{-i(kx+ly)}$とおきαとβに関し積分を行う。

$$u = \frac{Q}{G}\times\frac{ik}{B}[(k^2+l^2+n_2^2)e^{-n_1 z} - 2n_1 n_2 e^{-n_2 z}]e^{-i(kx+ly)}$$

$$v = \frac{Q}{G}\times\frac{il}{B}[(k^2+l^2+n_2^2)e^{-n_1 z} - 2n_1 n_2 e^{-n_2 z}]e^{-i(kx+ly)} \quad (30)$$

$$w = \frac{Q}{G}\times\frac{n_1}{B}\,[(k^2+l^2+n_2^2)e^{-n_1z} - 2(k^2+l^2)e^{-n_2z}]e^{-i(kx+ly)}$$

$$\sigma_x = Q\times\frac{1}{B}[\{2k^2-(2M_1^2 - M_2^2)k^2\}(k^2+l^2+n_2^2)e^{-n_1z} - 4k^2n_1n_2e^{-n_2z}]e^{-i(x+ly)}$$

$$\sigma_y = Q\times\frac{1}{B}[\{2l^2-(2M_1^2 - M_2^2)k^2\}|(k^2+l^2+n_2^2)e^{-n_1z} - 4l^2n_1n_2e^{-n_2z}]e^{-x(kx+ly)}$$

$$\sigma_z = -Q\times\frac{1}{B}[(k^2+l^2+n_2^2)^2e^{-n_1z} - 4n_1n_2(k^2+l^2)e^{-n_2z}]e^{-i(kx+ly)}$$

$$\tau_{xy} = Q\times\frac{2kl}{B}[(k^2+l^2+n_2^2)e^{-n_1z} - 2n_1n_2e^{-n_2z}]e^{-i(kx+ly)}$$

$$\tau_{yz} = -Q\times\frac{2i\,l\,n_1}{B}(k^2+l^2+n_2^2)[e^{-n_1z} - e^{-n_2z}]e^{-i(kx+ly)}$$

$$\tau_{zx} = -Q\times\frac{2i\,k\,n_1}{B}(k^2+l^2+n_2^2)[e^{-n_1z} - e^{-n_2z}]e^{-i(kx+ly)} \quad (31)$$

ここで

$$B = (k^2+l^2+n_2^2)^2 - 4n_1n_2(k^2+l^2) \quad (32)$$

$$n_1^2 = (1-M_1^2)k^2+l^2,\ n_2^2 = (1-M_2^2)k^2+l^2 \quad (33)$$

2. 数 値 計 算

(a) 集中荷重　式(13), (14)において数値積分をして求める事が出来るが，ここでは，荷重から十分離れた位置ではその影響は無視出来るので，荷重を正弦フーリェ級数展開することにより，式(30), (31)を用い数値解を求めてみた。

これにより，直接二重逆変換積分を行なうのに比し計算機の演算時間を大きく節約する事が出来た図2－1の位置にある集中荷重を正弦級数展開すると次式の様になる。

$$P(x,y) = \frac{4Q}{ab}\sum_{I=1,3,5\ldots}^{\infty}\sum_{J=1,3,5}^{\infty}(-1)^{\left(\frac{J-1}{2}\right)}(-1)^{\left(\frac{I-1}{1}\right)}\sin\frac{I\pi}{a}x\,\sin\frac{J\pi}{b} \quad (34)$$

