

有限要素法による軸対称三次元開放領域問題の解析

藤島豊*

佐藤雄二**

鷲巣慎***

An Analysis of Unbounded Field Problem in case of
Axcal Three Dimensional Model by Finite Element Method

Yutaka FUJISHIMA
Yūji SATO
Shin WASIS

要 旨

有限要素法を用いた開放領域問題について、軸対称性を有する導体球モデルの外部における電位を数値計算により求め、理論解との比較によって良い結果を得ている。この方法を碍子に応用し、碍子周辺の電位分布状態もあわせて求めたので報告する。

1. ま え が き

軸対称三次元モデルの有限要素法解析は、同心球導体モデルをとりあげ解析を行なってきた⁽¹⁾。

開放領域へ問題を進展させるために、wexler 等が提案している自由空間における Green 関数を導入した有限要素法⁽²⁾を用いて解析を試みた。

この wexler 等の提案は、汎関数の停留条件により導かれる境界条件と、他方自由空間の Green 関数を用いて得られる境界条件の両方が組み込まれた形での解析とみられる。

この結果、境界面での解析が不充分であり、筆者等は、この境界面の不充分さを取り除くため、前者を後者で置き換えて解析を行なっている。

解析に際しては、導体球モデルをとりあげ、その電位分布解析を行ない、理論解との比較を行なっている。

あわせて最外殻境界領域面を変えて理論解との誤差を検討している。

さらに、軸対称碍子モデルの開放領域問題とし

て、碍子周辺における電位分布解析を行なっている。

2. 解 析 方 法

導体球に電位を与えた場合の導体球外部における電位分布は、三次元のラプラスの問題であり、Green 関数 G は次式を満足する。

$$\nabla^2 G(x, y, z|x_0, y_0, z_0) \\ = -\delta(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$$

ここで

$$G(x, y, z|x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R}$$

$$R = \{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\}^{1/2}$$

である。

開放領域問題の取り扱いについては、本校紀要第 14 号⁽³⁾に述べていることから、ここでは、wexler 等の提案との相違について述べる。

有限要素領域内の行列方程式は図-1 に示した領域 V_I と領域 V_B に有限要素法を適用することにより、(1) 式、(2) 式で表わすことができる。

* 助教授 電気工学科
** 技 官 電気工学科
*** 北海道大学工学部 電気工学科

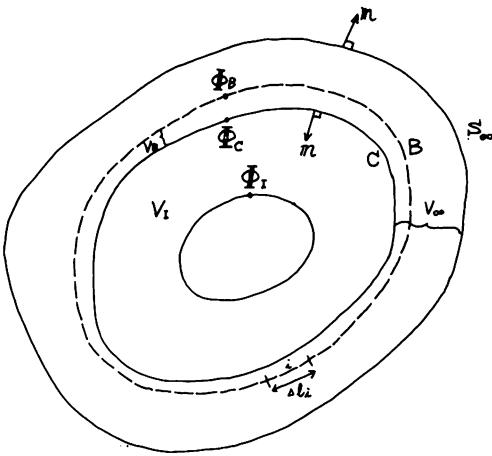


図-1 有限要素法による開放領域の取扱い

$$\begin{bmatrix} \Phi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_I \\ \Phi_C \end{bmatrix} \quad \dots\dots(1)$$

$$TF \cdot \Phi = 0$$

(ここでTFは結合係数マトリクスを表わす)

$$\begin{bmatrix} TF_{II} & TF_{IC} & TF_{IB} \\ TF_{IC}^T & TF_{CC} & TF_{CB} \\ TF_{IB}^T & TF_{CB}^T & TF_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_I \\ \Phi_C \\ \Phi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi_B \end{bmatrix} \quad \dots\dots(2)$$

