確率積分の収束について*

新谷俊忠**

On the convergence of Stochastic Integrals

By

T. SHINTANI

Abstract

Let $V=\{V(t), t\geqslant 0\}$ be a stochastic process, $f=\{f(t), t\geqslant 0\}$ a martingale, and let $\{t_{m,k}: 0=t_{m,o}<\cdots<t\}$ a sequence of partitions of $[0, t]$ with $\max_k (t_{m,k+1}-t_{m,k})\to 0$ as $m\to\infty$.

Then, it is shown that $\lim_{m\to\infty}\sum_k V(t_{m,k})\cdot[f(t_{m,k+1})-f(t_{m,k})]$ exists in L^p convergence and in a. e. convergence if f is L^p integrable. The limit defines a stochastic integral.

(Ω, a, P)は確率空間, $\{a_t, t\geqslant 0\}$はaの部分σ-代数の増大族とする。$f=\{f(t), t\geqslant 0\}$はpathsが連続なマルチンゲール, $V=\{V(t), t\geqslant 0\}$は各tに対し$V(t)$がa_t可測な確率過程とする。

$\Delta=(\Delta_m), \Delta_m=\{t_{m,k}: 0=t_{m,o}<\cdots<t_{m,r}<t\}$,は$[0,t]$のノルム$|\Delta|=\max_k(t_{m,k+1}-t_{m,k})\to 0(m\to\infty)$ を持つ分割の列とする。$d(t_{m,k})=f(t_{m,k+1})-f(t_{m,k}), r>k\geqslant 0, d(t_{m,r})=f(t)-f(t_{m,r}), \ t_{m,k}\leqslant t, k=r$, で$f$に対する増分を表わす。$\|f\|_1$で$f$の$L^1$ノルムを表わす。

補　題1. $f=\{f(s), 0\leqslant s\leqslant t\}$, $t\geqslant 0$, と$\varepsilon>0$に対し, L^∞マルチンゲール$f^{(\varepsilon)}=\{f^{(\varepsilon)}(s), 0\leqslant s\leqslant t\}$が存在し, 全ての$s$に対して$\|f(s)-f^{(\varepsilon)}(s)\|_1<\varepsilon$.

［証　明］或る整数$j=j(\varepsilon)>0$に対し, $f^{(\varepsilon)}(s)=E[j\wedge(-j\vee f(t))/a_s]$とする。$f^{(\varepsilon)}$は$L^\infty$ マルチンゲールである。$\{|f(s)-f^{(\varepsilon)}(s)|, \ 0\leqslant s\leqslant t\}$は一様可積分な$L^1$有界正劣マルチンゲールであるから, closable故, $E[|f(t)-f^{(\varepsilon)}(t)|/a_s]\geqslant|f(s)-f^{(\varepsilon)}(s)|$, $\forall s\in[0,t]$. Lebesgueの収束定理に依り$\varepsilon>0$に対して$j=j(\varepsilon)>0$を$j(\varepsilon)\uparrow\infty(\varepsilon\downarrow 0)$且$\|f(s)-f^{(\varepsilon)}(s)\|_1\leqslant\|f(t)-f^{(\varepsilon)}(t)\|_1<\varepsilon$ を満足する様に定め得る。
（証明終）

補　題2. $\{A_t, t\geqslant 0\}$はpathsが連続な増加過程とする。$V=\{V(t), a_t\}$と$\varepsilon>0$に対し, pathsが連続であって且各tに対し$V^{(\varepsilon)}(t)$がa_t可測である様な確率過程$V^{(\varepsilon)}=\{V^{(\varepsilon)}(t), a_t\}$が存在して,

$E[\int_o^t|V(s)-V^{(\varepsilon)}(s)|^p dA_s]<\varepsilon \ (p\geqslant 1)$. （証明略）

次は1977年～1978年頃著者に依って発見された。これは確率積分(K. Itô, 1944年) 発見当初からの課題であったことの解決である。

定　理 $f=\{f(t), t\geqslant 0\}$はL^pマルチンゲールとする。このとき, $[0,t]$の凡ゆる分割$\Delta=(\Delta_m)$に対して極限$\lim_{m\to\infty}\sum_k V(t_{m,k})\cdot d(t_{m,k})$は$L^p$収束且概収束して存在する。これを「確率積分」と呼んで$\int_o^t V(s)df(s)$と書く。$\int_o^\infty V(s)df(s):=\lim_{t\to\infty}\int_o^t V(s)df(s)$.

ここで$p=2$としΔを特別に取った場合がKunira-Watanabe積分(従ってItô積分)である。故に, この定理は確率積分を完成する。$\xi_{m,k}\in[t_{m,k},t_{m,k+1}],k\geqslant 0$, とするとき, L^p収束で$\lim_{m\to\infty}\sum V(\xi_{m,k})d(t_{m,k})=\int_o^t V(s)df(s)$.