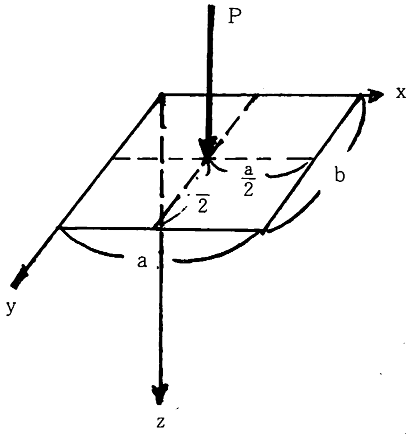

図2－1　集中荷重のフーリエ級数展開

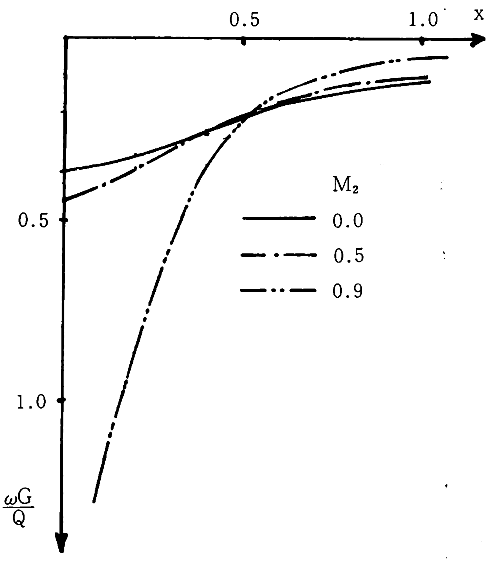

図2－2　鉛直方向変位

図2－2～図2－4に，M_2をパラメータとした時の$y=0.0$, $z=0.5$の位置における変位w，応力σ_zそしてτ_{zx}の値を示した。図の横軸は荷重作用点からの距離で，また$M_2=0$は静的問題に対するBoussinesq解である。

表2－1に，集中荷重の級数展開による影響を調べるために，変位wと応力σ_zに関して，荷重周期$(2a=2b)$の値を変化させてみたものである。

$a=\infty$は二重フーリェ積分の結果を表わす。

(b) x軸上の正弦波荷重（図1－4において$\beta=0$）

図2－5～図2－10に，式(23), (24)を用い，変化wと応力σ_xそしてσ_zの振幅の深さ方向の変化を調べてみた。図2－5～図2－7においては，M_2を一定と

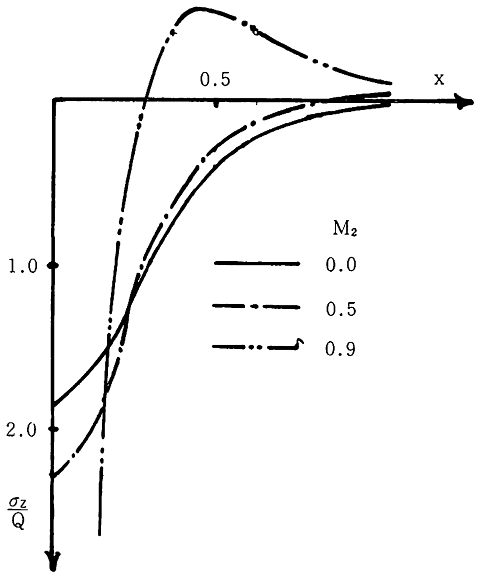

図2－3 直応力

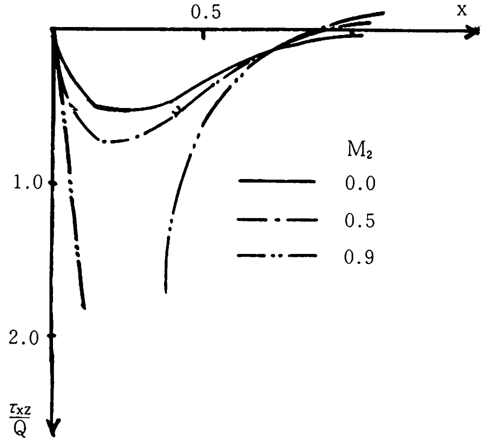

図2－4 せん断応力

表2-1 応力，変位に対する級数展開周期の影響
(M_2=0.1, x=0.0, y=0.0, z=0.5)

a=b	σz	ω
2	1.915	0.286
4	1.920	0.330
6	1.920	0.345
8	1.920	0.352
20	1.920	0.365
30	1.920	0.368
50	1.920	0.370
∞	1.920	—

