

3-ヒンジを有する山形梁の荷重増分法による一考察

澤田知之*・能町純雄**

A Note of Load Incremental Method for Three-Hinged Angle Beam

Tomoyuki SAWADA and Sumio G. NOHMACHI

要 旨

本論は、3ヒンジ山形梁構造における荷重↔変位曲線を変位増分法と荷重増分法で求め得たので報告するものである。

Synopsis

Load-deflection curve by Displacement control Analysis and/or Load Control Analysis for 3-Hinged Angle Beam shows some what different from the result of Hook's law.

1. ま え が き

図-1に示す様な、3ヒンジを持つ山形梁は軸力のみで構造を呈することができるが、載荷重 P の増加にともやない、荷重↔変位(応力↔ひずみ)の関係は、フックの法則の1次の比例関係を示さない。解析において仮定条件は次の2つである。

- ①材質は線形弾性体とする。
- ②座屈は生じない。

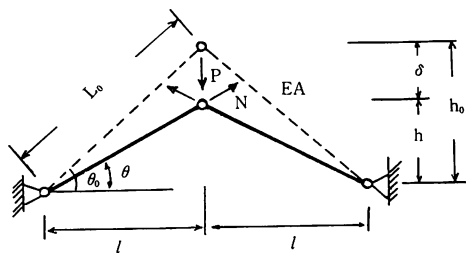


図-1

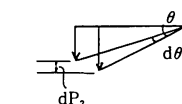
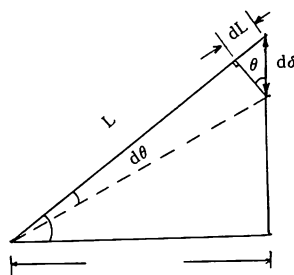


図-2

$$\epsilon = \frac{AB - AB'}{AB} = 1 - \frac{AB'}{AB} = 1 - \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta} \quad \dots\dots\dots(1)$$

力の釣り合い式は

$$2 N \sin \theta = P \quad \dots\dots\dots(2)$$

一方

$$N = E \cdot \epsilon A = EA \left(1 - \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta} \right) \quad \dots\dots\dots(3)$$

(2)と(3)より

2. 基本式の誘導

1) 荷重-変位($P-\delta$)の関係式

AB 間のひずみは図-2より

* 土木工学科 助教授

** 北海道大学工学部 教授

$$P=2EA \sin \theta (1-\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}) \dots\dots\dots(4)$$

次に $\cos \theta_0, \sin \theta, \sin \theta_0$ を各々長さで表わすと

$$\cos \theta_0 = \frac{l}{\sqrt{l^2+h_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{h_0}{l})^2}} \dots\dots(5)$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{h_0-\delta}{\sqrt{l^2+h^2}} = \frac{h_0-\delta}{\sqrt{l^2+(h_0-\delta)^2}} = \\ &= \frac{(\frac{h_0}{l}-\frac{\delta}{l})}{\sqrt{1+(\frac{h_0}{l}-\frac{\delta}{l})^2}} \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{l}{\sqrt{l^2+(h_0-\delta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{h_0}{l}-\frac{\delta}{l})^2}} \\ &\dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

故に(5)~(7)と(4)より均り合い式は次の様に示される。

$$\begin{aligned} \frac{P}{EA} &= 2 \cdot \frac{(\frac{h_0}{l}-\frac{\delta}{l})}{\sqrt{1+(\frac{h_0}{l}-\frac{\delta}{l})^2}} \\ &\cdot (1-\frac{\sqrt{1+(\frac{h_0}{l}-\frac{\delta}{l})^2}}{\sqrt{1+(\frac{h_0}{l})^2}}) \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

2) 荷重増分-変位増分($dp-d\delta$)の関係式

$$\frac{P}{EA} = \bar{P} \quad \frac{\delta}{l} = \bar{\delta} \text{と} \text{おくと} \text{図-2より}$$

