

高等専門学校における数学と他教科との関連 II

—— 機械工学科について ——

小 野 寺

隆*

The Relation between Mathematics and other Curriculums
in the Technical College, II.

—— with Mechanical Engineering Curriculums ——

Takashi ONODERA

要 旨

前稿 [4] **に引き続き、数学と他教科との関連を考察し、今回は機械工学科科目の中から数学教材に
適当であると思われるもののみ探し出すことを行ってみた。さらに他専門教科にも逐次およぼすつもりであ
る。

Synopsis

As a continuation of the last paper, we have paid attention to the relations between mathematics
and other curriculums in the Technical College, and we have looked up some examples for mathe-
matics in mechanical engineering curriculums.

§ 1. は じ め に

高等専門学校（以下「高専」と略記する。）にお
ける数学教育のあり方 [3] の基本理念に立脚し
た考察の一つとして、高専における数学と他教科
との関連について前稿 [4] で論述した。そこで
は高専における数学教師のわれわれが、数学の応
用を期待している技術系学生に、数学的思考のみ
を強調しすぎていないだろうかとの反省のもと
に、教材を精選して他教科の中から積極的に数学
教材として適当なものを探し出す心構えを持ち続
けなければならないことを力説した。そして先ず
最も手近なところとして、物理、化学の中から数
学の応用教材として採りあげ得る具体例を示し
た。それ等の例題を早速教室で実践した結果、学
生の反応が予期以上に強いことを知り、引続き専
門各教科へも及ぼす意欲が湧き、今回は機械工学
科科目について検討してみた。その報告の前に、

今般の中学校教育課程の改訂の高専教育に与える
影響について言及しておく。

§ 2. 中学校教育課程の改訂と高専教育

「創設当時は 10.6 倍もあった入学競争率が近年
は 2 倍強にすぎなくなった。この傾向が続けば、
学生の素質は公立普通高校とはほとんどかわらな
くなるものと思われる。現在すでに当初高専が目
標とした教育水準についていけない不適応者が
20%にものぼり、しかも増加の傾向にある。」
（[6], [7], [8] 等）との声が聞かれてからす
でに 10 年になる。そしてこの危惧の度は深くこそ
なれ、少しも良い方向に向ってはいない。その上、
明年（昭和 57 年）4 月から新教育課程で学んだ中
学生を受け入れることになる。今回の中学校教育
課程の改訂の基本方針 [2] の 4 項目のうち、特
に「ゆとりある充実した学校生活を実現するため
に、各教科の標準時間を削減し、地域や学校の実
態に即して授業時数の運用に創意工夫を加えるこ
とが出来るようにすること」と、「学習指導要領に

* 教 授 一般教科数学

** [] 中の番号は論文末の文献参照番号を示す。

定める各教科等の目標、内容の中核的事項にとどめ、教師の自発的な創意工夫を加えた学習指導が十分展開出来るようにすること」は、まさしく「学校を取り巻く社会状況の変化、学校教育の現状の問題等を考慮」した適切な改正方針である。しかしこのことは、地域や学校の実態に応じた自由度の多い教育課程を許容することであり、その教育を受けた入学生を広範囲な地域から迎えるわれわれ高専側としては新たな課題を与えられたことになる。

扇谷尚〔9〕は新学習指導要領を、「高等学校を国民教育機関との割切った高校観に立ち、高校・大学間よりも中学校・高校の連続的関係に焦点を移動させた」とみており、「高校と大学の間の連続関係を、学習指導要領に期待することはできない」ので、「大学進学に必要な力は、大学側で考えてほしいとの姿勢がうかがわれる」と云い切っている。このような新教育課程の性格を高専としても同様に受け止めねばならないのでないか。従って、先に述べた入学生個々の質的問題に加え、大巾な教育課程の改正という状況下において、専門的知識や、実践的能力を低下させることなく、高専教育を、従来通りに遂行することは至難なことであろう。

§ 3. 数学と機械工学科科目との間

われわれが〔3〕で詳述したように、今回中学校で20項目以上削除された数学教材の殆んどは所謂現代化教材であり、内容の点では高専の数学を進めていく上での支障は特に考えられない。しかし上記中学校学習指導要領改訂の基本方針が遵守される時は、数学週当り授業時間数1時間減と相俟って、その影響は極めて大と思われる。これらの状況変化に対し即応する特效薬などはない。われわれとしては、徒らに右顧左弁することなく先ず教材の精選を第一とし、常に学生の学習意欲を掻き立てる教授法の模索を続けるという地道な努力が何よりも大切なのでなかろうか。

ここで教材精選の手がかりとして、機械工学科全科目について、本校使用教科書とその関連専門書を調べて数学内容を項目別に分類したのが表1である。項目名は岩波数学辞典の部門別項目表〔10〕に、科目名とその配列は新旧の高等専門学校設置基準〔1〕による。

