3次元ランダムデータに対する Spline 補間

林　　雄　二*

Spline Interpolation to 3-dimentional Data at Random Points

Yuji HAYASHI

要　旨

多次元データの補間として，多変数 Spline 関数による方法は従来から研究されているが，一般に格子点に与えられた分点に対する補間しか行なえない。著者は，多次元にランダムに分布している分点に対する補間法として，Spline 関数を反復適用する方法を開発した。二変数の場合について実験した結果では，従来の二変数 Spline 関数による方法と比べてほぼ同程度の精度の補間値が求められた。

Synopsis

The method of multivariate spline function for multi-dimentional interpolation has been still investigated, but this method can interpolate only for mesh-point data.

In this paper, the mew method of interpolation to data at random-point is described. This method is constructed by repeating to apply the spline functions. For the case of bivariate, the precision of the values by this interpolation method is as fine as that of the values by the bivariate spline interpolation.

1. は じ め に

Spline 関数は，データの補間をなめらかに行なう意味で有効であり，近年詳細に研究されている。それにともない，1変数の Spline 関数のみならず，一般に n 変数の Spline 関係についても，補間アルゴリズムや誤差解析が求められている。通常の多変数の Spline 関数による補間では，与えられる分点は格子点になければならない。しかし，多次元データの補間を行なう場合には，必ずしも分点が格子点に与えられているとは限らず，ランダムに分布している分点から補間式や補間値を求めたい場合が多々ある。著者は，このような目的から，多次元空間に不規則に分布している分点に対する補間の手法を開発した。これは，Spline 関数による補間を拡張したものであり，1変数補間 Spline から出発し，2変数，3変数と順次構成していくものである。本論文では，第2章に，従来からの補間 Spline についての紹介をし，第3章において，著者の開発した反復 Spline の手法を報告し，第4章において，二変数の場合について，従来からの方法と，反復 Spline の方法による結果の比較を行なう。

2. 補間 Spline

本章では補間 Spline[4] を紹介する。ここに述べられる一変数補間 Spline により，次章において反復 Spline を構成し，多変数補間 Spline との比較が第4章でなされる。

一般に，区間Πで定義されたn階連続微分可能な関数の全体を$C^n(\Pi)$で表わす。点列 $X=\{x^{(j)}\}_{(j=0,1,\cdots,n)}$が，$x^{(j-1)}<x^{(j)}{}_{(j=1,2,\cdots,n)}$ を満足するとき，$\Pi=[x^{(0)},x^{(n)}]$の各区間$[x^{(j-1)},x^{(j)}]$ において高々3次の区分的多項式の全体を，$P^2[\Pi,X]$とする。さらに，

$$H^2[\Pi,X]\equiv C^2(\Pi)\cap P^2[\Pi,X]$$

と定義しておく。

区間$\Pi=[a,b]$における分点$a=x^{(0)}<x^{(1)}<\cdots<x^{(n)}=b$から成る点列を，$X=\{x^{(j)}\}_{(j=0,1,\cdots,n)}$とし，

* 助教授　機械工学科

これらの分点における関数値 $y^{(j)}$から得られる点列Y_Xを，

$$Y_X \equiv \{(x^{(j)}, y^{(j)})\}_{(j=0,1,\cdots,n)}$$

と定義する。このとき，以下の条件

$$S_1(x^{(j)}) = y^{(j)} \quad (j=0,1,\cdots,n)$$
$$S_1''(x^{(0)}) = S_1''(x^{(n)}) = 0$$
$$S_1(x) \in H^2[\Pi, X]$$

を満足する関数$S_1(x)$は唯一つ存在する。[4] この$S_1(x)$を，Y_X上の一変数（3次自然）補間Splineと呼ぶ。

点列Xに対し，$h^{(k)} = x^{(k)} - x^{(k-1)}$ とおくとき，Y_X上の一変数補間Splineは，

$$S_1(x) = \frac{s^{k-1}}{6h^{(k)}}(x^{(k)} - x)^3 + \frac{s^k}{6h^{(k)}}(x - x^{(k-1)})^3 + \frac{(x^{(k)} - x)}{h^{(k)}}\left(y^{(k-1)} - \frac{s_{k-1}h^{(k)2}}{6}\right) + \frac{(x - x^{(k-1)})}{h^{(k)}}\left(y^{(k)} - \frac{s_k h^{(k)2}}{6}\right) \quad (x^{(k-1)} \leqq x \leqq x^{(k)})$$

