

導体球周辺の静電界解析

藤島 豊*・佐藤 雄二**・鷺巢 慎***

Analysis of Electrostatic Field around Conducting Sphere

Yutaka FUJISHIMA, Yuji SATO and Shin WASHISU

要 旨

解析手法として有限要素法を使用して、導体球に電位を与えた場合の、導体球周辺における電位分布解析は本校紀要才 15 号〔1〕に発表している。

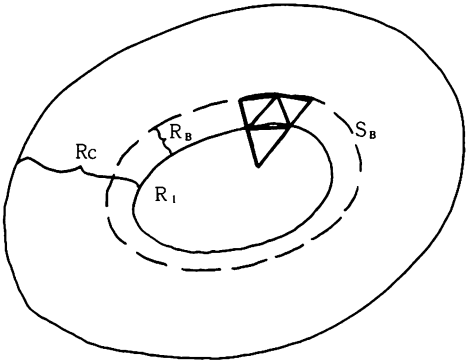
本論文においては、この解析によって得られた電位を使って各要素における電界を解析し、通常の方法による解析解との比較を行なっている。あわせて要素分割を変えた場合の誤差の比較を行なってみたので報告する。

1. は じ め に

導体球周辺の電界状態を知ることは、いわゆる開放領域問題を扱うことになる。開放領域におよぶ有限要素法の取扱いについては、すでに文献〔2〕にその手法が発表されているすなわち、図一(1)に示すごとく対象領域の外側に境界 S_B を設け、 S_B 内の領域 $R_I + R_C$ 内においては通常の有限要素法の手法を適用し、外部にわたっては自由空間におけるグリーン関数を導入することにより解析的に扱い、この両者を結合して解くという手順である。

この手順による解析方法は先に示した文献〔1〕に載せてあり、ここでは省略する。

先の手順により求めた電位 ϕ を用いて、各三角要素の重心における電界 E を二次元問題として解析し、またあわせて、要素分割を種々変えた場合の電位 ϕ の誤差率(有限要素法により求めた解析解と、通常の方法により求めた解析解との比較を誤差率として示している)を求め、要素分割数と誤差の関係について比較、考察している。



図一(1) 開放領域の取扱い

2. 解 析 方 法

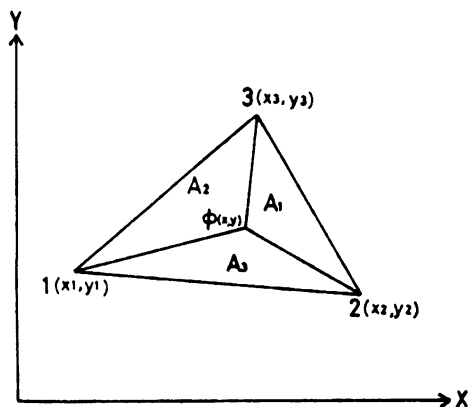
図一(2)に示した一つの三角要素について各三頂点の座標をそれぞれ、1 (x_1, y_1) , 2 (x_2, y_2) , 3 (x_3, y_3) とし、電位を ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 とする。また三角要素の内点(重心を考える)の位置と、電位を (x, y) , ϕ で表わす。

一次試験関数を

$$\phi(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y \dots\dots\dots (1)$$

として、面積座標 (ξ) によって表わすと、

* 助教授 電気工学科
** 技 官 電気工学科
*** 助教授 旭川高専電気工学科



図一(2) 三角要素とφの関係

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta_e} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2)$$

である。ここで Δ_e は三角紙素の面積であり

$$\left. \begin{aligned} \Delta_e &= A_1 + A_2 + A_3 \\ \frac{A_1}{\Delta_e} + \frac{A_2}{\Delta_e} + \frac{A_3}{\Delta_e} &= 1 = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