表1の作成を通じてつぎのことが解った。

(1) 解析学(微分・積分学)が中心である。

(2) 常微分方程式および簡単な偏微分方程式の使用頻度は極めて高いが、Fourier・Laplace変換や多項式近似は他学科程用いられていない。

(3) 関数論は、解析関数および等角写像が水力学、熱力学に僅かに見受けられる程度である。

(4) 確率・統計は殆んど現れない。

(5) 2次曲線や2次曲面の数学的諸性質の応用度は極めて少ない。

§ 4. 機械工学科科目の採り上げ方

高等専門学校教育方法等調査会機械部会報告〔5〕から「高専における数学教育は工学に役立つことを目標とすることが肝要である」との指摘を受けるまでもなく、そのことは高専の数学担当者の誰もが心の底では意識している。問題はどのような気持をどのような形で具体化するかということである。実際、舞鶴高専では機械工学で必要とする数学を補うために、機械工学科で担当する「演習」の時間を第1学年、第3学年そして第5学年に設けて実施しているとの実践報告が小西経男〔12〕、〔13〕によりなされている。このような積極的な取組み方は高く評価されてよい。ただわれわれがここではあくまでも数学教科の中に機械工学科科目の教材を採り上げようとしているのであって、数学と異なる場で扱うこととはまた別である。

本世紀数学教育の第一人者であるジョン・ペリー〔18〕がいつているように「 x のどんな関数でも微分をし、積分もよくでき、垂足曲線とか楕円積分とかの難かしい話題も心得てる人が、その数学的知識をどれだけ技術的問題にふりむけ得るかということが問題である。 x と y とに物理的意味を与え、文字に $力$ や $力$ を与える。とたんに数学の本の中で最も易しい問題が極めて難かしい問題に変わってしまう」ということは、われわれもしばしば体験するところである。常に抽象化や一般性を目標に話が進められる数学の性格上、数学教科の中で応用教材を扱うのでなければ、同一事項であっても他教科の中では全く異質のものと受けとられ易い。従って、出来得れば数学の中で数学担当者が他教科教材を扱うことが、より必要なのでなかろうか。ただこの場合さきに〔3〕、〔4〕で指摘しておいたように「すぐに役立つ知識は、すぐに役立たなくなる」ことを常に念頭におき、「数学的純粹思考の基盤の上に他教科へ通用する力を養う」という数学教育の指導理念は堅持したい。

ここで前稿〔4〕の例題取扱い上の留意点を機械工学科向きに直したものを示しておく。

- 1) 数学の応用題として利用するのであって機械工学科で指導する内容そのものを教えようとしてはならない。
- 2) しかし他教科教材だからといって曖昧無責任な扱い方をせず、数学教師自身が十分その内容を理解してから臨むこと。
- 3) 専門科目で修得した後の教材を採り上げる。
- 4) 記号や文字は必ずしも専門科目と同一であることを要しないが、用語は学術用語集〔11〕に従い適確に用いる。
- 5) 単位は可能な限り無名数とする。

表1 機械工学科科目数学内容一覧

科 目		応用物理	情報処理	材料力学	材料学	熱力学	水力学	機械工作法	設計法・設計図	機構学	工力学	図学	機械力学	自動制御	計測工学
A 集合・論理	記 号 論 理		○												
	集 合														
	実 数	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	複 素 数	○	○			○	○						○	○	○
	Boole 代 数		○												
B 代 数 ・ 幾 何	代 数 方 程 式	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○		○	○	○
	行 列 式			○									○	○	
	行 列												○		○
	ベ ク ト ル	○	○	○			○			○	○		○	○	
	Euclid 幾 何 学	○		○			○		○	○	○	○	○		
	円 錐 曲 線	○					○			○		○			
	2 次 曲 面											○			
C 解 析 学	座 標 (極・円柱等)	○			○	○	○					○			○
	指 数 ・ 対 数 ・ 双 曲 線 関 数	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○		○	○	○
	3 角 ・ 逆 3 角 関 数	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○
	微 分 法	○	○	○	○	○	○		○	○	○		○		○
	偏 導 関 数	○	○	○	○	○					○		○		○
	積 分 法	○	○	○	○	○	○		○		○		○	○	○
	重 積 分	○		○		○	○								
	線 ・ 面 積 分	○		○		○	○							○	
	Fourier 級 数 ・ 変 換		○											○	○
D 等 角 写 像	Laplace 変 換													○	
	多 項 式 近 似		○												
	正 則 関 数	○				○	○								
E 常 微 分 方 程 式	等 角 写 像					○	○								
	常 微 分 方 程 式	○	○	○	○	○	○		○	○			○	○	
	偏 微 分 方 程 式	○		○		○	○						○		
F 確 率 分 布 ・ 過 程	楕円・双曲・放物型偏微分方程式	○		○			○								
	確 率 分 布 ・ 過 程		○												○
	Markov 連 鎖 ・ 過 程		○												
G 統 計 量	統 計 量														
	次 元 解 析	○				○	○								

(注) 表中部門別記号のDは「関数論」、Eは「関数方程式」、Fは「確率統計」、Gは「力学」である。

- 6) 雑多な問題を数多く採り上げることなく、極力厳選した例題を各学年毎通年1, 2題(物理, 化学の例題を加えて2, 3題)とし、それに十分時間をかけて丁寧に指導をする。

§5. 例 題

以下の叙述に講義式を用いたのは、そのまま直ちに講義に活用でき得るためもあるが、他教科を扱うが故に慎重を期した結果でもある。なお説明に用いた数学科の授業項目は〔4〕に発表したものに從った。

