

境界要素法による静電界問題の解析

藤 島 豊*

Analysis of electrostatic field problem by Boundary Element Method

Yutaka FUJISHIMA

要 旨

本論文は積分方程式法と離散化法を組み合わせた、いわゆる境界要素法により静電界問題の数値解析を試み、同心円筒間の電位を求めその有効性を確かめ、あわせて有限要素法、要素形状による比較を行なっている。

1. ま え が き

工学問題の解析における数値解析法としては、有効な手段の一つに有限要素法がある。有限要素法は現在のところもっとも一般性のある解析法として電気工学の分野にも広く使われてきているが、複雑な形状の問題等を扱う場合には計算機容量がきわめて多くなる。

ここでは微分方程式を（境界）積分方程式法に離散化法を適用して変換することにより、対象とする空間の次元を一次元下げることができる、いわゆる境界要素法⁽¹⁾を用いて静電界の基本的な問題に適用し、その有効性を確かめてみたので報告する。

2. 解 析 手 法⁽²⁾

まえがきにも述べたように境界要素法は、元の微分方程式と境界条件を積分方程式に変換し、有限要素法と同様な離散化法によってこれを解く方法である。ラプラスの方程式の場合を考えると、積分方程式は境界上の境界積分方程式に帰着できる。よって離散化については境界だけに着目すればよいことになる。

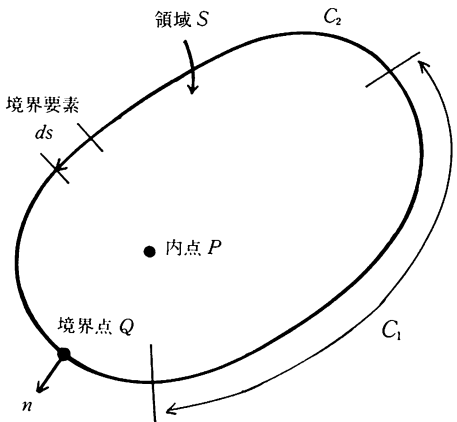
〔二次元ラプラス問題〕

問題を二次元のラプラス方程式とし、図－1に示す領域を考える。ここで領域Sの境界をCとし、次の境界条件を与える。

領域S内で $\nabla^2 u = 0$
 $u = \bar{u} \text{ (on } C_1)$
 $u_n = \bar{u}_n \text{ (on } C_2)$
 $C = C_1 + C_2$

C_1, C_2 は全境界Cの部分境界とし、一は既知の境界値である。

グリーンの公式を用いる方法について述べると、 ϕ を連続微分可能な関数としてグリーンの公式は



図－1 境界要素領域（二次元）

*助教授 電気工学科

$$\int_S (u \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 u) dA - \int_C (u \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial u}{\partial n}) ds = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

と書き表わすことが出来る。ここで ϕ はラプラスの方程式

$$\nabla^2 \phi = 0$$

を満たす関数で平面上の2点 P, Q に関して

$$\phi = \log \frac{1}{r(P, Q)}$$

とする。

ただし $r(P, Q)$ は点 P, Q 間の距離を表わす。

図-1のように、いま点 Q が境界上 (C 上) にあり、点 P が領域 S の内部にある場合と境界 C 上にある場合を分けて考える。

a. 点 P が領域 S 内にある場合

この場合は $r(P, Q) \neq 0$ であり、また $\nabla^2 \phi(P, Q) = 0$ を満たし、 $\nabla^2 u(P) = 0$ が成り立っている。したがって

$$\int_C [u(Q) \frac{\partial \phi}{\partial n}(P, Q) - \phi(P, Q) \frac{\partial u}{\partial n}(Q)] ds = 0$$

となる。これは任意の閉曲面について成り立つ関係式であり、図-2に示す経路 $C + C'$ についても成り立つ。

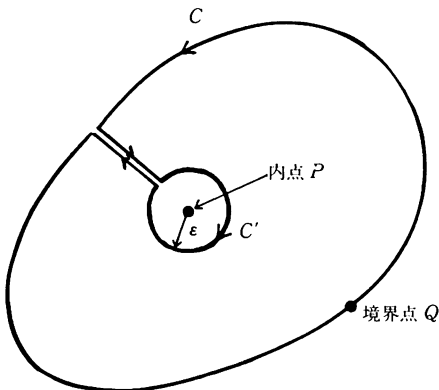


図-2 内点 P と境界点 Q の関係

C' は点 P を囲む半径 ϵ との円とし、 $C + C'$ 上の任意の点が Q に相当するものとする。この場合には次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{C+C'} [u(Q) \frac{\partial \phi}{\partial n}(P, Q) - \phi(P, Q) \frac{\partial u}{\partial n}(Q)] ds \\ &= \int_C [u(Q) \frac{\partial \phi}{\partial n}(P, Q) - \phi(P, Q) \frac{\partial u}{\partial n}(Q)] ds \\ &+ \int_{C'} [u(Q) \frac{\partial \phi}{\partial n}(P, Q) - \phi(P, Q) \frac{\partial u}{\partial n}(Q)] ds \end{aligned}$$

