或る L^P 近似定理

新谷俊忠*

An L^P approximation theorem

By

T. SHINTANI

Abstract

Let $V=\{V(t), a_t\}$ be a stochastic process, $\{A_t, a_t\}$ an increasing continuous process. Then it is shown that for $V=\{V(t), a_t\}$ and $\varepsilon>0$ there is a continuous stochastic process $V^{(\varepsilon)}=\{V^{(\varepsilon)}(t), a_t\}$ such that $E[\int_\alpha^\beta |V-V^{(\varepsilon)}|^p dA_t]<\varepsilon (p\geqq 1)$.

(Ω, a, P)は確率空間, $\{a_t, t\geqq 0\}$はaの部分σ-代数の増大族とする。$V=\{V(t), t\geqq 0\}$は各tに対し$V(t)$がa_t可測な確率過程とする。
このとき，Vを連続過程で近似するという基本的な問題は永く未解決であった。この近似は1975年頃著者に依って発見された。

定　理　$\{A_t, t\geqq 0\}$はpathsが連続な増加過程とする。このとき，$V=\{V(t), a_t\}$と$\varepsilon>0$に対し, pathsが連続であって且各tに対し$V^{(\varepsilon)}(t)$がa_t可測である様な確率過程$V^{(\varepsilon)}=\{V^{(\varepsilon)}(t), a_t\}$が存在して,

$$E[\int_\alpha^\beta |V-V^{(\varepsilon)}|^p dA_t]<\varepsilon \quad (p\geqq 1).$$

〔証明〕a_t可測な$V(t)$に滑らかな関数を掛けてa_t可測な滑らかな$\tilde{V}(t)$を作ろう。
$|V|\leqq c$(一様有界)としてよい。

$$\rho(t)\overset{\text{def.}}{=}\begin{cases} k\cdot\exp[1/t^2-1] & (|t|\leqq 1)\\ o & (|t|>1)\end{cases}$$

ここで，定数$k>0$は$\int_{-\infty}^{\infty}\rho(t)\,dt=1$を満足する様に定める。$t<\alpha$のとき$V(t)=0$とする。
$\varepsilon>0, 2\varepsilon<1$, と各$t$に対し,

$$(J_\varepsilon V)(t)\overset{\text{def.}}{=}\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-2\varepsilon}^{t}\rho\left(\frac{t-s-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\cdot V(s)\,ds.$$

二つの不定積分の和として$(J_\varepsilon V)(t)$は(tについて)連続。置換積分法に依り

$$(J_\varepsilon V)(t)=\varepsilon^{-1}\int_1^{-1}\rho(z)\cdot V(t-\varepsilon z-\varepsilon)(-\varepsilon)\,dz$$
$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{\rho(z)}\cdot\sqrt{\rho(z)}\cdot V(t-\varepsilon z-\varepsilon)\,dz.$$

pが一般の場合は$p=2$の場合に帰着できるから，$p=2$として証明する。Schwarz の不等式とHölderの

*一般教科　数学　助教授

不等式に依り

$$\int_\alpha^\beta (J_\varepsilon V)^2 dA_t \leqslant \int_\alpha^\beta \left\{ \int_{-1}^1 \rho(z)dz \cdot \int_{-1}^1 \rho(z) \cdot V(t-\varepsilon z-\varepsilon)^2 dz \right\} dA_t$$

$$= \int_\alpha^\beta \left\{ \varepsilon^{-1} \cdot \int_{t-2\varepsilon}^t \rho\left(\frac{t-s-\varepsilon}{\varepsilon}\right) \cdot V(s)^2 ds \right\} dA_t$$

$$\leqslant K_\varepsilon \cdot \int_\alpha^\beta \left\{ \int_{t-2\varepsilon}^t V(s)^2 ds \right\} dA_t \qquad \cdots\cdots (1)$$