Φ_I と Φ_B とは結合関係にないことから

$$TF_{IB} = TF_{IB}^T = 0$$

これより

$$\left\{ \begin{array}{l} [TF_{II} \quad TF_{IC}] \begin{bmatrix} \Phi_I \\ \Phi_C \end{bmatrix} + TF_{IB} \Phi_B = [0] \\ [TF_{CI} \quad TF_{CC}] \begin{bmatrix} \Phi_I \\ \Phi_C \end{bmatrix} + TF_{CB} \Phi_B = [0] \\ [TF_{BI} \quad TF_{BC}] \begin{bmatrix} \Phi_I \\ \Phi_C \end{bmatrix} + TF_{BB} \Phi_B = [0] \end{array} \right\} \quad \dots\dots(3)$$

Φ_B は未知数であるから Φ_B を消去して

$$\left\{ \begin{array}{l} [TF_{II}^* \quad TF_{IC}] \begin{bmatrix} \Phi_I \\ \Phi_C \end{bmatrix} = [0] \\ [TCI + P^T TF_{BI} \quad TF_{CC} + TF_{CB}P + P^T TF_{BC} \\ \quad + P^T TF_{BB}P] \begin{bmatrix} \Phi_I \\ \Phi_C \end{bmatrix} = [0] \end{array} \right\} \quad \dots\dots(4)$$

として方程式を導いたものがwexler等の提案である。

しかしながら(2)式において右辺には

Ψ_B なる項が含まれており、以上の方法においては、汎関数の停留条件に含まれる自然境界条件と、自由空間のGreen関数を用いて表わされる境界条件が同時に組み込まれたものと考えられる。

ここで、この点について前者を後者で置き換えるのが妥当である。

Ψ_B は

$$\phi_i = \left(\frac{\partial \phi}{\partial n_B} \right)_i \Delta l_i \quad (i \text{ は } B \text{ 面上の } i)$$

の ϕ_i から成っており(2)式においては Φ_I 、 Φ_C 、 Φ_B 、 Ψ_B が未知数である。

Φ_B は Φ_C によって

$$\phi_B = \int_C \left(G \frac{\partial \phi_C}{\partial n} - \phi_C \frac{\partial G}{\partial n} \right) dC \quad \dots\dots(5)$$

として表わされる。これをマトリクス表示で

$$[\Phi_B] = [P][\Phi_C] \quad \dots\dots(6)$$

とする。

(2)式と(6)式から

$$\begin{bmatrix} TF_{II} & TF_{IC} \\ TF_{IC}^T & TF_{CC} + TF_{CB}P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_I \\ \Phi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(7)$$

を用いることにする。

これは、

$[TF_{CB}^T \Phi_C + TF_{BB} \Phi_B] = [0]$ が自然境界条件を満足させるものであり、これを新たな境界条件 $[\Phi_B] = [P][\Phi_C]$ で置き換えた形となっている。