$$= 0$$

C' に添う積分項では

$$\int_{C'} \frac{\partial u}{\partial n}(Q) \log \frac{1}{r(P, Q)} ds = \log \frac{1}{\epsilon} \int_{C'} \frac{\partial u}{\partial n}$$

$$(Q) ds = 0 \quad (r = \epsilon)$$

$$\int_{C'} u(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left[\log \frac{1}{r(P, Q)} \right] ds = \frac{1}{\epsilon} \int_{C'} u(Q) ds$$

ここで u が領域内で連続であれば $\epsilon \rightarrow 0$ のとき $u(Q) \rightarrow u(P)$ となることを考慮に入れて

$$\lim \left\{ \frac{1}{\epsilon} \int_{C'} u(Q) ds \right\} = 2\pi u(P)$$

となる。

したがって C' の半径 ϵ を 0 とした極限については

$$\begin{aligned} u(P) = & -\frac{1}{2\pi} \int_C \left[u(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\log \frac{1}{r(P, Q)} \right) \right. \\ & \left. - \log \frac{1}{r(P, Q)} \frac{\partial u}{\partial n}(Q) \right] ds \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

が得られることになる。

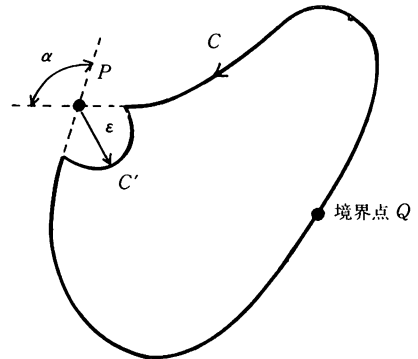


図-3 境界上に P がある場合

b. 点 P が境界上にある場合

図-3に示したように点 P を境界 C 上に近づけ、積分経路を $C + C'$ として同様の考慮をすれば、

$$\begin{aligned} u(P) = & -\frac{1}{\alpha} \int_C \left[u(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\log \frac{1}{r(P, Q)} \right) \right. \\ & \left. - \log \frac{1}{r(P, Q)} \frac{\partial u}{\partial n}(Q) \right] ds \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

が得られる。(ここで α は点 P における両接線のなす角とする)。

(2)式は領域内の点 P における $u(P)$ の値を境界上の $u(Q)$ 、 $\frac{\partial u}{\partial n}(Q)$ と P, Q 間の距離 $r(P, Q)$ 、

Q)に関する関数 $\log \frac{1}{r(P, Q)}$ によって関連づけ、(3)式は境界上の $u(P)$ を同じく $u(Q)$ と $\frac{\partial u}{\partial n}(Q)$ の積分関係と関連づけている。ただしここでは Q に一致する P を考える場合にはすなわち $r(P, Q)=0$ が含まれることはいえない。

以上が2次元領域に関するラプラスの方程式の境界積分方程式である。

〔離散定式化〕

上に述べた積分方程式を数值的に解くことを考え区分的に一定な要素（離散化要素）を用いる。ここでは点 P, Q はいずれも境界 C 上にあり、積分を境界上の点 Q についておこない、外向き法線を点 Q で考えるものとする。すなわち、

$$u(P) = -\frac{1}{\pi} \int_C \left[u(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left(\log \frac{1}{r(P, Q)} \right) - \log \frac{1}{r(P, Q)} \frac{\partial u}{\partial n_Q}(Q) \right] ds_Q$$