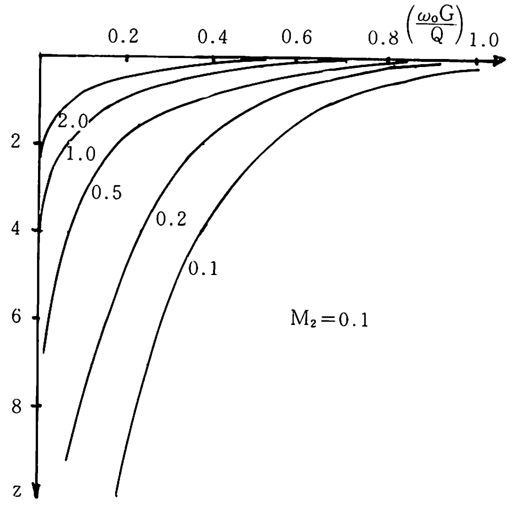

図2－5 変位に対する荷重波長の影響

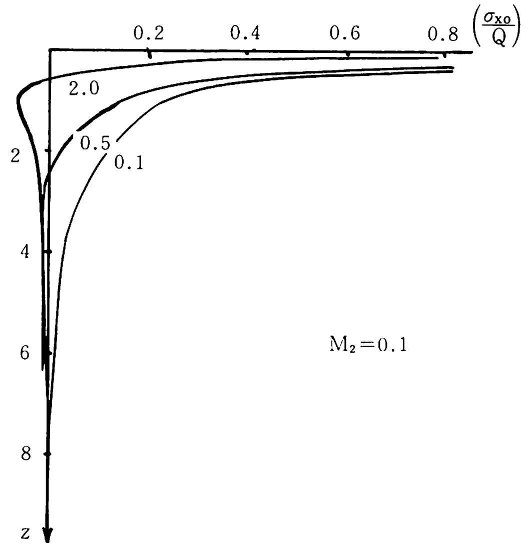

図2－6 直応力に対する荷重波長の影響(1)

してkの値を変え，図2－8～図2－10においてはkの値を一定にしてM_2の値を変えてみた。

3. まとめ

図2－2～図2－4を見ると，$M_2 \ll 1$ である場合には，変位，応力とも静的解と大差ないことがわかる。回転波の速度は数km/sであるから，通常の物的移動荷重では，M_2の値は，高々0.01～0.1程度であり，移動速度による変位，応力への影響はほとんど影響ないことがわかる。

これは，本解析で求めた解が，荷重の移動によ

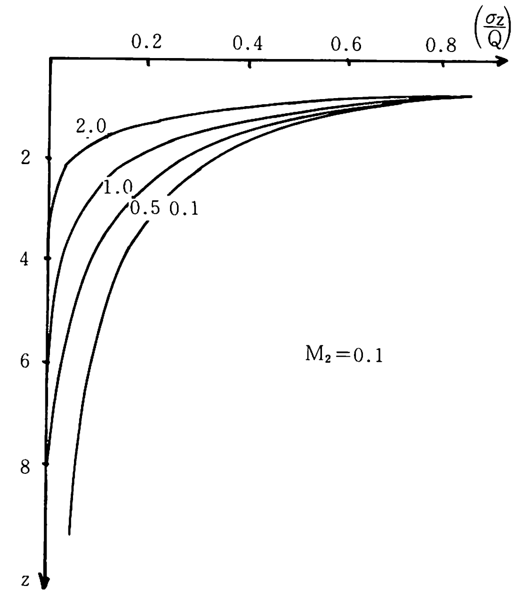

図2－7　直応力に対する荷重波長の影響(2)

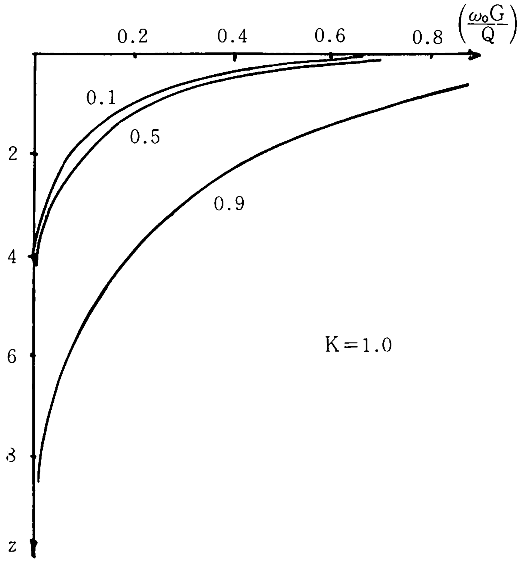

図2－8　変位に対する移動速度の影響

って生起する弾性波によるじょう乱が通過した後のいわば定常状態を仮定している事に帰因すると思われる。[(5)(6)]