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{\delta}} = \frac{dp}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\delta} \dots\dots\dots(9)$$

$$d\theta = \frac{d\delta \cdot \cos \theta}{L} = \frac{d\delta}{l} \cdot \frac{l}{L} \cos \theta$$

$$d\theta = -\cos^2 \theta \cdot d\bar{\delta}$$

$$\therefore \frac{d\theta}{d\bar{\delta}} = \cos^2 \theta \dots\dots\dots(10)$$

また

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{p}}{d\bar{\delta}} &= 2 \cos \theta \left(1-\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}\right) + 2 \sin \theta \left(-\frac{\cos \theta_0 \sin \theta}{\cos^2 \theta}\right) \\ &= -2 \sin \theta \left(\frac{\cos \theta_0 \sin \theta}{\cos^2 \theta}\right) + 2 \cos \theta \left(1-\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}\right) \\ &= -2 \frac{\cos \theta_0 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 2 \cos \theta \left(1-\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}\right) \\ &\dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

(10),(11)より(9)は

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{p}}{d\bar{\delta}} &= 2 \cos \theta_0 \sin^2 \theta - 2 \cos^3 \theta \left(1-\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}\right) \\ &= 2 (\cos \theta_0 - \cos^3 \theta) \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

3) 物理的な意味よりの $dp-d\delta$ の関係式

ここで物理的に垂直方向変位増加 $d\delta$ を生じさせる荷重増加 dp は以下の2つの部分に分けられる。(図-2)

$dp_1 \Rightarrow$ 梁を軸方向に短くさせる作用を受けもつ力

$dp_2 \Rightarrow$ 幾何学的に変形させる作用を受けもつ力

故に

$$dp = dp_1 + dp_2 \dots\dots\dots(14)$$

一方

$$d\varepsilon = \frac{dL}{L_0} = \frac{d\delta \cdot \sin \theta}{L_0}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{L_0} &= \frac{d\delta}{L} \cdot \frac{L}{L_0} = d\bar{\delta} \cdot \cos \theta_0 \\ (\because d\bar{\delta} &= \frac{d\delta}{l}) \end{aligned}$$

$$\therefore d\varepsilon = d\bar{\delta} \sin \theta \cdot \cos \theta_0 \dots\dots\dots(15)$$

よって

$$dp_1 = \frac{dp_1}{AE} = 2d\varepsilon \cdot \sin \theta = 2 \sin^2 \theta \cdot \cos \theta_0 \cdot$$

$$d\bar{\delta} \dots\dots\dots(16)$$

又、図-3より

$$\begin{aligned} dp_2 &= \frac{dp_2}{EA} = 2 \left(1-\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}\right) \cdot [\sin(\theta-d\theta) - \sin \theta] \\ &= 2 \left(1-\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}\right) [\sin \theta \cdot \cos d\theta - \cos \theta \cdot \sin d\theta - \sin \theta] \\ &= 2 \left(1-\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}\right) \left(-\cos \theta \cdot \frac{d\delta \cdot \cos \theta}{L}\right) \\ &= 2 \left(1-\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}\right) \left(-\cos^2 \theta \cdot \frac{d\delta}{l} \cdot \frac{l}{L}\right) \\ &= 2 \left(1-\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}\right) \cdot \cos^3 \theta \cdot d\bar{\delta} \quad (17) \end{aligned}$$

故に(16)(17)より,(13)と同様の式が次の如く求められる。

$$d\bar{p} = d\bar{p}_1 + d\bar{p}_2 = 2 \left[\sin^2 \theta \cdot \cos \theta_0 - \left(1 - \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta} \right) \cdot \cos^3 \theta \right] d\bar{\delta} \quad \cdots \cdots (18)$$

4) 極値計算

ここで $\frac{d\bar{p}}{d\bar{\delta}} = 0$ とおくと, (13) 又は (18) より

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta \cdot \cos \theta_0 - \left(1 - \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta} \right) \cdot \cos^3 \theta &= \cos \theta_0 \\ -\cos^3 \theta &= 0 \quad \cdots \cdots (19) \end{aligned}$$

$$\therefore \cos^3 \theta = \cos \theta_0 \text{ 又は } \frac{1}{\cos^3 \theta} = \frac{1}{\cos \theta_0} \quad (20)$$

よって (5), (7) より

$$\sqrt{1 + \left(\frac{h_0}{l} - \frac{\delta}{l} \right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{h_0}{l} \right)^2}$$

$$1 + \left(\frac{h_0}{l} - \frac{\delta}{l} \right)^2 = \left[1 + \left(\frac{h_0}{l} \right)^2 \right]^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{L_0}{l} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{l}{L_0} \right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\left(\frac{h_0}{l} - \frac{\delta}{l} \right)^2 = \left(\frac{l}{L_0} \right)^{-\frac{2}{3}} - 1$$

$$\therefore \frac{\delta}{l} = \frac{h_0}{l} \mp \sqrt{\left(\frac{l}{L_0} \right)^{-\frac{2}{3}} - 1} \quad \cdots \cdots (21)$$