以上より Φ_I 、 Φ_C を求め、 ϕ を計算している。

(Ψ_B は、 $[\Psi_B] = [TF_{CB}^T + TF_{BB}P][\Phi_C]$ で与えられ、必要の際にはこの式を用いることになる)。

モデルが三次元であることから、 $\Phi_B(x,y)$ に対応する積分は面積分となる。

計算は図-2に示した領域CをY軸の囲りに一回転させ、 $-Y$ については、 $+Y$ の影像を考え、積分の寄与を2倍としている。

以上より

$\Phi_B = P\Phi_C$ に対応するPマトリクスを算出することになる。

有限要素領域に対しては、汎関数

$$J = \iiint_V |\nabla \phi|^2 dx dy dz \quad \dots\dots(8)$$

を停留させることになる。

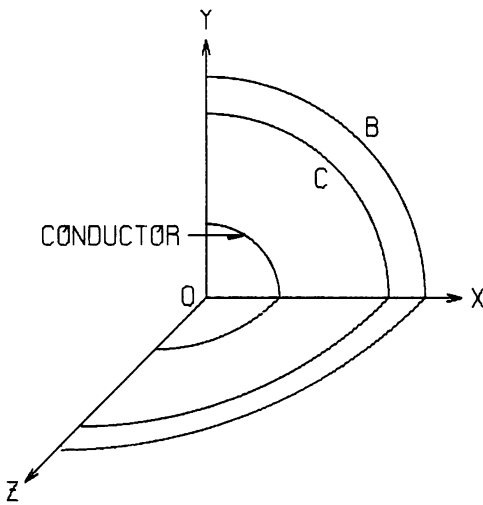


図-2 導体球モデル

ただし、軸対称性を考慮していることから三次元ではあるが二次元と同様の手法⁽¹⁾により取扱えることになる。

3. 軸対称碍子周辺の電位分布解析

導体球モデルと同様の方法を用い、図-3に示す軸対称性を有する碍子モデルについて、若干の手直し（方線方向の不均一等の是正）を加え、図の上部導体部に電位を与えた場合の数値解析を行っている。

ここで碍子周辺は空気で満たされているものと仮定している。

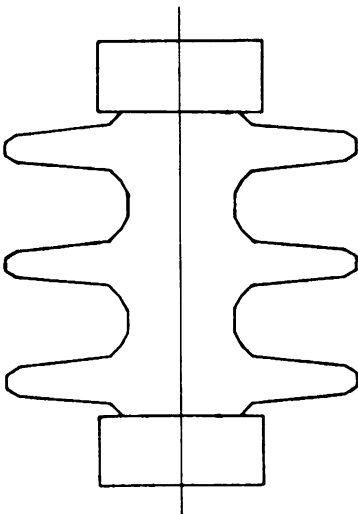


図-3 軸対称碍子モデル

尚、要素分割の様子は、計算結果の図-15、図-16として、Y-Yプロットにより出力させている。

4. 結 果

4. 1 導体球モデル

図-4に示すごとく、半径 $R=5$ (cm) の導体球に電位 $V=1$ (V) を与えた場合の導体球外部の電位を計算し、理論解と比較している。

図-5は、全節点数 46, 要素分割数 66 の分割を示し、その計算結果は図-6である。

図-7は、分割を細かくとり、全節点数 78, 要素分割数 120 とした場合を示し、最外殻境界領域面 $V_{\infty}=S_B$ を $R=12.0$ (cm) のところにとったものの計算結果を図-8に示している。

両方の結果を比較してみると、分割をふやした方が、よりなめらかなカーブとなっている。

さらに分割をふやし、全節点数 187, 要素分割数 320 に分割したものを図-9, 全節点数 188, 要素分割数 322 に分割したものを図-11に示している。

図-10には、前者の計算結果（ただし最外殻境界領域面を $R=12.0$ (cm) としている）、図-12に後者の計算結果を示した。

つづいて、後者の分割について、最外殻境界領域面を、それぞれ $R=15.0$ (cm), $R=20.0$ (cm) と広げた場合の計算結果を図-13、図-14に示している。