と表わされるが，この$s_k(x^{(k)}$における二階微分係数に相当）を定めると，

$$s_k = \sum_{j=0}^{n} d_j(x) y^{(j)}$$

と表わされ，結局$S_1(x)$は$y^{(j)}$ の一次結合で表現されることになる。

$$S_1(x) = \sum_{j=0}^{n} C^{(j)}(x) y^{(j)}$$

これによって，以下の如くn変数補間 Spline への拡張が可能となる。[3]

$n+1$次元ユークリッド空間におけるデータ点を，

$$\{(x_1^{(i1)}, x_2^{(i2)}, \cdots, x_n^{(in)}, x_{n+1}^{(i)}) \mid i_l = 0,1,\cdots,m_l;\ l = 1,2,\cdots,n;\ i = (i_1, i_2, \cdots, i_n)\}$$

ただし $x_k^{(t-1)} < x_k^{(t)}$ $(t=1,2,\cdots,m_k; k=1,\cdots,n)$ とする。任意の$i=(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ $(0 \leqq i_l \leqq m_l)$に対し，

$$X_l^{(i)} \equiv \{(x_1^{(i1)}, x_2^{(i2)}, \cdots, x_{l-1}^{(il-1)}, x_l^{(k)}, x_{l+1}^{(il+1)}, \cdots, x_{n+1}^{(i')}) \mid k = 0,1,\cdots,m_l; i' = (i_1, \cdots, i_{l-1}, \cdots, i_n)\} \quad (l = 1,2,\cdots,n)$$

と表わし，

$Y_l^{(i)} \equiv \{(x_l^{(k)}, x_{n+1}^{(i')}) \mid k = 0,1,\cdots,m_l; i' = (i_1, \cdots, i_{l-1}, k, i_{l+1}, \cdots, i_n\}$ とする。このとき，$Y_l^{(i)}$上の一変数補間 Spline は，

$$S_1^{(i)l}(x_l) = \sum_{k=0}^{m_l} C_l^{(k)}(x_l) x_{n+1}^{(i')}$$

で表わされることになる。そこで，

$$S_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv \sum_{i1=0}^{m1} \sum_{i2=0}^{m2} \cdots \sum_{in=0}^{mn} C_1^{(i1)}(x_1) C_2^{(i2)}(x_2) \cdots C_n^{(in)}(x_n) x_{n+1}^{(i)}$$

とおくことにより，格子点で与えられた分点$(x_1^{(i1)}, x_2^{(i2)}, \cdots, x_n^{(in)})$において関数値$x_{n+1}^{(i)}$ $(i=(i_1, i_2, \cdots, i_n))$をとる$n$変数3次補間Splineが得られる。

3. 反復 Spline

本章では，$n+1$次元ユークリッド空間に与えられた不規則分布データ点に対する補間の方法を述べる。

n個の正整数 m_i $(i=1,2,\cdots,n)$に対し，m_i 以下の非負整数の集合を M_iとしておく，このとき，

$$I \equiv M_1 \times M_2 \times \cdots\cdots\cdots \times M_n$$

とし，$I \ni {}^\forall i = (i_1, i_2, \cdots, i_k, \cdots, i_n)$ に対し，

$$(i)_k \equiv i_k$$

としておく。また$\widetilde{M}_i = M_i \cup \{*\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$とおくとき，

$$\Omega \ \equiv \widetilde{M}_1 \times \widetilde{M}_2 \times \cdots\cdots \times \widetilde{M}_n$$
$$\Omega_p^1 \equiv \{i \mid (i)_p = *; i \in \Omega\}$$
$$\Omega_{pq}^2 \equiv \{i \mid (i)_p = (i)_q = *; i \in \Omega\}$$

等とし，一般に

$$\Omega_{p_1 \cdots p_k}^k \equiv \{i \mid (i)_{p_j} = *; j = 1,2,\cdots,k; i \in \Omega\}$$