よって (8) は (21) より

$$\begin{aligned} \frac{P}{EA} &= 2 \cdot \left[1 - \frac{\sqrt{1 + \left\{ \left(\frac{l}{L_0} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right\}}}{\frac{l}{L_0}} \right] \\ &\times \frac{\pm \sqrt{\left(\frac{l}{L_0} \right)^{-\frac{2}{3}} - 1}}{\sqrt{1 + \left\{ \left(\frac{l}{L_0} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right\}}} \\ &= 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{l}{L_0} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \cdot \left\{ \pm \sqrt{1 + \left(\frac{l}{L_0} \right)^{\frac{2}{3}}} \right\} \\ &\pm 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{l}{L_0} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{2}} \quad \cdots \cdots (22) \end{aligned}$$

故に (21) (22) が頂点の値となる。

よって, 極限の時つまり $\delta \rightarrow \infty$, $\theta = 90^\circ$, $\cos \theta = 0$ で,

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{\delta}} = \cos \theta_0 = \frac{l}{L_0} \quad \cdots \cdots (23)$$

又, 漸近線は $\left(\frac{h}{l}, 0 \right)$ を通り, $d\bar{p} = \frac{P}{EA}$ は以下の如くなる。

$$\frac{P}{EA} = -2 \left(\frac{h_0}{L_0} - \frac{\delta}{L_0} \right) \quad \cdots \cdots (24)$$

3. 数値計算例及び考察

$$\text{今, } \bar{P} = \frac{P}{EA}, \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{l}, \quad \frac{h_0}{l} = 0.2 \text{ とおき}$$

①変位増分より荷重増分を求める方法 (変位増分解析) と, ニュートン・ラプソンの繰返し計算法による②荷重増分より変位増分を求める方法 (荷重増分解析) による変位↔荷重曲線を表1, 表2の(a), (b)及び図-3, 4に示す。①②とも同傾向を示し, 荷重増, 変位増が小さい所ではよい精度で一致している。

図-4は, 図-3の荷重尺度を100倍にして表わしたものであるが, 荷重増分が大きくなると誤差が大きくなって行くことが示されている。

本解析対称構造のような単純な構造において荷重増, 変位増の領域で, 変位増に伴い, 増重減 (負の値) を呈する興味深い結果が得られた。

表-1 変位増分法による値

$\times 10^{-3}$		$\times 10^{-3}$	
$\bar{\delta} = \frac{\delta}{l}$	$\bar{p} = \frac{P}{EA}$	$\bar{\delta} = \frac{\delta}{l}$	$\bar{p} = \frac{P}{EA}$
0.0	0.0	0.30	-2.891
0.01	0.701	0.31147	-2.961
0.02	1.297	0.40	0.0
0.03	1.794	0.41	0.809
0.04	2.195	0.42	1.731
0.05	2.507	0.43	2.772
0.06	2.733	0.44	3.933
0.07	2.879	0.45	5.219
0.08	2.951	0.46	6.634
0.08529	2.961	0.47	8.182
0.10	2.891	0.48	9.865
0.12	2.598	0.40	11.688
0.14	2.115	0.50	13.653
0.16	1.490	1.00	319.5
0.18	0.769	2.00	1781.8
0.20	0.0		

表-2 (a) 荷重増分法による値(ニュートン・ラブソン法)