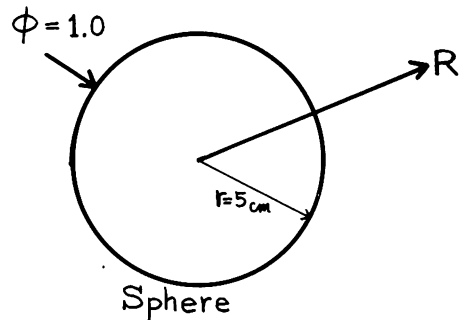


図-4 導体球計算モデル

尚、このモデルは対称性を考慮して球の 1/4 を用いて計算を行なっている。

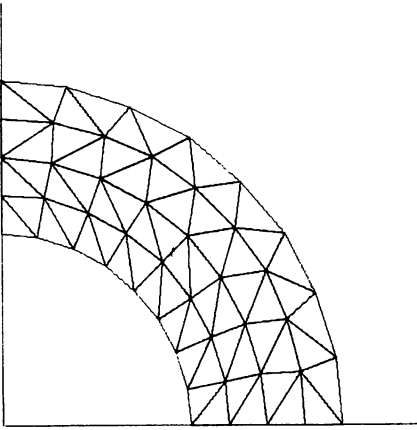


図-5 要素数 66, 節点数 46

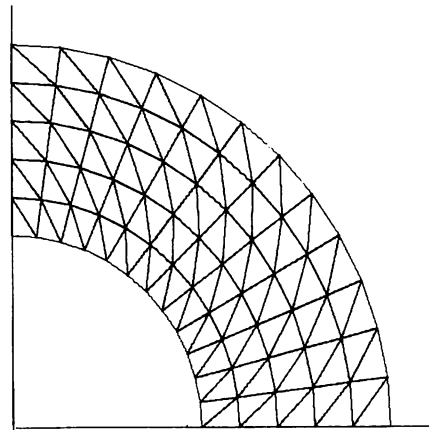


図-7 要素数 120, 節点数 78

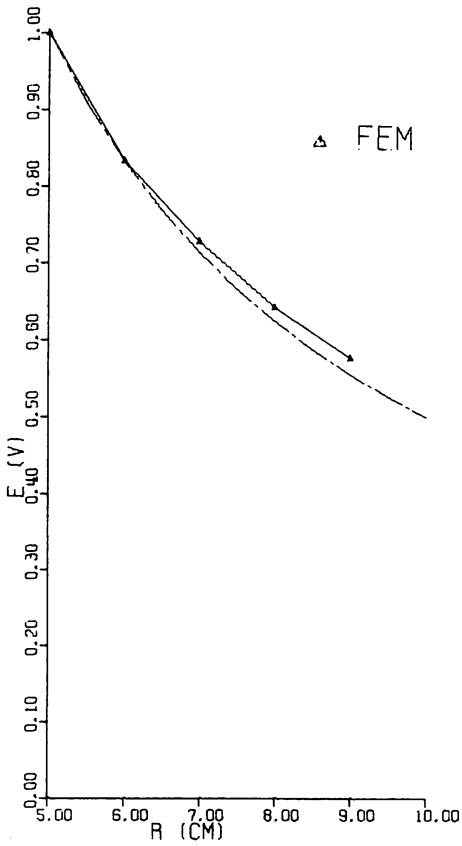


図-6