例題 II-1. 製図通則 ([28], [29]) によれば, 図面の大きさは, 図面紙の仕上り寸法で, 紙加工仕上寸法 [27] の A 列 0 番 (A 0) から A 列 6 番 (A 6) までによると定められている。ここで A 0 は面積が 1 m^2 の長方形であり, A 1 は A 0 の半截, A 2 がさらにその半截の相似形ときめられている。従って図-1 のように A 0 の縦を a , 横を b とするとき A 1 の縦と横はそれぞれ $b/2, a$ である。

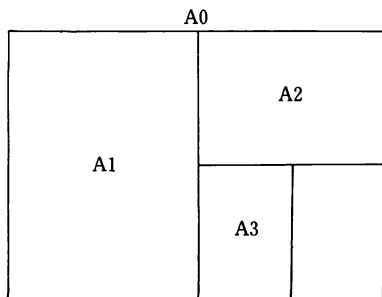


図-1

従って

$$a : \frac{b}{2} = b : a$$

となる。よって $a^2 = b^2/2$ より $b = \sqrt{2}a$ を得る。すなわち縦と横の比は常に $1 : \sqrt{2}$ となっている。ここで面積 $1 (\text{m}^2)$ の A 0 の縦を x とすると, 横は $\sqrt{2}x$ であるから

$$x\sqrt{2} \cdot x = 1$$

より $x = 2^{-1/4}$ となり mm 単位にまめめると, 縦 841, 横 1189 を得る。

なお B 0 は面積 $1.5 (\text{m}^2)$ であるので同様にして

$$x\sqrt{2} \cdot x = 1.5$$

より $x = 1.5^{1/2} \times 2^{-1/4}$ となり, 縦 1030, 横 1456 を得る。実際 JIS [27] より各列 6 番までを示すと表 2 のとおりである。

表 2 紙加工仕上寸法

(単位mm)

	A 列	B 列
0	841×1,189	1,030×1,456
1	594× 841	728×1,030
2	420× 594	515× 728
3	297× 420	364× 515
4	210× 297	257× 364
5	148× 210	182× 257
6	105× 148	128× 182

つぎに A 0, A 1, A 2, ..., A_n の縦(または横)をそれぞれ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ とすると

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} a_0, a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1, \dots, a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} a_{n-1}$$

であるから

$$a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n a_0$$

となる。すなわち数列 $\{a_n\}$ は初項 a_0 , 公比 $1/\sqrt{2}$ の G. P. をなしているのである ([26])。

この例題は機械工学科第 1 学年後期の数列の教材として用いる。数学的内容としては極めて初歩的なものであり, 応用教材として採り上げるには多少の躊躇はある。しかし機械工学科学生と極めて縁の深い製図用紙にこのような数学との係り合いのあることを発見させることにより, 数学と専門科目との橋渡しの役割をする好例と思う。なお縦, 横の寸法を半対数方眼紙にプロットさせ 1 直線になることから, 等比数列になることを演繹させるのも一方法である。

例題 II-2. 図-2 はピストン—クランク機構を示す。ピストン A は往復運動, クランク B は回転運動し, 連接棒 AB は往復回転の両運動を同時に行う。A はクランク 1 回転で A₀A₁ 間を 1 往復する。

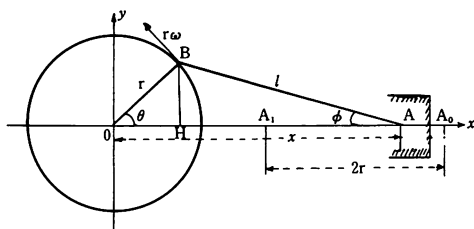


図-2

いま $OA = x$ とおくと図より

$$x = OH + HA = r \cos \theta + l \cos \phi.$$

ここで $\sin \phi / r = \sin \theta / l$ を用いると

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \sin^2 \phi} = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \theta}$$

であるから $\lambda = r/l$ とおくと

$$x = r(\cos \theta + \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta})$$

を得る。 $\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta}$ に 2 項定理を用いると

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta} = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \theta - \frac{\lambda^4}{8} \sin^4 \theta - \dots$$

となり、さらに

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta), \quad \sin^4 \theta = \frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta)$$

を用いると

$$x = r \left\{ \cos \theta + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{4} - \frac{3}{64} \lambda^3 - \dots \right) + \left(\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda^3}{16} + \dots \right) \cos 2\theta + \dots \right\}$$

ここで一般に $1/5 < \lambda < 1/3$ であるので r^3 以下を捨てて

$$x = r \left\{ \frac{1}{\lambda} + \cos \theta - \frac{\lambda}{4} (1 - \cos 2\theta) \right\}$$