$\times 10^{-3}$ P	$\div 10^{-3}$ ΔP $P-P_i(\delta)$	繰 り 返 し 回	$\times 10^{-3}$ $P_i(\delta)$ $E_q(1)$	誤 差 $\Delta P/P$	$\times 10^{-3}$ δ $\delta_0 + \Delta \delta$	$\times 10^{-3}$ $\Delta \delta$ $[k]^{-1} \cdot \Delta p$	$[k]$ 増分 $E_q(2)$
0.0		1			0.0		
	0.5	2	0.476	4.70%	6.629	6.629	0.068315
0.5	0.24 ^{*1}	3	0.499	0.01%	6.976	0.347	0.067948
	0.5	1	0.972	2.40%	14.334	0.736	0.060293
1.0	0.28 ^{*2}	2	0.999	0.11%	14.805	0.471	0.059812
	0.5	1	1.465	2.40%	23.164	0.836	0.051436
1.5	2.3 ^{*3}	2	1.499	0.15%	23.851	0.687	0.050762
	0.5	1	1.953	2.35%	33.701	0.985	0.041349
2.0	0.49 ^{*4}	2	1.999	0.03%	34.873	1.136	0.040293
	0.5	1	2.430	2.80%	47.246	12.409	0.029175
2.5	0.70 ^{*5}	2	2.497	0.10%	49.658	2.412	0.027103
	0.4	1	2.807	3.20%	64.417	14.759	0.015069
	0.93 ^{*6}	2	2.886	0.50%	70.568	6.151	0.010387
2.9	0.15 ^{*7}	3	2.899	0.03%	71.968	1.396	0.009352
2.94	0.01 ^{*8}	1	2.958	1.39%	82.655	16.921	0.001771
	-0.44	1	0.811	67.50%	178.870	85.618	-0.037501
	1.69	2	2.281	8.76%	133.837	-45.037	-0.025777
2.5	0.22	3	2.485	0.59%	125.340	-8.496	-0.022233
	-0.5	1	1.896	5.22%	147.470	22.792	-0.021938
1.5	0.10	2	2.097	-4.84%	140.640	-6.828	-0.015294
2.0	-0.97 ^{*9}	3	1.998	0.11%	144.063	3.419	-0.028310
	-0.5	1	1.455	3.00%	161.019	16.956	-0.029490
1.5	0.45 ^{*10}	2	1.499	0.02%	159.701	-1.318	-0.034289
-0.5	-1.0	1	0.421	1.50%	189.130	29.432	-0.033980
0.5	0.79 ^{*11}	2	0.499	0.03%	187.074	-2.059	-0.038485
	-1.0	1	-0.509	-1.75%	213.158	26.084	-0.038338
-0.5	0.88 ^{*12}	2	-0.499	exact	212.929	-0.229	-0.038319
	-1.0	1	-1.456	2.90%	239.140	26.084	-0.038337
-1.5	-0.44	2	-1.499	exact	240.300	1.286	-0.034281

$E_q \cdot (1) \quad \bar{P} = \frac{P}{EA} = 2 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1.04}} \cdot \sqrt{1 + (0.2 - \delta)^2} \right] \cdot \frac{(0.2 - \delta)}{\sqrt{1 + (0.2 - \delta)^2}}$

$E_q \cdot (2) \quad \frac{d\bar{p}}{d\delta} = 2 \left[\frac{1}{\sqrt{1.04}} - \frac{1}{\sqrt{1 + (0.2 - \delta)^2}} \right]$

表-2 (b)

$\times 10^{-3}$ P	$\times 10^{-3}$ Δp $P - P_1(\delta)$	繰 り 返 し 回	$\times 10^{-3}$ $P_1(\delta)$ $E_q \cdot (1)$	誤 差 $\Delta P/P$	$\times 10^{-3}$ δ $\delta_0 + \Delta \delta$	$\times 10^{-3}$ $\Delta \delta$ $[k]^{-1} \cdot \Delta P$	$[k]$ 増分 $E_q(2)$
-2.5	-1.0	1	-2.370	5.10%	269.730	29.432	-0.033976
	-0.13	2	-2.605	4.20%	280.377	10.645	-0.022169
	0.11 *13	3	-2.493	0.27%	275.025	- 5.352	-0.019613
	-6.65	4	-2.499	exact	275.326	0.301	-0.022071
-2.94	-0.5 *14	1	-2.948	1.75%	320.913	45.586	-0.010968
	-0.53	2	-2.851	5.00%	296.109	-24.803	0.002116
	-0.15	3	-2.942	1.90%	322.132	26.022	-0.005722
-2.5	0.44	1	0.717	-128. %	408.930	86.801	0.005089
	-3.22	2	-1.738	30.0%	371.220	-37.713	0.085321
	-0.76	3	-2.372	5.10%	354.660	-16.564	0.004599
	-0.13	4	-2.493	0.30%	350.520	- 4.134	0.030830
	-7.42 *15	5	-2.499	exact	350.250	- 0.272	0.027257
-1.5	1.0	1	-0.875	-41.0%	387.250	37.000	0.027025
	-0.63 *16	2	-1.448	3.45%	377.154	-10.099	0.061924
	-0.52	3	-1.499	exact	376.153	- 1.001	0.051750
-0.5	1.00	1	-0.304	39.0%	395.850	19.698	0.050767
	-0.20 *17	2	-0.496	0.82%	393.080	-27.680	0.070950
	-4.08	3	-0.500	exact	393.240	- 0.060	0.068011
0.0	0.5 *18	1	0.029		400.380	7.359	0.067947
	28.9	2	0.001	exact	400.001	- 3.812	0.075845
1.0	1.0	1	1.097	9.70%	413.258	13.257	0.075430
	0.09	2	1.001	exact	412.178	- 1.079	0.090234
2.0	1.0	1	2.074		423.400	11.236	0.089000
	-0.07	2	2.000	exact	422.700	- 0.721	0.102075
3.0	1.0	1	3.059		432.575	9.879	0.101220
	-0.06	2	3.000		432.050	- 0.518	0.113110
4.0	1.0	1	4.049		440.945	8.891	0.112480
		2	4.000	exact	440.550	- 0.396	0.123490