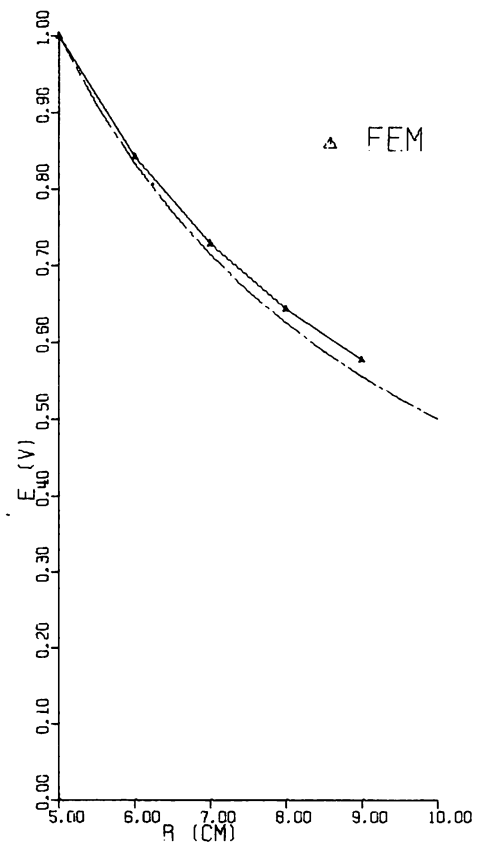


図-8 要素数 120, 節点数 78

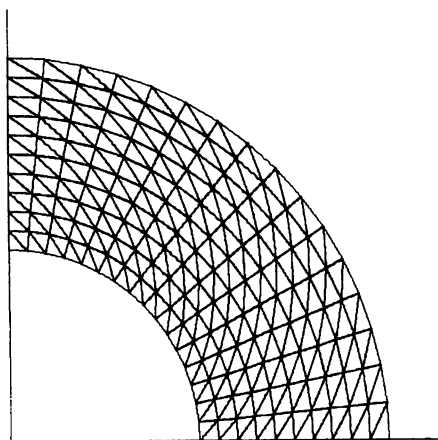


図-9 要素数 320, 節点数 187

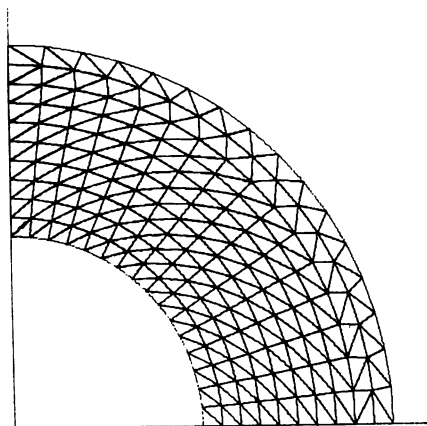


図-11 要素数 322, 節点数 188

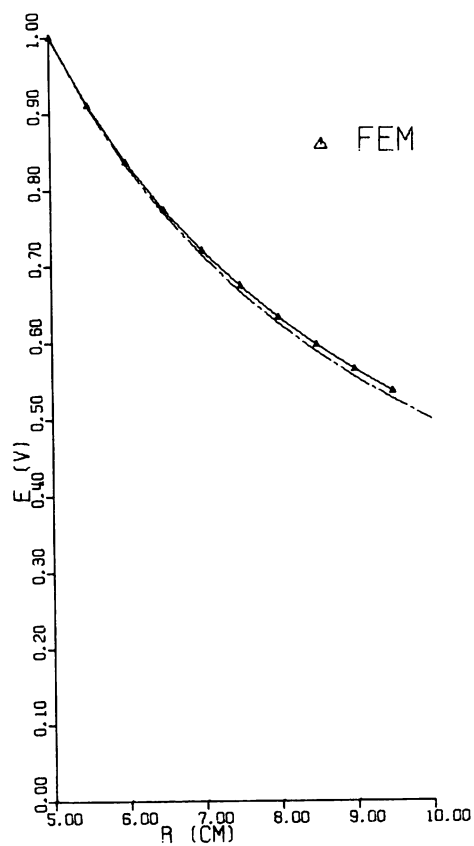
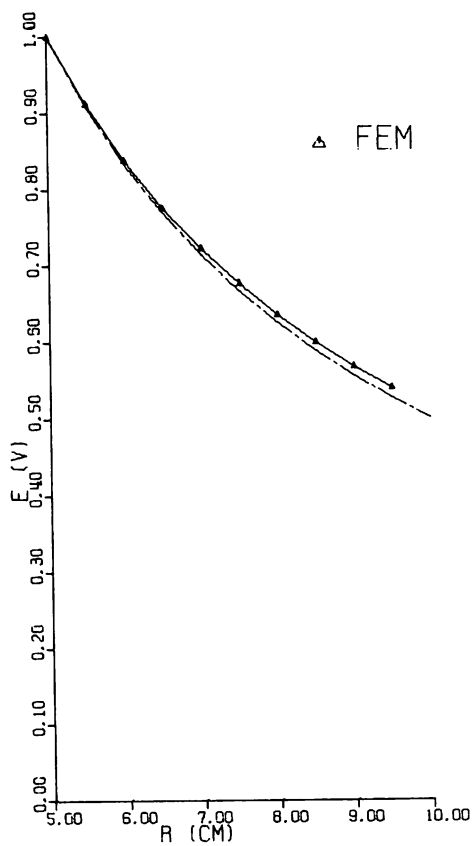