とする。

$n+1$次元空間に与えられた$|I|$個のデータ点を，

$$\{(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)}, x_{n+1}^{(i)}) \mid i \in I\}$$

ただし，$x_k^{(i)} < x_k^{(j)}$ for $(i)_k < (j)_k$; $k=1,2,\cdots n$ とする。

以上の準備の下に，反復 Spline を帰納的に定義する。

1) 任意のk $(1 \leqq k \leqq n)$及び任意の$i=(i_1,\cdots,i_{k-1},*,i_{k+1},\cdots,i_n) \in \Omega_k^1$に対し，点列

$$X_{kl}^{(i)} \equiv \{(x_k^{(i_1,\cdots,i_{k-1},s,i_{k+1},\cdots i_n)}, x_l^{(i_1,\cdots,i_{k-1},s,i_{k+1},\cdots,i_n)}) \mid s = 0,1,\cdots,m_k\} \quad (l \neq k)$$

を定めるとき，$X_{kl}^{(i)}$上の一変数補間 Splineが求まる。これを

$$S_1^{(i)l}(x_k)$$

で表わし，1変数反復Splineと呼ぶ。

2) $\Omega_{l1\cdots lk}^{k} \ni {}^{\forall}\gamma$ に対し，γ_jを

$$(\gamma_j)_{lj} \neq *$$
$$(\gamma_j)_t = (\gamma)_t \quad (t \neq l_j)$$

なる要素を表わすことにする。

このようなγ_j及び$\lambda(\neq l_1,\cdots,l_k)$に対し$k-1$変数反復Splineが得られる。これを

$$S_{k-1}^{(\gamma j)lj}(x_{l1},\cdots,x_{lj-1},x_{lj+1},\cdots,x_{lk})$$

で表わす。

$L_k \equiv \{l_1,\cdots,l_k\}$とし，$\sigma \in L_k$及び$\delta \in \{1,2,\cdots,n,n+1\}-L_k$に対し，点列

$$\{(S_{k-1}^{(\mu)\sigma}(x_{l1},\cdots,x_{\sigma-1},x_{\sigma+1},\cdots,x_{lk}),$$
$$S_{k-1}^{(\mu)\delta}(x_{l1},\cdots,x_{\sigma-1},x_{\sigma+1},\cdots,x_{lk}))$$
$$|(\mu)_\sigma=0,1,\cdots,m_\sigma;(\mu)_t=(\gamma)_t(t\neq\sigma)\}$$

を考えると，この点列上の補間Splineが得られるが，これはk変数となる。これを

$$T_{k,\sigma}^{(\gamma)\delta}(x_{l1},\cdots,x_\sigma,\cdots,x_{lk})$$

で表わす。このとき，k変数反復Splineを

$$S_k^{(i)\delta}(x_{l1},\cdots,x_{lk}) \equiv \frac{1}{k}\sum_{\sigma\in L_k} T_{k,\sigma}^{(\gamma)\delta}(x_{l_1},\cdots,x_\sigma,\cdots,x_{l_k})$$