を得る。

つぎにクランクが一定の角速度 ω で回転すると、ピストン速度 v は

$$v = -\omega r (\sin \theta + \frac{\lambda}{2} \sin 2\theta)$$

となる。ここで速度は $0 \leq \theta \leq \pi$ では負であることに注意しよう。

つぎにピストンの最小速度 (絶対値が最大の負数) を求めてみる。いま

$$\frac{dv}{d\theta} = -\omega r (\cos \theta + \lambda \cos 2\theta) = 0$$

とおき、 $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ を用いて $\cos \theta$ を求めると

$$\cos \theta = \frac{1}{4\lambda} (-1 \pm \sqrt{1 + 8\lambda^2})$$

である。ここで $|\cos \theta| \leq 1$ であることから複号のうち負号を捨てて

$$\cos \theta = \frac{1}{4\lambda} (-1 + \sqrt{1 + 8\lambda^2})$$

を得る。従って

$$\theta = \cos^{-1} k, \quad k = \frac{1}{4\lambda} (-1 + \sqrt{1 + 8\lambda^2})$$

となる。 $0 \leq \theta \leq \pi$ の値に対する $dv/d\theta$ の増減状態を表示すると

θ	0	$\cos^{-1} k$	π
$\frac{dv}{d\theta}$	-	0	+
v	$\searrow$	最小	$\nearrow$

であるから、 $\theta = \cos^{-1} k$ のとき最小速度となる。いま $\lambda = 1/5$ のときの θ を求めると $\theta \doteq 79^\circ 10'$ となる。

さらにピストンの加速度を α とすると

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{dv}{d\theta}$$

$$= -\omega^2 r (\cos \theta + \lambda \cos 2\theta)$$

を得る ([19], [22], [39])。

この例題は第2学年の微分法の応用教材に用いる。ピストン—クランクそのものは第5学年の機械力学で扱うようであるが、低学年の設計法や、工業力学などの基礎事項の中に現れて、機械工学科学生にとっては馴染み深いものである。1例題の中に数学的素材が極めて頻繁に用いられる点では真に恰好の例題である。2次関数、3角関数、関数の展開、微分法、そして極大極小など縦横に使いこなして問題解決する喜びを味わわせたい。とかく数学では、各教授項目毎に相当高度のことを学習するものの、常にすっきりと精練された例題が多く、それ等が相互に入り込んで関連し合う好例は少ない。このことが数学と他教科の結び付けを阻害する主な要因であるのだが。

例題 II-3. 助変数 t を含む方程式

$$(1) \quad F(x, y, t) = 0$$

によって表わされる無限に多くの曲線の集合があって、これらの曲線がすべて一定曲線

$$(2) \quad \phi(x, y) = 0$$

に接するとき、(2)を曲線族(1)の包絡線という。これを求めるには

$$F(x, y, t) = 0, \quad F_t(x, y, t) = 0$$

の2方程式から t を消去するとよいことは既に学んでいるとする ([16], [17] 等)。

つぎに曲線

$$(3) \quad y - f(x) = 0$$

の上の点 $(t, f(t))$ における法線は

$$(4) \quad (x - t) + f'(t)(y - f(t)) = 0$$

で与えられる。 t は助変数であるから、(4)は一つの直線族を表わす。(4)の両辺を t で偏微分すると

$$(5) \quad -1 + f''(t)(y - f(t)) - f'(t)^2 = 0$$

となる。(4)と(5)とより

$$(6) \quad \begin{cases} x = t - \frac{1 + f'(t)^2}{f''(t)} f'(t) \\ y = t + \frac{1 + f'(t)^2}{f''(t)} \end{cases}$$

を得る。(6)は法線族(4)の包絡線の媒介変数表示である。

さて、ある輪郭に巻かれた糸をピンと張りながら解きほぐすとき、糸上の1点はその輪郭曲線 E を基礎曲線とする軌跡をえがく。これを曲線 E の伸開線 (involute) といい、逆に一つの曲線 C を伸開線として持つような基礎曲線を、曲線 C の縮閉線 (evolute) という。特に基礎曲線が円のときの伸開線は、歯車の歯形として用いられることが多い。

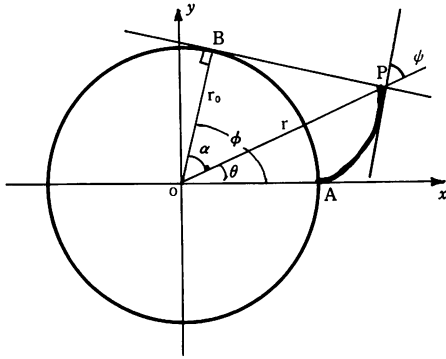


図-3

図-3のように半径 r_0 の円の円周上に定点 A を定め、円周上の任意の点 B において円に接線 BP を引き、 $\overline{PB} = \widehat{AB}$ となる点 P の軌跡を求めると円 O の伸開線が得られる ([32], [35])。

図より直ちに

$$(1) \quad r = \frac{r_0}{\cos \alpha}$$

であり、また

$$\theta = \phi - \alpha, \quad \phi r_0 = \widehat{AB} = \overline{PB}$$

より

$$\theta = \frac{\overline{PB}}{r_0} - \alpha$$

従って

$$(2) \quad \theta = \tan \alpha - \alpha$$

を得る。この θ をインボリュート関数 α とよび $\text{inv} \alpha$ で表わし、古くからその関数表が作られている ([33], [34] 等)。

いま伸開線を極方程式 $r = f(\theta)$ で表わす。伸開線上の1点 $P(r, \theta)$ における接線と OP とのなす角を ψ とすると

$$\tan \psi = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = r \frac{d\theta}{dr}$$