の関係にある。また α , β , γ はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2, & \alpha_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3, \\ \beta_1 &= y_2 - y_3, & \beta_2 &= y_3 - y_1, \\ \gamma_1 &= x_3 - x_2, & \gamma_2 &= x_1 - x_3, \\ \alpha_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ \beta_3 &= y_1 - y_2 \\ \gamma_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

である。よって

$$\zeta_i = \frac{A_i}{\Delta_e} = \frac{1}{2\Delta_e} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) (i=1, 2, 3) \dots\dots\dots(5)$$

となるから

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta_e} \beta_i, \quad \frac{\partial \zeta_i}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta_e} \gamma_i \dots\dots\dots(6)$$

$$\text{また } \phi(\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3) = [\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3] \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(7)$$

で表わすことができるから〔3〕,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} & \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2\Delta_e} [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3] \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} & \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2\Delta_e} [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3] \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(9)$$

となる。

したがって

$$\begin{aligned} -E &= \text{grad } \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} e_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} e_y \right) \\ &= \frac{1}{2\Delta_e} \{ [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3] + [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3] \} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \\ &\dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

となり、一つの三角要素内（重心を代表とする）の電界 E は、(10)式により三角要素の三頂点の座標と電位 ϕ_i によって求めることができる。

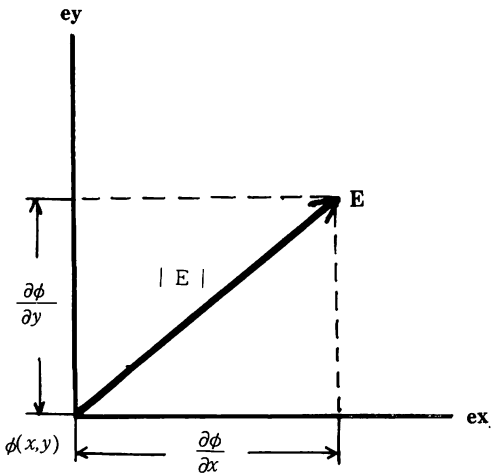
図一(3)に示すように $\partial \phi / \partial x$, $\partial \phi / \partial y$ の値を求めることにより、三角要素の重心 (x, y) からの電界 E の大きさ $|E|$ と、方向(矢印の向きで表現)を決定できる。

3. 計算結果

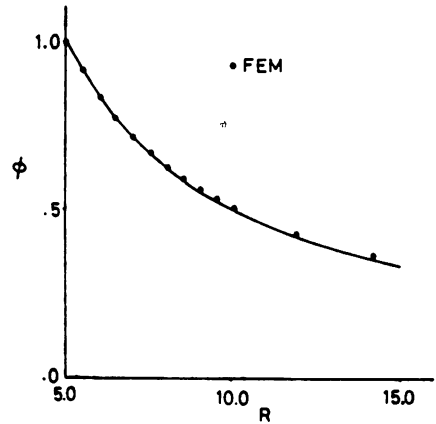
i) 導体球周辺の電界分布状態

有限要素法の手法を用いて解析した電位・電界の計算結果を図一(4), 図一(5), 図一(6)に示す。

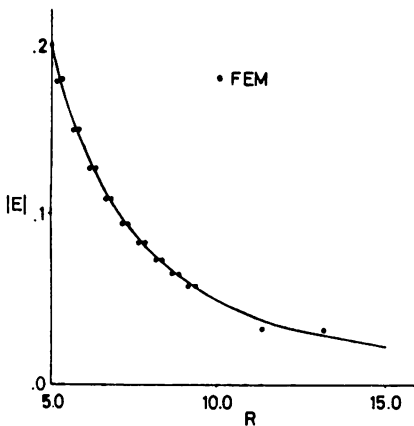
これは 5 (cm) の半径をもつ導体球に 1 (v) の電位を与えた場合の導体球周辺の計算結果であり、導体球周辺に全節点数 188, 全要素数 322 の分割を $x-y$ 軸間 90° にわたって行なったものである。