注意 上記*1~*18のうち

*12, *13, *15, *17, *18は $\times 10^{-6}$ また*3は $\times 10^{-7}$ であり

その他の*はすべて $\times 10^{-4}$ である。

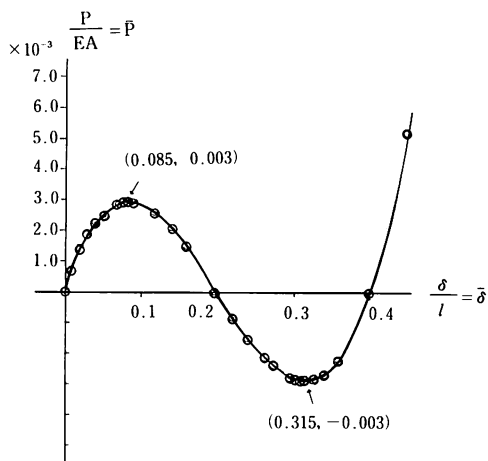


図-3

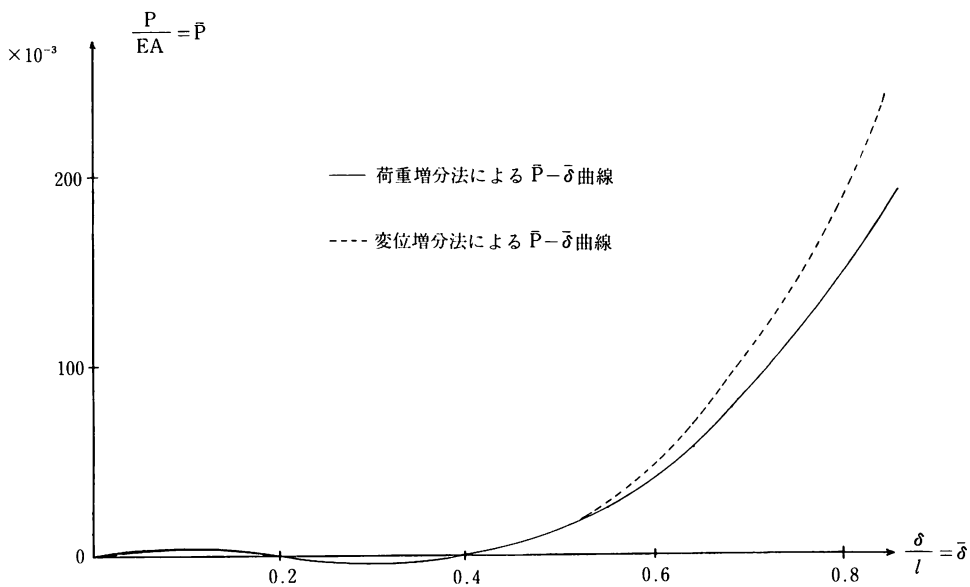


図-4

参 考 文 献

- L. Baker & J. Hayman : plastic
- L. Baker & J. Hayman : plastic Design of Frames, Cambridge University Press, 1969.
- A. C. Ugural & s. k. Fevster : Advanced Strength and Applied Elasticity, Elsevier, North Land Holland, 1981.
- W. F. CHen : plasticity in Reinforced Concrete, McGraw Hill, 1982.

(昭和 57 年 11 月 30 日受理)