なる関係がある。ここで

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dr}$$

と、(1), (2)を用いると

$$\begin{aligned} \tan \psi &= r \frac{d\theta}{dr} \\ &= r(\sec^2 \alpha - 1) \frac{\cos^2 \alpha}{r_0 \sin \alpha} = \frac{r}{r_0} \sin \alpha \\ &= \frac{r}{r_0} \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r} = \tan \alpha \end{aligned}$$

となり、 $\psi = \alpha$ が得られる。

基礎曲線が円以外の場合も同様の結果となることが簡単に解る ([30], [31])。すなわち伸開線 C 上の点 P における法線は縮閉線 E の接線 PB である。

前記の包絡線(6)は曲線(3)の縮閉線を与える式であり、また曲線(3)上の点 $(t, f(t))$ における曲率中心を与える式と同一でもある。従って包絡線(6)はまた曲線の曲率中心の軌跡でもある。

一般に数学上では平面曲線の曲率中心の軌跡をその曲線の縮閉線と称し、その縮閉線に対して、もとの曲線を伸開線と呼んでいる。

この例題は第3学年の偏微分の応用教材として用いる。機械工学科ではインボリュートは第1学年の図学から始まり、機構学、機械設計で引続き取扱われ学生には親しみのある教材である。しかし数学では、より一般化したものだけを採り上げるだけで、インボリュート歯形が数学での伸開線の特別の場合であることなどに触れないで済まして了うのが普通である。多少時間はかかるが、この例題のように順を追って講義することにより、専門科目との係わり合いを知らせたい。数学でも、包絡線、縮閉線、曲率円の中心の軌跡などそれぞれ別項目で扱われているものが一つに合流する楽しさを知らせたい。なお特異点や、微分可能条件などに深入りしないよう注意すべきであろう。

例題 II-4. 質量 $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ なる質点の位置を $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ とし、これらの点から定直線 g に至る距離がそれぞれ $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ であるとき

$$I_g = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

をこれらの質点系の直線 g に関する2次モーメントまたは慣性モーメント (moment of inertia) という。

いま図-4のように点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ と z 軸と

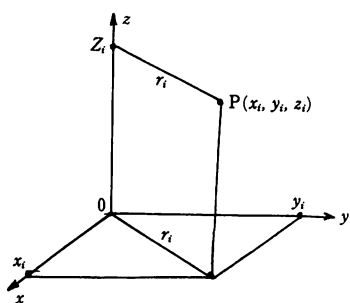


図-4

の距離を r_i とすると

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$$

であるから、軸 z のまわりの 2 次モーメント I_z は

$$(1) \quad I_z = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) m_i$$

となる。同様に x および y 軸に関しては

$$(1') \quad I_x = \sum (y_i^2 + z_i^2) m_i, \quad I_y = \sum (z_i^2 + x_i^2) m_i$$

となる。

いま平面図形 A の各点 $P(x, y)$ に密度 $\rho(x, y)$ で質量 Δm_i が分布しているときは

$$(2) \quad I_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n y_i^2 \Delta m_i \quad (z_i = 0)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho_i y_i^2 \Delta x \Delta y$$

すなわち

$$(3) \quad I_x = \iint_A \rho(x, y) y^2 dx dy$$

であり、同様にして

$$(4) \quad I_y = \iint_A \rho(x, y) x^2 dx dy, \quad I_z = I_x + I_y$$

となる。この場合単一積分を用いてもできる。例えば I_y を求めるのに、 y 軸よりの距離 x_i と $x_i + \Delta x_i$ との間の質量を $\Delta m_i = f(x_i) \Delta x_i$ とすると

$$I_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i^2 f(x_i) \Delta x_i$$

であるから

$$(5) \quad I_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2 f(x) dx \quad (x_1 \leq x \leq x_2)$$

として求められる。

空間図形 D の各点 $P(x, y, z)$ に密度 $\rho(x, y, z)$ の質量が分布しているときは、平面図形の場合と全く同様にして

$$(6) \quad \begin{cases} I_x = \iiint_D \rho(x, y, z) (y^2 + z^2) dx dy dz, \\ I_y = \iiint_D \rho(x, y, z) (z^2 + x^2) dx dy dz, \\ I_z = \iiint_D \rho(x, y, z) (x^2 + y^2) dx dy dz, \end{cases}$$

でそれぞれの 2 次モーメントを求められる ([14], [15])。

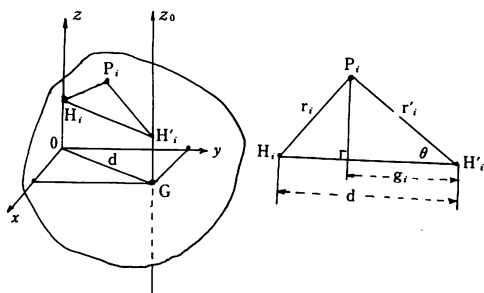


図-5

さらに図-5のようにこの質点系の質量の中心 G を通り、軸 z との距離が d である平行軸 z_0 のまわりの 2 次モーメントは P_i から z_0 までの距離を r'_i とすると

$$I_0 = \sum m_i r_i'^2$$

であり、図-5 から直ちに

$$r_i^2 = r_i'^2 + d^2 - 2r_i' d \cos \theta = r_i'^2 + d^2 - 2g_i d$$

となる。従って

$$I_z = \sum (m_i r_i'^2 + m_i d^2 - 2d m_i g_i)$$

を得る。ここで $\sum m_i g_i = 0$ に注意すると

$$I_z = I_0 + M d^2$$

となり、 I_0 を求めると I_z は直ちに解るので、以下 I_0 のみ求めることにする。また材料力学等においては密度一様な材料を考える場合が殆んどなので、 ρ を一定としよう。