図-10 要素数 320, 節点数 187

図-12 要素数 322, 節点数 188 $R=12.0(\text{cm})$

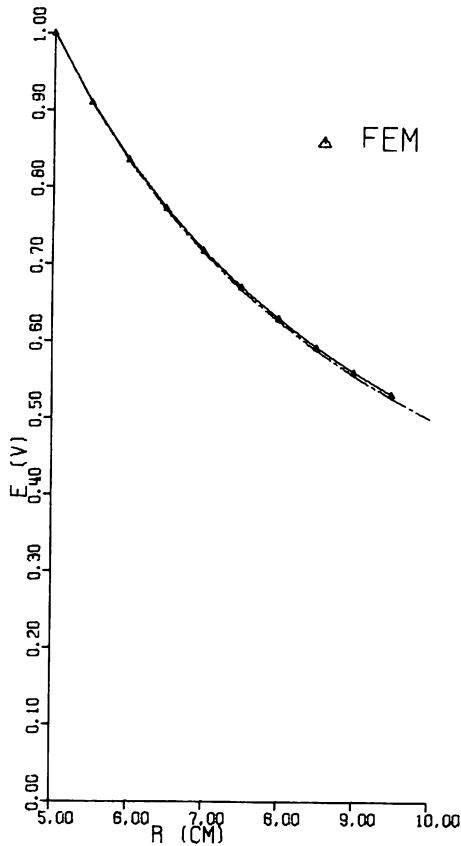


図-13 要素数 322, 節点数 188 $R=15.0(\text{cm})$

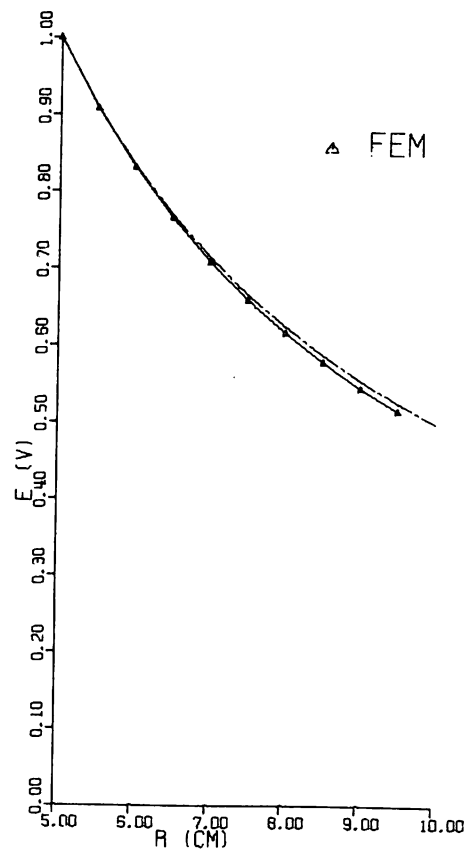


図-14 要素数 322, 節点数 188 $R=20.0(\text{cm})$

4. 2 軸対称碍子モデル

図-3に示したモデルを X 軸を中心に一回転させて計算している。

図-15, 図-16にその分割の様子とあわせて計算結果を示している。

図-15と図-16の違いは、最外殻境界領域面のとり方にあり、計算結果は、上部導体部に $V=1$ (V) の電位を与えた場合の、それぞれ、0.9 (V) ……0.1 (V) の等電位線として等高線図で示し⁽⁴⁾, $X-Y$ プロットにより描かせている。

5. 結 論

導体球モデルでの理論解との比較をみると、分割要素を多くしてゆくほど一致してくることがわかる。分割要素数 66 の場合の最大誤差は 3.8%, 分割要素数 120 の場合は 3.5%, に比して分割要素数 320 の場合は 1.9%, 分割要素数 322 の $R=15.0(\text{cm})$ の場合は、0.9%である。

しかしながら $R=20.0(\text{cm})$ に広げた場合、図-

14に示したごとく、理論値を計算値が下まわり誤差は約2%あり、逆に差が広がっている。この点については、最外殻境界領域面を極端に広げたために、他の三角要素の形状と比較して極端な鋭角三角形となってしまうことから正確な結果が得られないことが云える。

このことは三角要素の形が細長い三角要素よりも正三角形に近い要素の方が、より正確な計算結果が求まることから、短い対角線による分割が望ましい⁽⁵⁾ということがいえる。

碍子についての等電位線は、図-15, 図-16を比較してみると、境界面の設定により多少の電位分布の差違が生じており、この場合には、境界面附近の分割を出来得る限り均等になるように工夫する必要があるものと思われる。