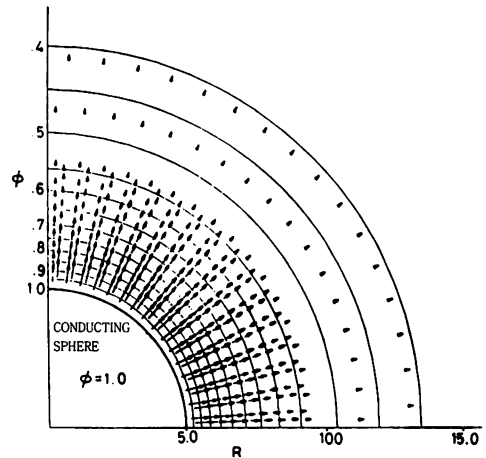
図一(3) 電界Eの表示



図一(4) 電位φの計算結果



図一(5) 電界Eの計算結果



図一(6) 等電位線と電界図

図一(6)では、同様の場合の導体球周辺における電位分布状態を等電位線として示し、矢印の長さで電界の大きさ $|E|$ を、方向で重心の位置からの電界の方向を示したものであり、電位と電界の直交性がよく示されており、満足できる計算結果が得られている。

ii) 電位計算における誤差

各分割節点における有限要素法により求めた電位 ϕ と、通常の方法による解 ($\phi = (R/R_r) \times 1$) ($R=5.0$ として求めた解) との比較を、その両者の差をとり誤差率として算出し、(表1-a~d)、(表2-a~d)、(表3-a~d) に示す。

ここでは、a は $R_r=6.0$ 、b は $R_r=7.0$ 、c は $R_r=8.0$ 、d は $R_r=9.0$ の場合をあらわしている。また、表1は節点数54、要素数80、表2は節点数78、要

素数120、表3は節点数188、要素数322の場合をあらわしている。

誤差率の違いを図一(7)のa~dに R_r を変えた場合の x - y 軸に 90° を分割したそれぞれの節点の電位変化としてまとめた。

図一(7)のa~dにおいて、それぞれ 90° (x 軸) に近づくにしたがって (特に 90° において) 誤差が多くなっているのは、解析の過程において x 軸の囲りに y 軸を一回転させ (16分割に分けている) ていることから、分割された面積 (台形となる) が 90° においては三角形を形づくることから大きな誤差が生じたものと考えられる。この解決策としては一回転の分割を多くとり、お互の軸間での台形 (三角形) の面積の違いを極力小さくすることにあると思われる。

表1. 節点数54, 要素数80の場合の
R/Rr 値とFEM値の誤差率

表 1 - a. Rr=6.0, R/Rr=0.83333

角度(°)	F E M 値	FEM値とR/Rr値 との誤差率
0.00	0.84101	0.9216
11.25	0.84101	0.9216
22.50	0.84103	0.9240
33.75	0.84107	0.9288
45.00	0.84117	0.9408
56.25	0.84140	0.9684
67.50	0.84193	1.0320
78.75	0.84320	1.1844
90.00	0.84741	1.6896

表 1 - b. Rr=7.0, R/Rr=0.71428

角度(°)	F E M 値	FEM値とR/Rr値 との誤差率
0.00	0.72714	1.8004
11.25	0.72715	1.8018
22.50	0.72717	1.8046
33.75	0.72723	1.8130
45.00	0.72737	1.8326
56.25	0.72770	1.8788
67.50	0.72850	1.9908
78.75	0.73066	2.2932
90.00	0.73699	3.1794

表 1 - c. Rr=8.0, R/Rr=0.625

角度(°)	F E M 値	FEM値とR/Rr値 との誤差率
0.00	0.64160	2.6560
11.25	0.64161	2.6576
22.50	0.64164	2.6624
33.75	0.64170	2.6720
45.00	0.64182	2.6912
56.25	0.64214	2.7424
67.50	0.64307	2.8912
78.75	0.64604	3.3664
90.00	0.65700	5.1200

