エルゴート仮説に対する注意

新　谷　俊　忠*

A Remark On Ergodic Hypothesis.

By

T. SHINTANI

要　旨

エルゴート仮説は正しくない。

与えられた体系を一つ考え，その時間的経過を調べる。もし，時間経過とともに，Gibbsの考えた集団の持つ値を一様にとっていくならば，力学的量の集団平均をとったものが時間平均をとったものに等しくなる。即ち，

物理量（力学的量）の時間平均＝同じ量の集団平均

『物理学ではこのことを「エルゴート仮説」(ergodic hypothesis)[1]と呼び，通例この仮説が正しいと仮定して議論を進める。』(この仮説は前世紀末にL. BoltzmannとW. Gibbsによって要請された。)

確率論的立場から，「エルゴート仮説は正しくない」，即ち，この仮説は何等かの条件なしには成立しないことを注意しよう。(これは1)の立場と矛盾しない。)

$(\Omega,\ a,\ P)$を確率空間(probability space)とする。ΩからΩ自身の中への変換Tが可測(measurable)とは$A\varepsilon a$であれば　$T^{-1}A=\{\omega:\omega\in\Omega,\ T\omega\varepsilon A\}\ \varepsilon a$という意味である。集合$A\varepsilon a$は$T^{-1}A=A$のとき，($T$のもとで)不変(invariant)であると定義する。更に，不変集合をそれが測度0又は1を持つという意味で自明なものに限るときTはエルゴート的(ergodic)と云う。関数g(ω) (a－可測とする)は，もし，$g(T\omega)=g(\omega)\ a.\ e.$であれば，不変(invariant)であると云われる。「集合は，その定義関数が不変のときに限り不変である。」関数gが$a.\ e.$で定数のとき，gは自明であると云う。もしgが自明でない不変関数であれば，或るαに対し不変集合$\{\omega:g(\omega)\leqq\alpha\}$は真に0と1の間の測度を持つ。この様に，変換$T$は全ての不変関数が殆ど到る処定数であるときに限りエルゴート的である。

物理量fの空間Ω全体に亘る平均(即ち，fのルベーグ積分)を$E(f)$, $\int_\Omega f(\omega)P(d\omega)$, $\int_\Omega fdP$などで表わす。このとき，次の「エルゴート定理」はよく知られている。

定理[2]　もしfが積分可能(即ち$f\varepsilon L^1(\Omega)$)であれば，積分可能な不変関数$\hat{f}$が存在して，$E(\hat{f})=E(f)$且

$$(*)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(T^k\omega)=\hat{f}(\omega)\qquad a.\ e.$$

が成り立つ。もし，Tがエルゴート的なら，

$$(**)\quad \hat{f}(\omega)=E(f)\quad a.\ e.\qquad \text{(エルゴート仮説！)}$$

系[3]　$(\Omega,\ a,\ P,\ \{T_t\})$を力学系(dynamical system)とする。積分可能な関数fに対し，積分可能な$\{T_t\}$－不変関数$\hat{f}$で$E(\hat{f})=E(f)$であるものが存在して，

＊　数学，助教授，一般教科

(*) $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(T_s\,\omega)\,ds=\hat{f}(\omega)$ *a. e.*.

もし，$\{T_t\}_{-\infty<t<\infty}$ がエルゴート的なら，

(**) $\hat{f}(\omega)=E(f)$ *a. e.* （エルゴート仮説！）

(*)の左辺は物理量 f の(長)時間平均を，また $E(f)$ は f の集団平均(即ち，空間 Ω 全体に亘る f の平均)を意味している。エルゴート的でない変数 T の例は知られている[2]から，(**)は条件なしには成立しない[4]。(故に，1)(1978)の立場も肯定される。)このことは命題「T が ergodic $\Rightarrow \hat{f}(\omega)=E(f)$ *a. e.*」[4]の対偶を考えれば分る。定理から「T がエルゴート的$\Rightarrow \hat{f}(\omega)=E(f)$ *a. e.*」

注意　定理（や系）で，T は可測変換とするだけでよい[4]。即ち，2）（従って3））の証明で $\hat{T}f(\omega)\overset{def}{=\!=}f(T\omega)$, $\omega\varepsilon\Omega$, とすれば（2）従って3）の様に）T は保測としなくてよい。

参考文献

1）原島鮮，熱力学・統計力学（改訂版），培風館，昭和56年（1978年）.