又、一般的な碍子の形状は対称性に限界があり、さらに碍子周辺の状態の変化(雪の附着等)を考慮して解析する際には対称性は失われることにもなり、分割要素の決定、及び増大等が問題となり、あわせて計算容量の増大などが予想される。した

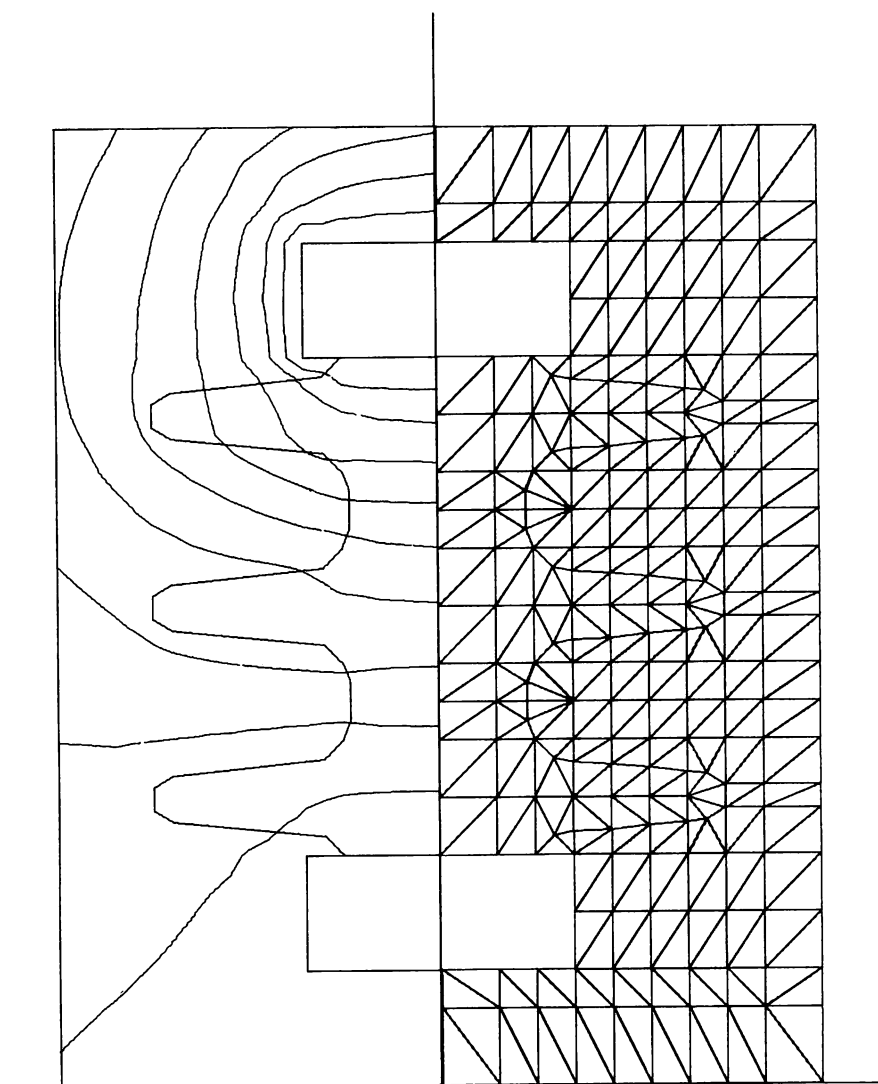


図-15 軸対称碍子モデル（右側 要素分割，左側 出力等電位線）

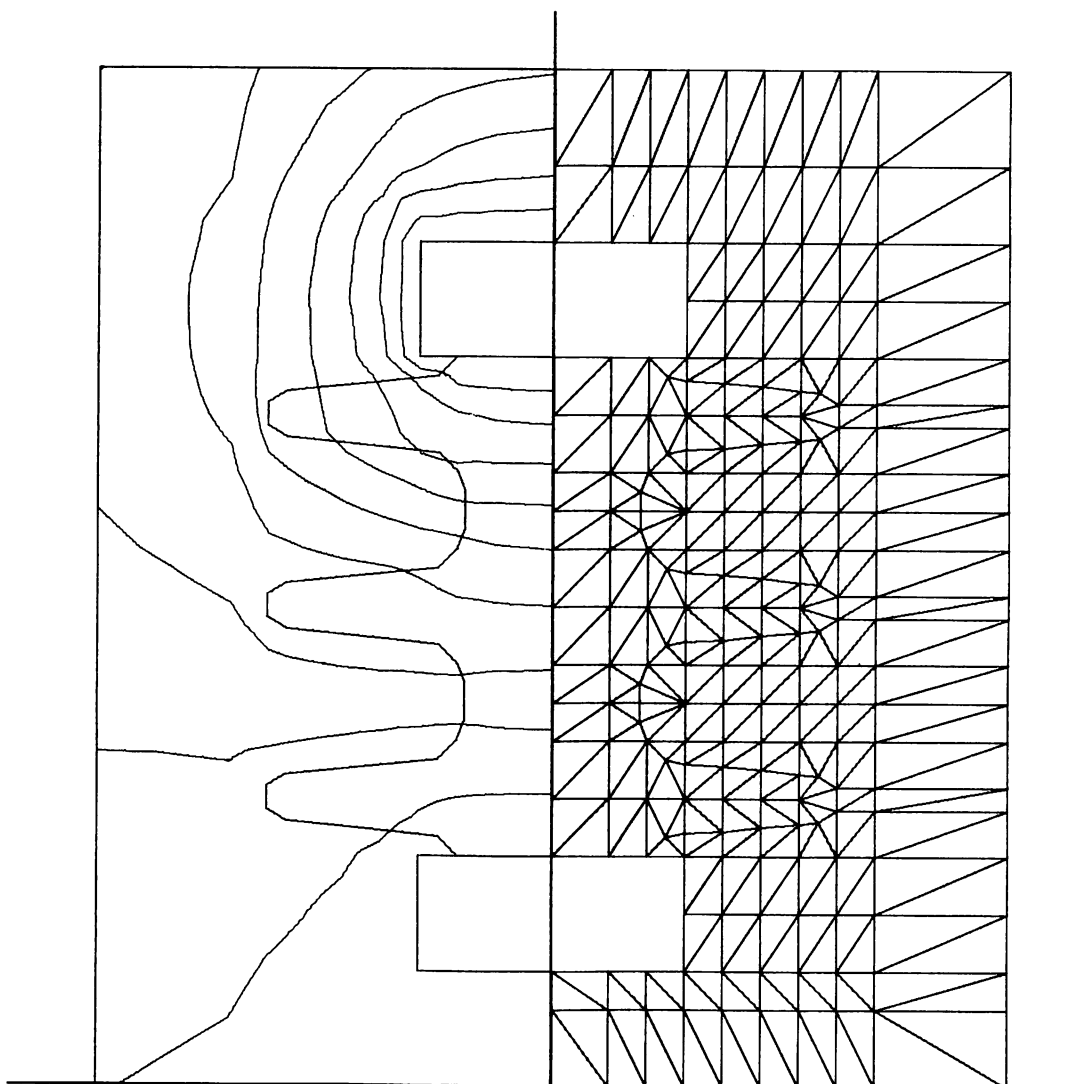


図-16 軸対称碍子モデル (右側 要素分割, 左側 出力等電位線)

がって容量軽減等の工夫がプログラム作成上, 不可欠である。

参 考 文 献

- (1) 藤島豊, "有限要素法による軸対称三次元モデルの解析。苫小牧高専紀要第14号
- (2) B. H. McDonald And A. Wexler, "Finite Element Solution of Field Problems,, IEEE Trans Micro-

wave Theory Tech, Vol MTT-20, No.12, p841 Dec 1972

- (3) 藤島豊, 鷲巣慎, "碍子周辺が誘電体で囲まれた場合の電位分布解析。苫小牧高専紀要等14号
- (4) 森正武, "曲線と曲面、シリーズ新しい応用の数学5
- (5) 川井忠彦監訳, "応用有限要素解析。

(昭和54年11月28日受理)