表 1 - d. Rr=9.0, R/Rr=0.55555

角度(°)	F E M 値	FEM値とR/Rr値 との誤差率
0.00	0.57501	3.5028
11.25	0.57502	3.5046
22.50	0.57505	3.5100
33.75	0.57509	3.5172
45.00	0.57517	3.5316
56.25	0.57538	3.5694
67.50	0.57614	3.7064
78.75	0.57964	4.3380
90.00	0.60253	8.4564

表2. 節点数78, 要素数120の場合の
R/Rr値とFEM値の誤差率

表 2 - a. Rr=6.0, R/Rr=0.83333

角度(°)	F E M 値	FEM値とR/Rr値 との誤差率
0.0	0.83967	0.7608
7.5	0.83964	0.7572
15.0	0.83958	0.7500
22.5	0.83951	0.7416
30.0	0.83944	0.7332
37.5	0.83938	0.7260
45.0	0.83933	0.7200
52.5	0.83929	0.7152
60.0	0.83928	0.7140
67.5	0.83931	0.7176
75.0	0.83943	0.7320
82.5	0.83982	0.7788
90.0	0.84158	0.9900

表 2 - b. Rr=7.0, R/Rr=0.71428

角度(°)	F E M 値	FEM値とR/Rr値 との誤差率
0.0	0.72489	1.4854
7.5	0.72481	1.4742
15.0	0.72468	1.4560
22.5	0.72454	1.4364
30.0	0.72441	1.4182
37.5	0.72430	1.4028
45.0	0.72421	1.3902
52.5	0.72421	1.3902
60.0	0.72409	1.3734
67.5	0.72409	1.3734
75.0	0.72420	1.3888
82.5	0.72458	1.4420
90.0	0.72628	1.6800

表 2-c. $Rr=8.0$, $R/Rr=0.625$

角度(°)	F E M 値	FEM値とR/Rr値 との誤差率
0.0	0.63880	2.2080
7.5	0.63860	2.1440
15.0	0.63835	2.1360
22.5	0.63813	2.1008
30.0	0.63796	2.0736
37.5	0.63781	2.0496
45.0	0.63769	2.0304
52.5	0.63758	2.0128
60.0	0.63750	2.0000
67.5	0.63744	1.9904
75.0	0.63746	1.9936
82.5	0.63768	2.0288
90.0	0.63899	2.2384

表 2-d. $Rr=9.0$, $R/Rr=0.55555$

角度(°)	F E M 値	FEM値とR/Rr値 との誤差率
0.0	0.57212	2.9826
7.5	0.57150	2.8710
15.0	0.57110	2.7990
22.5	0.57082	2.7486
30.0	0.57061	2.7108
37.5	0.57044	2.6802
45.0	0.57029	2.6532
52.5	0.57016	2.6298
60.0	0.57003	2.6064
67.5	0.56991	2.6848
75.0	0.56980	2.5650
82.5	0.56973	2.5524
90.0	0.57010	2.6190

表3. 節点数188,要素数322の場合の
 R/Rr 値とFEM値の誤差率表 3-a. $Rr=6.0$, $R/Rr=0.83333$

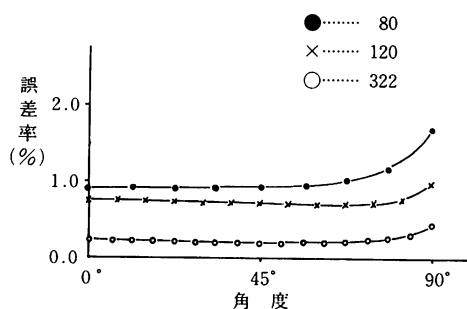
角度(°)	F E M 値	FEM値とR/Rr値 との誤差率
0.000	0.83531	0.2376
5.625	0.83530	0.2364
11.250	0.83528	0.2340
16.875	0.83525	0.2304
22.500	0.83522	0.2268
28.125	0.83519	0.2232
33.750	0.83517	0.2208
39.375	0.83517	0.2208
45.000	0.83517	0.2208
50.625	0.83518	0.2220
56.250	0.83521	0.2256
61.875	0.83526	0.2316
67.500	0.83532	0.2388
73.125	0.83542	0.2508
78.750	0.83558	0.2700
84.375	0.83591	0.3096
90.000	0.83716	0.4596