（ここで，$\lim_{\varepsilon \to o} \ K_\varepsilon > 0$ は或る微分として有限に存在.）

実函数論（Lebesgue-Stieltjes 積分論）でよく知られている様に，$\omega \in \Omega$ を固定して $\int_\alpha^\beta V(t,\omega)^2 dA_t < \infty$ とするとき，

$$\int_\alpha^\beta |u_n(t) - V(t,\omega)|^2 dA_t \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

となる連続関数u_nがある。$|u_n(t,\omega)| \ll c$ としてよい。Schwarzの不等式が成立するからMinkowski の不等式を得て，J_εがlinear functionalであることから，

$$\left\{ \int_\alpha^\beta |(J_\varepsilon V)(t,\omega) - V(t,\omega)|^2 dA_t \right\}^{1/2}$$

$$\leqslant \left\{ \int_\alpha^\beta | J_\varepsilon(V(\cdot,\omega) - u_n(\cdot))(t)|^2 dA_t \right\}^{1/2}$$

$$+ \left\{ \int_\alpha^\beta |(J_\varepsilon u_n)(t) - u_n(t)|^2 dA_t \right\}^{1/2}$$

$$+ \left\{ \int_\alpha^\beta | u_n(t) - V(t,\omega)|^2 dA_t \right\}^{1/2} \qquad \cdots\cdots (2)$$

一般に，$[a,b]$上の関数$\varphi(s)$が$|\varphi| \ll c$, $[a,b]$で可積分なら$\int_a^t \varphi(s) ds$は$[a,b]$ でtの連続関数である。故に，$\varepsilon \to 0$ とすると

$$\int_{t-2\varepsilon}^t | V(s,\omega) - u_n(s)|^2 ds \to 0 \qquad となるから,$$

(1)と有界収束定理とに依り，(2)の右辺第１項→ 0 ($\varepsilon \to 0$). また，u_nは有界閉区間$[\alpha,\beta]$で連続故，$\varepsilon \to 0$ のとき$t \in [\alpha,\beta]$について一様に$(J_\varepsilon u_n)(t) \to u_n(t)$. 故に. (2)で$\varepsilon \to 0$ としてから$n \to \infty$とすると，

$$\overline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} \int_\alpha^\beta |(J_\varepsilon V)(t) - V(t)|^2 dA_t = 0 \qquad a.e.$$

従って，$\widetilde{V}_n := J_{1/n} V$ とすれば，この $\widetilde{V}_n$は連続でa_t可測故nonanticipating.このことは，どの$c > 0$ に対しても成り立っているから，全てのVに対して成立する。

次に，閉区間$[\alpha,\beta]$でV, $\widetilde{V}_n$は一様有界としてよい。$A_o = 0$としてよい。

$$o \leqslant \int_\alpha^\beta | V(t) - \widetilde{V}_n(t)|^2 dA_t \leqslant \sup_{t \in [\alpha,\beta]} | V(t) - \widetilde{V}_n(t)|^2 \, [A_\beta - A_\alpha] \quad \varepsilon L^1.$$

Lebesgue の収束定理から，

$$\lim_{n \to \infty} \ E\left[\int_\alpha^\beta | V(t) - \widetilde{V}_n(t)|^2 dA_t\right]$$

$$= E\left[\lim_{n \to \infty} \int_\alpha^\beta | V(t) - \widetilde{V}_n(t)|^2 dA_t\right]$$

$$= 0. \qquad （証明終）.$$

References

[1] P. Courrēge : Intēgrales stochastiques et martingales de carrē intēgrable, Sēminaire de Brelot-Choquet-Deny, 7e annēe, 1962/63, n° 7.

[2] J. L. Doob : Stochastic processes, J. Wiley, New York, 1953.

[3] K. Itô : 確率論，現代数学14，岩波書店，1953.

[4] S. Watanabe : 確率微分方程式，数理解析とその周辺9，産業図書，1975.

(昭和55年11月29日受理)