*本研究は昭和53年度文部省科研費一般研究(D)402, 364058の交付を受けている。

**一般教科・数学　助教授

[定理の証明] 補題1に依り $f\epsilon L^1$はL^∞マルチンゲールとしてよい。 補題2に依りVと $\varepsilon>0$ に対し $E[\int_0^t |V-V^{(2)}|^p dA_s] <\varepsilon^2$となる連続過程$V^{(\varepsilon)}$がある。正整数$j$を$j^{-1}<\varepsilon$ を満足する様に取る。簡単の為 $V^{(j^{-1})}$を$V^{(j)}$と書く。 $p=2$としてよい。

$\theta_m :=\sum_k V(t_{m,k})\cdot d(t_{m,k})$, $\theta_m^{(j)} :=\sum_k V^{(j)}(t'_{m,k})\cdot d(t_{m,k})$. このとき,

$$\lim_{m\to\infty} E[|\theta_m-\theta_m^{(j)}|^2]=\lim_{m\to\infty} E[\sum_k\{V(t_{m,k})-V^{(j)}(t'_{m,k})\}^2\cdot d(t_{m,k})^2] <\varepsilon^2$$

次に,適当な細分をし番号を付け変えて,

$$E[|\theta_m^{(j)}-\theta_n^{(j)}|^2]=E[|\sum_k\{V^{(j)}(t_{m;k})-V^{(j)}(t_{n;k})\}\cdot d(t_{\cdot\cdot k})|^2].$$

$V^{(j)}$は一様有界,$[0,t]$で連続故一様連続故,

$$\lim_{m,n\to\infty} E[|\theta_m^{(j)}-\theta_n^{(j)}|^2]\leqslant\lim_{|\Delta|\to 0} E[\sup_k|V^{(j)}(t_{m;k})-V^{(j)}(t_{n;k})|^2\cdot\sum_k|d(t_{\cdot\cdot k})|^2]$$

$$\leqslant K.\lim_{|\Delta|\to 0} E^{1/2}[\sup|V^{(j)}(t_{m;k})-V^{(j)}(t_{n;k})|^4]$$

$$=0\ (K>0 \text{は定数}).$$

故に,

$$\lim_{m,n\to\infty} E^{1/2}[|\theta_m-\theta_n|^2]\leqslant\lim_{m\to\infty} 2\cdot E^{1/2}[|\theta_m-\theta_m^{(j)}|^2]+\lim_{m,n\to\infty} E^{1/2}[|\theta_m^{(j)}-\theta_n^{(j)}|^2]<2\varepsilon+0 \quad \text{for all } \varepsilon>0$$

これは,θ_mがL^2収束することを示している。

最後に,K. Itôの方法を用いてθ_mが概収束することを示そう。

θ_mは確率収束するから,充分大きなm, nに対し,m, nについて一様に,$P(|\theta_m-\theta_n|>\varepsilon)<1/2$ と出来る。$\varepsilon>0$に対し,mを充分大きく取る。Ottavianiの不等式に依り全てのnに対して,

$$P(\operatorname*{Max}_{1\leq p\leq n}|\theta_{m+p}-\theta_m|>2\varepsilon)\leqslant 2\cdot P(|\theta_{m+n}-\theta_m|>\varepsilon)$$

$$\leqslant 2\cdot\sup_n P(|\theta_{m+n}-\theta_m|>\varepsilon)$$

となるから,

$$P(\sup_{p,q}|\theta_{m+p}-\theta_{m+q}|>4\varepsilon)\leqslant 4\cdot\sup_n P(|\theta_{m+n}-\theta_m|>\varepsilon).$$

故に,θ_mが確率収束することから,$m\to\infty$のとき,

$P(\lim_{m\to\infty}\sup_{p,q}|\theta_{m+p}-\theta_{m+q}|>4\varepsilon)\leqslant 4\cdot\sup_n P(|\theta_{m+n}-\theta_m|>\varepsilon)\to 0$. 即ち,$\theta_m$は概収束する。(証明終)

References

[1] D. L. Burkholder, Martingale Transforms, Ann. Math. Stat., 37 (1966), 1494-1504.

[2] J. L. Doob, Stochastic processes, J. Wiley, New York, (1953).

[3] K. Itô, Stochastic integral, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 20 (1944), 519-524.

[4] H. Kunita and S. Watanabe, On Square Integrable Martingales, Nagoya Math. J., 30 (1967), 209-245.

[5] T. Shintani (with T. Ando), Best Approximants in L^1 Space, Z. Wahr., 33 (1975), 33-39, Springer Verlag, Berlin.

[6] ———, A proof of the Burkholder Theorem for Martingale Transforms, Proc. Amer. Math. Soc., 1979, (to appear).

(昭和55年12月1日受理)