表 3-b. $Rr=7.0$, $R/Rr=0.71428$

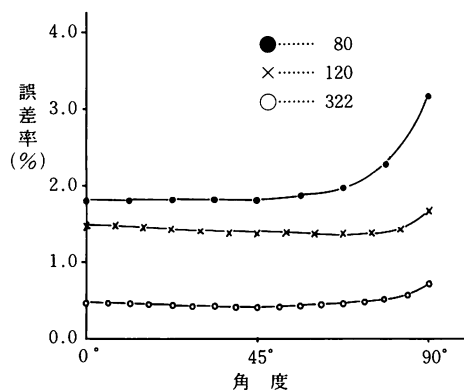
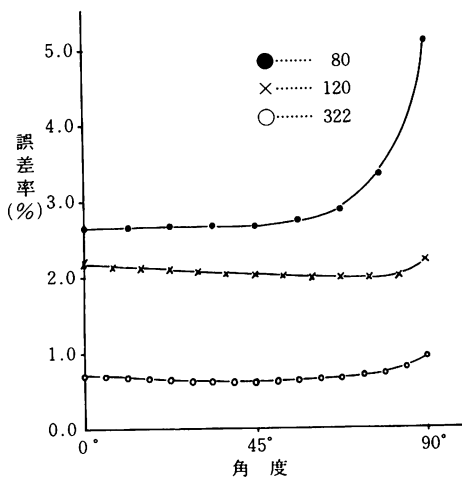
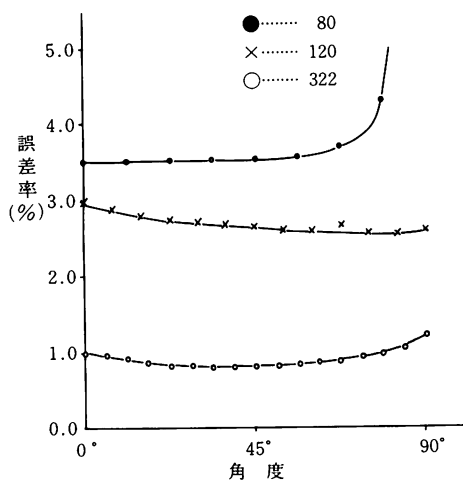
角度(°)	F E M 値	FEM値とR/Rr値 との誤差率
0.000	0.71764	0.4704
5.625	0.71762	0.4676
11.250	0.71756	0.4592
16.875	0.71750	0.4508
22.500	0.71743	0.4410
28.125	0.71738	0.4340
33.750	0.71735	0.4298
39.375	0.71734	0.4284
45.000	0.71734	0.4284
50.625	0.71737	0.4326
56.250	0.71741	0.4382
61.875	0.71749	0.4494
67.500	0.71759	0.4634
73.125	0.71774	0.4844
78.750	0.71795	0.5138
84.375	0.71831	0.5642
90.000	0.71946	0.7252