縦、横の長さがそれぞれ a, b の長方形の中心を通り、縦の辺に平行な軸のまわりの 2 次モーメントを求めると図-6 より(5)式の $f(x)$ は ρa であるから

$$I_0 = I_y = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho a x^2 dx = \frac{\rho}{12} a b^3 = M \frac{b^2}{12}, \quad (M = \rho a b)$$

となる。これを重積分を用いて求めると(4)より直ちに

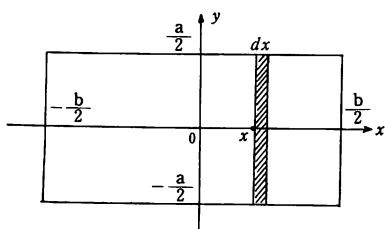


図-6

$$I_0 = I_y = \iint_A \rho x^2 dx dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho x^2 dx = M \frac{b^2}{12}$$

を得る。

つぎに半径 a の円板の中心を通して、これに垂直な直線のまわりの2次モーメントを求めよう。

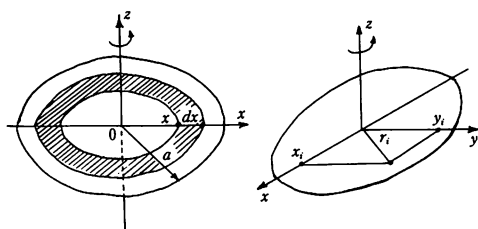


図-7

図-7より(5)を用いると

$$I_0 = I_z = \int_0^a x^2 \cdot \rho 2\pi x dx = \frac{\pi \rho}{2} a^4 = M \frac{a^2}{2},$$

$$(M = \pi \rho a^2)$$

を得る。重積分を用いると(1)と(3), (4)より

$$I_0 = I_z = I_x + I_y = \iint_D \rho(x^2 + y^2) dx dy$$

であり、極座標変換をすると

$$I_0 = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 dr d\theta = M \frac{a^2}{2}$$

と同一結果を得る。

最後に半径 a の球の中心軸のまわりの2次モーメントを求めよう。

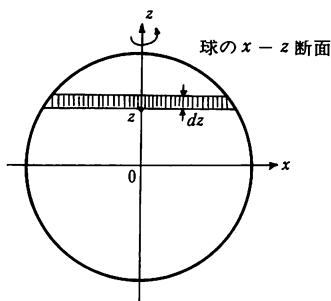


図-8

図-8のように z と $z+dz$ との間にある質量 $\rho \pi x^2 dz$ の z 軸のまわりの2次モーメントは前例より

$$\frac{x^2}{2} M = \frac{x^2}{2} \cdot \rho \pi x^2 dz$$

であるから球全体に対しては

$$I_0 = I_z = \int_{-a}^a \frac{x^2}{2} \rho \pi x^2 dz$$

$$= \rho \pi \int_0^a (a^2 - z^2)^2 dz = M \frac{2}{5} a^2,$$

$$(M = \frac{4}{3} \pi \rho a^3)$$

となる。重積分を用いると(6)より直ちに

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \rho dx dy dz$$

から円柱座標変換 ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$) を行くと

$$I_z = 2 \rho \int_0^a dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} r^2 \cdot r dr$$

となりこれを計算して同一結果を得る ([24], [36], [37], [38])。

この例題は第3学年の後期の重積分の応用教材として用いる。本例のみならず梁の撓みや、撓み角を計算するために必要な断面2次モーメントとも合せて2次モーメントは材料力学の主要項目であり他教科への応用範囲も少なくない。一応2次モーメントの主なるものは一覧表に掲げられているとはいえ、単にハンドブックを引き捜す作業だけでなく、実際に計算し考え出す能力への自信を与えることと、さらに中学校以来長年月に亘って学習して来た数学の威力を会得せしめる意味からも多少の煩さを厭わずに用いたい例題である。殊に単一積分と重積分の両者を駆逐する楽しさもあることながら、最後の問題では明らかに重積分による解法の簡明さを会得させたいものである。

例題II-5. 波動が媒質中を x 方向だけ一定の速さで伝わるときの変位 y を考える。

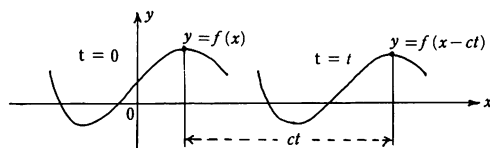


図-9

いま図9に示すように、時刻 $t=0$ のときの y を $f(x)$ とすると $t(>0)$ だけ経た時 x 方向に

波動が伝わる

$$y=f(x-ct)$$

である。波動が $-x$ 方向に伝わり

$$y=g(x+ct)$$

となる。従って $+x$ 方向の波動と $-x$ 方向の波動が同時に伝わる時の変位は

$$(1) \quad y=f(x-ct)+g(x+ct)$$

で表わされる。(1)式を x, t でそれぞれ2回微分すると直ちに

$$(2) \quad c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

を得る。この(2)式を波動方程式という。

なお(2)から(1)を導きだしておこう。 $x-ct=u$, $x+ct=v$ なる変数 u, v を考える。すなわち $y=y(u(x, t), v(x, t))$ であるから