で定義する。

上記1), 2) によって帰納的に定義された反復Splineは最終的に，$\gamma=(*,*,\cdots,*)$に対し，

$$S_n^{(\gamma)n+1}(x_1,\cdots,x_n)$$

を得る。これが，$I \ni {}^{\forall}i$ に対し

$$S_n^{(\gamma)n+1}(x_1^{(i)},\cdots,x_n^{(i)}) = x_{n+1}^{(i)}$$

を満たす補間多項式であることは，導き方から明らかである。

この反復Splineは，二変数の場合については，以下のような手続きによって補間することを意味している。

3次元空間において，3×2個のランダムに分布したデータ点

$$P_{ij}=(x_1^{(i,j)},x_2^{(i,j)},x_3^{(i,j)})\ (i=1,2,3;j=1,2)$$

を考える。

$i=1,2,3$に対し，点P_{i1},P_{i2}から得られる一変数反復Splineは

$$S_1^{(i,*)1}(x_2) \quad 及び \quad S_1^{(i,*)3}(x_2)$$

となり，それぞれx_1,x_3を補間値とする補間式である。同様に$j=1,2$に対し，点R_j,P_{2j},P_{3j}から得られる一変数反復Splineは

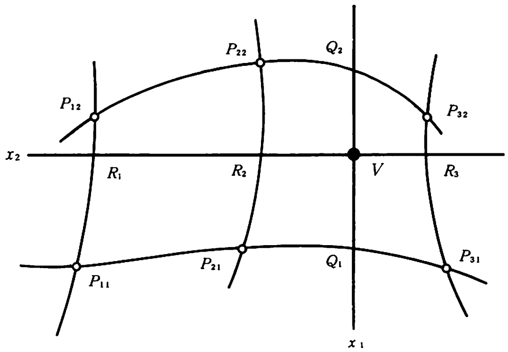
$$S_1^{(*,j)2}(x_1) \quad 及び \quad S_1^{(*,j)3}(x_1)$$

となる。

点$V(x_1,x_2)$に対して，$T_{2,1}^{(*,*)3}(x_1,x_2)$は，点$V$を通り$x_2$軸に平行な直線と，補間曲線$S_1^{(*,1)2}$と$S_1^{(*,2)2}$との交点$Q_1,Q_2$によって得られる補間曲線である。同様に，$T_{2,2}^{(*,*)3}(x_1,x_2)$は，点$R_1,R_2,R_3$によって得られる補間曲線である。最後に，

$$S_2^{(*,*)3}(x_1,x_2)=\frac{1}{2}\{T_{2,1}^{(*,*)3}(x_1,x_2)+T_{2,2}^{(*,*)3}(x_1,x_2)\}$$

によって，Vにおける補間値が求まる。



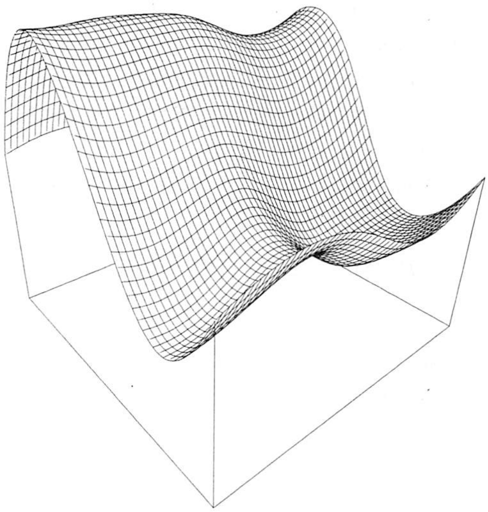
図－1

4. 二変数による実験例

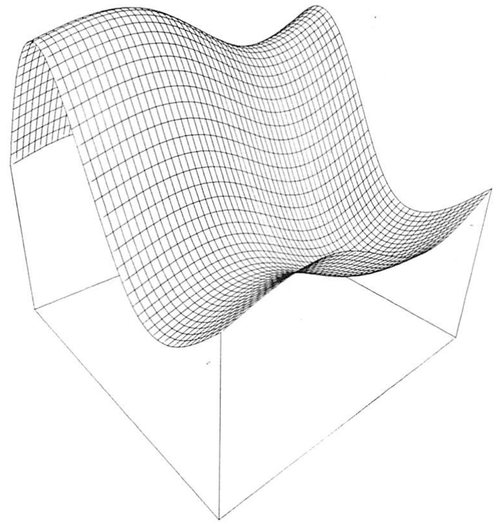
本章においては，二変数補間Splineと，二変数反復Splineによって補間した結果について比較する。関数としては，

$$f(x,y)=\frac{x\ \sin\pi x}{2}+\cos\pi(y+0.3)$$
$$0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1$$