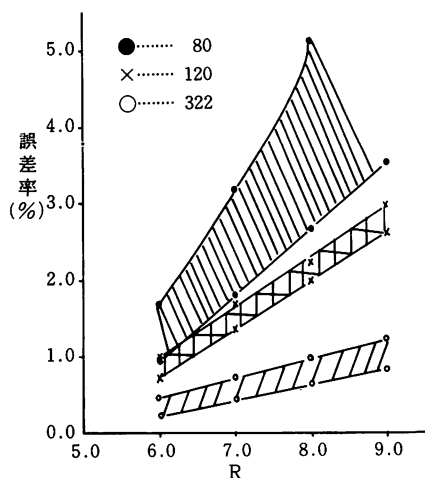
表3-c. $Rr=8.0$, $R/Rr=0.625$

角度(°)	FEM値	FEM値とR/Rr値との誤差率
0.000	0.62946	0.7136
5.625	0.62939	0.7024
11.250	0.62927	0.6832
16.875	0.62915	0.6640
22.500	0.62904	0.6464
28.125	0.62897	0.6352
33.750	0.62892	0.6272
39.375	0.62890	0.6240
45.000	0.62891	0.6256
50.625	0.62895	0.6320
56.250	0.62901	0.6416
61.875	0.62911	0.6576
67.500	0.62924	0.6784
73.125	0.62941	0.7056
78.750	0.62965	0.7440
84.375	0.63002	0.8032
90.000	0.63103	0.9648

図-(7)-a $Rr=6.0$ の誤差率表3-d. $Rr=9.0$, $R/Rr=0.5555$

角度(°)	FEM値	FEM値とR/Rr値との誤差率
0.000	0.56108	0.9954
5.625	0.56083	0.9504
11.250	0.56058	0.9054
16.875	0.56039	0.8712
22.500	0.56024	0.8442
28.125	0.56015	0.8280
33.750	0.56010	0.8190
39.375	0.56008	0.8154
45.000	0.56009	0.8172
50.625	0.56014	0.8262
56.250	0.56022	0.8406
61.875	0.56034	0.8622
67.500	0.56050	0.8910
73.125	0.56071	0.9288
78.750	0.56099	0.9792
84.375	0.56138	1.0494
90.000	0.56225	1.2060

図-(7)-b $Rr=7.0$ の誤差率図-(7)-c $Rr=8.0$ の誤差率図-(7)-d $Rr=9.0$ の誤差率



図一(8) 各要素数における誤差範囲

また、図一(8)に各要素分割の誤差の範囲を示してみた。この図から分割を多くした場合の誤差の度合がよくわかる。ただ図の上で要素数 120 と要素数 322 の誤差範囲を比較してみると、要素数 120 の方がその範囲が少なくなっている。これは三角要素の形状が要素数 120 の方が、より正三角形に近い分割形状になったことに起因しているようであるが、この点の細かな分析までは至っていない。

4. ま と め

3. の ii) の結果より軸対称性を有する規則性のある分割が可能な問題については分割を細かく

することにより、かなりの精度が得られるものと考えられる。しかしながら定量的な裏付けまでは至らなかった。

実際の有限要素法の活用は形状の複雑な問題においてであり、この点からみれば、分割を細かくすることはもちろんのことであるが、その分割の形状にも大きく左右されるであろうことは十分に予想できることである。

また、電界の誤差についてであるが、節点数 188, 要素数 322 の場合について述べると、最小 0.5% から最大 15% までの広がりが見られた。電位のそれは最小 0.2% から最大 1.2% の範囲にあり大きな違いがある。この一つの要因は、電位の計算は軸対称三次元として解析されたものであり、ここで求めた電界は、電位を二次元的に取り扱い

$$E = \text{grad } \phi = -(\partial \phi / \partial x \mathbf{e}_x + \partial \phi / \partial y \mathbf{e}_y)$$

として計算したことにより、より大きな誤差となってあらわれたものと考えられる。

参 考 文 献

- [1] 藤島豊, 佐藤雄二, 鷲巢慎: 有限要素法による軸対称三次元開放領域問題の解析, 苫小牧高等専紀要, 才 15 号, 1980
- [2] Shin WASHISU, Ichiro FUKAI, Michio SUZUKI: Extension of Finite-Element Method to Unbounded Field Problems, Electronics Letters, Vol15, No.24, pp772~774, Nov.1979
- [3] 加川幸雄: 電気・電子のための有限要素法入門

(昭和 55 年 11 月 28 日受理)