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = -c \left(\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v} \right)$$

となり、さらに t で偏微分すると

$$(3) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right)$$

となる。変数 x についても同様にして

$$(4) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$$

となるので(3), (4)を(2)に代入すると

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0$$

を得る。従って

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \phi(u)$$

となり結局

$$y = \int \phi(u) du + g(v) = f(u) + g(v)$$

の(1)が求められる。この方程式は任意関数 $f(u)$, $g(v)$ を含むので偏微分方程式(2)の一般解である。ただ(2)の解を求めるには $\partial/\partial t = D_t$ なる演算子を用いるのが普通である。

つぎに断面積が一定で密度が一様な棒がある。

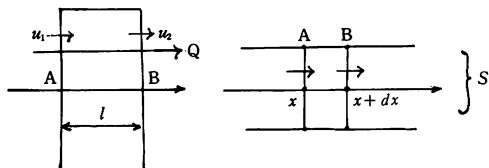


図-10

熱が x 軸方向にのみ流れるとき、図-10に示すように距離 l なる A, B 断面における温度をそれぞれ u_1, u_2 ($u_1 > u_2$) とする。

A から B を通りすぎて流れる熱量 Q は時間 t と断面積 S と、そして温度の勾配 $(u_1 - u_2)/l$ に比例することが実験的に知られている(実際はBiotが1804年に導入したが通常Fourierによるとされている。[43])。すなわち

$$(1) \quad Q(t) = kSt \frac{u_1 - u_2}{l}$$

ここで $k(>0)$ は物質によって定まる定数で、熱伝導率という。温度の勾配が場所毎に異なるときは、その勾配は $\partial u(x, t)/\partial x$ となる。いま A, B 断面の x 座標をそれぞれ $x, x+dx$ とすると、 dt 間に A を x の向きに流れる熱量は

$$(2) \quad -kS \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dt$$

である。負号は熱流が x の正の向きのときに熱量を正にするためにつけた。このとき B での温度は

$$u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx$$

であるから、 B の温度勾配は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx) \\ = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \end{aligned}$$

となり、 dt 間に B を x の向きに流れる熱量は

$$(3) \quad -kS \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) dt$$

であるから、結局 A, B 間に流入する熱量は(2)-(3)より

$$(4) \quad kS \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dt$$

となる。この熱量がすべて棒の温度上昇に費やされるとするときは、棒の密度を ρ , 比熱を c 上昇温度を du とすると、 dt 間にここに集った熱量は

$$(5) \quad \rho c S dx du = \rho c S \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt \right) dx$$

となる。熱エネルギー保存の法則によって(4)=(5)であるから

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を得る。([20], [21])。これを熱伝導方程式という。静止した空気中に漂うガス濃度を $u(x, t)$ とするときまた(6)と同一関係式を得る。この場合は拡散方程式という。

(6)の解を求めるのに $u = X(x) T(t)$ とおいてみ

ると

$$u_t = X \frac{dT}{dt}, \quad u_x = T \frac{dX}{dx}, \quad u_{xx} = T \frac{d^2X}{dx^2}$$

であるから、(6)より

$$X \frac{dT}{dt} = a^2 T \frac{d^2X}{dx^2} \quad (a^2 = \frac{k}{c\rho})$$

となる。両辺を XT で割ると

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = a^2 \frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2}$$

を得る。ここで左辺は t のみ、右辺は x のみの関数であり、 t と x とは互に独立であるから、両辺は定数に等しくならねばならぬ。それを $-\alpha$ ($\alpha > 0$) とすると

$$(7) \quad \frac{dT}{dt} + \alpha T = 0$$

$$(8) \quad \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{\alpha}{a^2} X = 0$$

となる。(7)、(8)の線形常微分方程式を解くのに、(7)より直ちに

$$T(t) = c_3 e^{-\alpha t}$$

が求まり、(8)は、補助方程式 $y^2 + \alpha/a^2 = 0$ の2根が $\pm(\sqrt{\alpha}i)/a$ であるから

$$X(x) = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a} x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a} x\right)$$

となり

$$u(x, t) = e^{-\alpha t} \left\{ c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a} x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a} x\right) \right\}$$

を得る ([23], [24], [25], [40], [41], [42], [43])。

この例題は第4学年の偏微分方程式の最後の教材に用いる。自然現象の研究に伴って現れたという偏微分方程式は専門課程が進むにつれて随所に見られる。しかし学生は偏微分記号に違和感を持ち、なかなか馴染んでくれようとなし。教える側としても具体的事象を取り上げる煩さもある。ここで水力学、熱力学（電気工学科では電気磁気学）などで扱われる直観的で親しみ易いと思われる波動現象や熱伝導現象を取り上げて、微分方程式を作りそしてまた解く作業の中で偏微分方程式といえども常微分方程式とそんなに異質のものではないとの感覚を植えつける効果を期待したい。