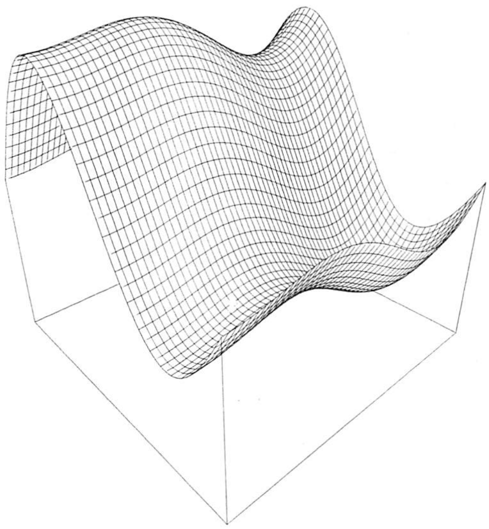
を用いた。二変数補間Splineについては4×5個の格子点，二変数反復Splineについては20個(領域の境界上に14点）のランダム分点において関数値を与えて補間した。図2は$f(x,y)$であり，図3が二変数補間Spline，図4が二変数反復Splineによって得られたものである。いずれも，$0\leq x\leq 1$，$0\leq y\leq 1$において，51×51個の格子点をとり，それらの点での値（補間値）を曲面表示している図3，図4共に，原関数を非常によく補間してい



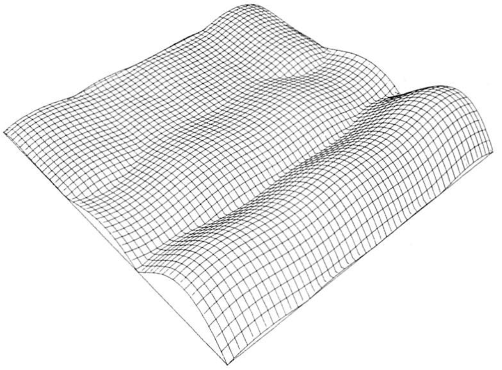
図－2



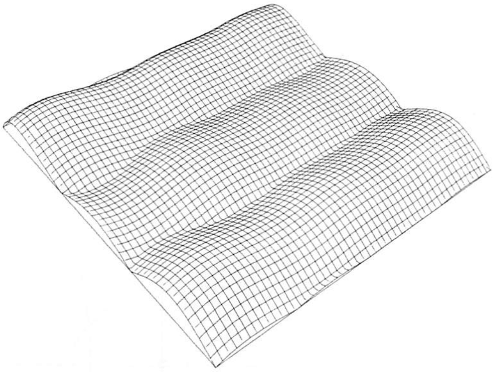
図－4



図－3



図－5



図－6

ると思われる。

図5は，二変数補間 Splineによる補間誤差の分布，図6は，二変数反復 Spline による補間誤差の分布を表わしている。いずれも4×5の格子点におけるデータをもとにして求めた補間値の誤差（絶対誤差）を表わしている。

また，分点数を増加させた時の誤差（絶対誤差の最大値）の比較は下表のとおりである。これは格子点での関数値に対して補間したものであり，やや二変数補間 Spline が優れていることが見てとれるが，大差はない。このように，二変数反復 Spline は，十分実用に耐え得るものであることがわかる。

分点数	二変数 Spline	反復 Spline
4×5	0.260	0.163
6×7	0.443×10^{-1}	0.583×10^{-1}
9×9	0.155×10^{-1}	0.189×10^{-1}

5. ま と め

反復 Spline 法と同様に，Lagrange 補間に対しても反復によるアルゴリズムが考えられるが，変動に敏感に影響される Lagrange 補間では，同様な手法ではあまりよい結果をもたらさないものと思われる。反復 Spline によって補間する場合のデータ点は，必ずしも，本論文で述べた条件のように，各座標軸にそって同一分点数でなくとも可能である。しかし，分点の与え方は，第3章で述べた条件では，本来は十分ではなく，補間 Spline が交わらないようにしておくことが必要である。反復 Spline 法についての誤差解析を行なうことが，今後の課題として残されている。

尚，曲面の表示には(1)，(2)による透視図（斜景図）表示プログラムを利用させていただいた。計算には，北大大型センター FACOM 230－75 及び本高専 HITAC 8250 を利用した。

参 考 文 献

(1) 森　正武：曲線と曲面，教育出版
(2) 小野令美：森正武氏の透視図のプログラムから斜景図のプログラムへの改良，情報処理，Vol 19, No 6
(3) 津田孝夫：多変数問題の数値解析，サイエンス社
(4) J. Ahlberg, E. Nilson and J. Walsh : The Theory of Splines and Their Applications, Academic Press, 1967
(5) W. J. Gordon : Spline-Blended Surface Interpolation Through Curve Networks, J. Math. Mech., Vol18, No10

（昭和53年11月30日受理）