2）P. Billingsley, Ergodic Theory and Information, J. Willey & Sons, Inc., New York, 1960（3）渡辺毅，十時東生訳，付録A，1968).

4）新谷俊忠，安藤毅氏への書簡

(昭和56年7月20日受理)

付　録[*]（確率論の研究から得たもの）

(1)　複素変数の関数

$w=f(z)$

を考え，$f(z)$ は領域 D で正則とする。

$f(z)$ の積分路を D 内を通る曲線

$C:z=z(t)\quad(\alpha\leqq t\leqq\beta)$

で表わす。$f(z)$ の C に沿う積分（複素積分）

$\int_c f(z)\,dz$ は

$$\int_c f(z)\,dz=\int_\alpha^\beta f\big(z(t)\big)\,dz(t)$$

と表わされる。この右辺は *Stiltjes* 積分であり，$f(z(t))$ は（t の）有界変動関数，$z(t)$ は（t の）連続関数とみてよいから，$\int_c f(z)\,dz$ は（*Stieltjes* 積分として）常に収束して存在する。(故に，$\int_c f(z)\,dz$ の性質は Stieltzes 積分論に帰着される。）何故ならば，

$$\int_\alpha^\beta f(z(t))\,dz(t)=\Big(f(z(\beta))\cdot z(\beta)-f(z(\alpha))\cdot z(\alpha)\Big)-\int_\alpha^\beta z(t)\,df(z(t))$$

に注意すればよい。

特に $\alpha=\beta$ とすれば $\int_c f(z)\,dz=0$　(Cauchy の積分定理！)

(2)　手　紙

倉持善次郎先生

「普段，関数論の講義で述べてきたことなのです。」

（複素平面内にある）曲線

$C:z=z(t)\quad(\alpha\leqq t\leqq\beta)$

$\qquad=x(t)+i\cdot y(t)$

$\qquad(x(t),\ y(t)$ は t の実連続関数．C は領域 D 内にあるとする。)

複素関数

$f(z)=f\big(z(t)\big)=u\big(x(t),\ y(t)\big)+i,\ v\big(x(t),\ y(t)\big)$

$$=\tilde{u}(t)+i.\ \tilde{v}(t)$$

($\tilde{u}(t)$, $\tilde{v}(t)$は t の実関数)

◎$f(z)$が bdd variation

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\tilde{u}(t)$, $\tilde{v}(t)$が t の関数として bdd variation

f(z)が（定義）領域Dで正則とは，f(z)がtの関数として微分可能なこととする。関数論ではf(z)は正則としてよい。

複素積分は（$\int$をΣに戻して考えて）

$$\int_c f(z)\,dz=\int_c \tilde{u}\,dz+i\cdot\int_c \tilde{v}\,dz$$

$$=\underbrace{\int_\alpha^\beta \tilde{u}(t)\,dx(t)}+i\cdot\underbrace{\int_\alpha^\beta \tilde{u}(t)\,dy(t)}+i\cdot\underbrace{\int_\alpha^\beta \tilde{v}(t)\,dx(t)}-\underbrace{\int_\alpha^\beta \tilde{v}(t)\,dy(t)}$$

Stieltjes 積分として収束する(存在する)。

◎ $\int_\alpha^\beta f(z(t))dz(t)=\big(f(z(\beta))\cdot z(\beta)-f(z(\alpha))\cdot z(\alpha)\big)-\int_\alpha^\beta z(t)\,df(z(t))$ に注意すれば，特に$\alpha=\beta$の場合として，直に

$$\int_c f(z)\,dz=0$$ (Cauchyの積分定理！)

---

*）新谷俊忠，「倉持善次郎氏への手紙」参照。

定理　領域D内の曲線（即ち，tの連続関数）を $C_k: Z_k=Z_k(t)$ （$\alpha\leqq t\leqq\beta$）（$k=1, 2, \cdots, n$）とすると，多変数関数$f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$は全て一変数 t の関数 $z=z(t)=(z_1(t),\cdots,z_n(t))$に帰着される。ここで $C=(C_1, \cdots, C_n)$ とする。

応用①多変数関数に対しても Runge の近似定理が成り立つ(即ち，辻正次，「複素函数論」p. 110 の定理 v. 28 が多変数のとき成り立つ)。

②多変数の場合のコロナ問題はCarlesonの結果(一変数）から出る（即ち，多重開円板△は $M_H\infty$で稠密)。