§6. お わ り に

数学教師のわれわれは、数学の純粋世界のみを

求め、応用世界への興味欠けばかりでなく、そこに踏みこむことの怖れからはなかなか脱皮できない。従って「工学に役立つ数学を」と云われても簡単に腰を上げ得ないことは事実である。すなわち数学独自の関心事と、専門教科からの要請と、数学教育の立場との三者を有機的に調和させることには、予期以上の困難さがある。さらに今まで殆んど学ぶこともなかった専門科目の中から、離れ離れの項目を結び合わす作業等も加えては全く初歩的な誤謬を犯すこともしばしばである。この間にあって貴重な資料並に助言をいただいた本校大島聡範教授はじめ機械工学科教官各位のご好意に深く感謝を捧げる。

文 献

- [1] 文部省：高等専門学校設置基準，文部省令第32号（昭和52年4月1日），第23号（昭和36年8月30日）。
- [2] ———：中学校指導書教育課程一般編，ぎょうせい（1980），7-9。
- [3] 菅原弘道，小野寺隆：工業高等専門学校における数学教育のあり方，苫小牧高専紀要，第13号（1978），131-140。
- [4] 小野寺隆：高等専門学校における数学と他教科との関連，———，第16号（1981），155-166。
- [5] 高等専門学校教育方法等改善調査会機械部会報告：高専教育，創刊号（1978），71。
- [6] 高等専門学校教育研究会：これからの高専教育について，——— 第2号（1979），186-199。
- [7] 国立教育研究所編：日本近代教育百年史，第10巻（1973），429-439。
- [8] 大石修而：高専十年目の模索，工業教育，19巻第2号（1972），46-47。
- [9] 扇谷 尚：高等学校学習指導要領改訂にかかわる大学教育の問題点，一般教育学会誌，第3巻第1号（1981），22-26。
- [10] 日本数学会：岩波数学辞典（第2版），岩波書店（1968），19-23。
- [11] 文部省：学術用語集機械工学編，日本機械学会（1955）。
- [12] 小西経男：機械工学科のための数学に関する「演習」について，舞鶴高専紀要，第15号（1980），23-30。
- [13] ———：———（第2報），———，第16号（1981），21-32。
- [14] 矢野健太郎，石原 繁：科学技術者のための基

- 礎数学, 裳華房 (1963), 129-130。
- [15] 渡部孫一郎: 初等微分積分学, 裳華房 (1930), 169-172。
- [16] 吉田洋一: 微分積分学, 培風館 (1967), 284-286。
- [17] 岩切晴二: 微分積分学精説, ——(1960), 339。
- [18] ジョン・ペリー, 武田楠雄訳: 技術者のための微分積分学, 森北出版 (1959), 3。
- [19] 道脇義正: 工科のための演習微分積分, 東京図書 (1980), 60-61。
- [20] 西本勝之: 初学者のための微分方程式, 森北出版 (1958), 147-149。
- [21] 黒田 正: 応用偏微分方程式, 朝倉書店 (1965), 36-39。
- [22] 笹部貞市部: 微・積分学辞典, 聖文社 (1963), 1555-1556。
- [23] 入江敏博: 機械数学, 朝倉書店 (1972), 74-76。
- [24] 金原寿郎: 基礎物理学上巻, 裳華房 (1963), 104-109, 307-309。
- [25] 丹生慶四郎, 阿部寛治: 工業数学Ⅱ, 共立出版 (1976), 51-56。
- [26] 森口繁一: 工業数理の題材(1), 工業教育資料, 147号 (1979), 12-14。
- [27] 日本工業規格: 紙加工仕上寸法 (JIS P 0138)。
- [28] ———: 製図通則 (JIS Z 8302)。
- [29] 幸田 彰: 図学と製図, 培風館 (1957)。
- [30] 伊藤伊助: いろいろな曲線と曲面, 裳華房 (1979), 36-37。
- [31] 栗田 稔: いろいろな曲線, 共立出版 (1971), 84-85。
- [32] 明山正元, 歌川正博: 歯車の設計, オーム社 (1965), 5-9。
- [33] Buckingham: Manual of Gear Design 1, Machinery (1935)。
- [34] 成瀬政男: 歯車, 岩波書店 (1934)。
- [35] 山川出雲: 機構学, 朝倉書店 (1972), 136-138。
- [36] 金田数正: 工業力学, 内田老鶴圃新社, (1969), 211-214。
- [37] 鶴戸口英善他: 材料力学上巻, 裳華房 (1957), 165-168。
- [38] 川田雄一: 材料力学, ——(1965), 38-41。
- [39] 斎藤秀雄: 機械力学, 朝倉書店 (1972), 86-95。
- [40] 片岡義雄: 水力学, コロナ社 (1981)。
- [41] L. I. セドフ, 大橋義夫訳: 連続体力学, 森北出版 (1979)。
- [42] 藤本武助, 佐藤 俊: 伝熱学概論, 文献社 (1972), 5-12。
- [43] ギート, 横堀 進他訳: 基礎伝熱工学, 丸善 (1960), 5-31。

(昭和 56 年 11 月 30 日受理)