図2－5～図2－7において，k の値が大きい程，すなわち，荷重波の波長が小さい程深さ方向への減衰がはやいことが示されている。また，図２－８～図２－10においては，集中荷重同様$M_2 \ll 1$では，M_2 の値のによって大きな差異は生じないが

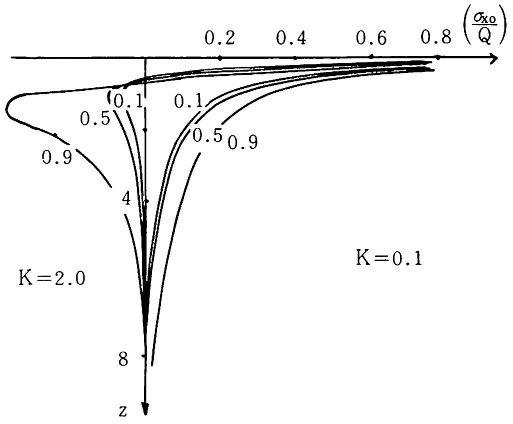

図2－9　直応力に対する移動速度の影響(1)

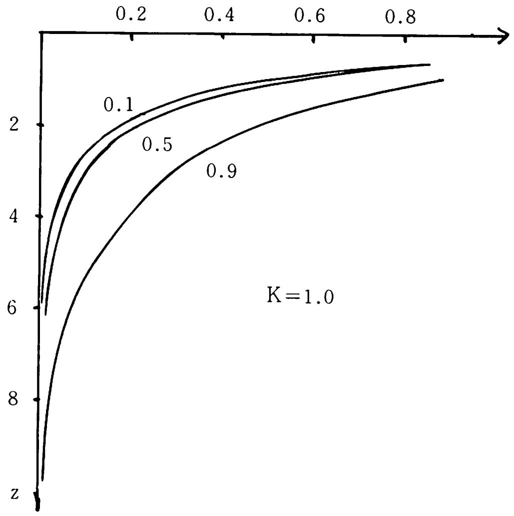

図2－10　直応力に対する移動速度の影響(2)

M_2の値が小さい程，すなわち，移動速度が小さいか，剪断ヤング率が大きいか，あるいは弾性体の密度が小さい程深さ方向への減衰ははやいことがわかる。

今後の課題として剪断走行荷重の問題，層毎に弾性定数が異なる多層問題，あるいは走行荷重によるばねの影響等について検討してみたい。

参　考　文　献

1．L. Fyba ; "Vibration of Solids and Structures under Moving Loads", Noordhoff Int-Publ

2．J. Cole & J. Huth ; "Stresses Porduced in a Half Plane by Moving Load", Trans. ASME, Journ. of AM, Dec. 1958

3. Sneddon ; "Fourier Transform", Mc Graw Hill, 1951
4. 岡本舜三;"建設技術者のための振動学", オーム社, 昭42
5. Y. C. Fung, 大橋義夫他訳;"固体の力学", 培風館, 昭45
6. Lamb, H ;, "On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid", Phil. Trans. Roy. Soc. (London)A, vol 203, 1904
7. Ewing, Jardetsky & Press ; "Elastic Waves in Layeved Media", Mcgraw-Hill, 1956
8. Gakenheimer, Miklowitz ; "Transient Excitation of an Elastic Half Space by a Point Load Traveling on the Surface", Jour. of Appl. Mech., sep. 1969
9. 佐藤泰夫, 力武常次;"矩形移動荷重による半無限弾性体表面の変形", 地震, vol. 14, No. 5, 1942
10. Niwa, Kobayashi ; "Stresses Produced in a Half Plane by Moving Loads along its Surface", Memo. Facult. Eng., Kyoto Univ., 1966
11. 中辻, 芳村;"移動荷重による半無限体内の変位, 応力に関する一考察", 第30回土木学会全国学術講演概要集, 第I部門, 1975

(昭和53年11月30日受理)