なる式を考える。

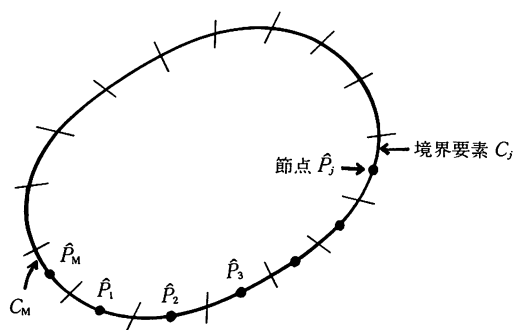


図-4 一定境界要素分割

図-4に示すように境界を線分 M 個の境界要素 $c_j (j=1, 2, \dots, M)$ に分割し、要素の中心点を関数値とすると、要素 C_i 上における u の値 u_i は

$$\pi u_i = \sum_{j=1}^M \left\{ -u_j \int_{c_j} \frac{\partial}{\partial n_Q} \left(\log \frac{1}{r(\bar{P}_i, Q)} \right) ds_Q + (u_n)_j \int_{c_j} \log \frac{1}{r(\bar{P}_i, Q)} ds_Q \right\}$$

となる。（ここで $\bar{P}_i$ は C_i の中心点を表す）

要素 c_j 上の積分は $\bar{P}_i$ と関連していることから Kronecker デルタ δ_{ij} を用いて

$$a_{ij} = \int_{c_j} \frac{\partial}{\partial n_Q} \left(\log \frac{1}{r(\bar{P}_i, Q)} \right) ds_Q + \pi \delta_{ij}$$

$$b_{ij} = \int_{c_j} \log \frac{1}{r(\bar{P}_i, Q)} ds_Q$$

とおくことにより、マトリクス表示で表わすと

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MM} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1M} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{M1} & b_{M2} & \cdots & b_{MM} \end{bmatrix}$$

となり $u_j, (u_n)_j$ を

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix}, \quad u_n = \begin{bmatrix} (u_n)_1 \\ (u_n)_2 \\ \vdots \\ (u_n)_M \end{bmatrix}$$

と定義すれば

$$Au = Bu_n$$

なる関係式となる。上式に与えられるべき境界条件は先に示したように境界 C_1 上で $u = \bar{u}$ 、 C_2 上で $u_n = \bar{u}_n$ であるから

$$\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_L \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} u_{L+1} \\ u_{L+2} \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix},$$

$$(u_n)_1 = \begin{bmatrix} (u_n)_1 \\ (u_n)_2 \\ \vdots \\ (u_n)_L \end{bmatrix}, \quad (\bar{u}_n)_2 = \begin{bmatrix} (\bar{u}_n)_{L+1} \\ (\bar{u}_n)_{L+2} \\ \vdots \\ (\bar{u}_n)_M \end{bmatrix}$$

とおくことにより

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (u_n)_1 \\ (\bar{u}_n)_2 \end{bmatrix}$$

なる部分マトリクスで表わすことができる。

ここで

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1L} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{ML} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{1,L+1} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M,L+1} & \cdots & a_{MM} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1L} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{M1} & b_{M2} & \cdots & b_{ML} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} b_{1,L+1} & \cdots & b_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{M,L+1} & \cdots & b_{M,M} \end{bmatrix}$$

であり、未知ベクトルは u_2 と $(u_n)_1$ であるからこれ等をもまとめると次式を得る。

$$[-B_1 A_2] \begin{bmatrix} (u_n)_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = [-A_1 B_2] \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ (\bar{u}_n)_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{さらに } [-B_1 A_2] = D, [-A_1 B_2] \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ (\bar{u}_n)_2 \end{bmatrix} = F$$

とおけば

$$DX = F$$

なる X に関する連立一次方程式となり、

$$X = D^{-1} F$$

より未知量 $X = \begin{bmatrix} (u_n)_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ を求めることができる

3. 同心円筒内の静電界

静電界解析例として二次元ラプラス問題を取り上げてみる。ここでは同心円筒における内部（同心円筒間）の電位を求めることにする。すなわち図-5に示した Z 軸方向を無限大と考えた場合であり、内円筒（半径を 50 mm）に電位 $\phi = 1$ を与え、外円筒（半径 100 mm）をアース電位（ $\phi = 0$ ）とした場合の中心から R （50 mm < R < 100 mm）の距離の電位を求める。

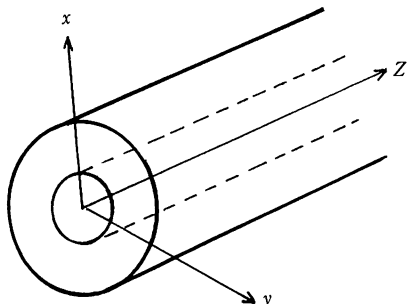


図-5 二次元同心円筒 ($Z = \infty$)

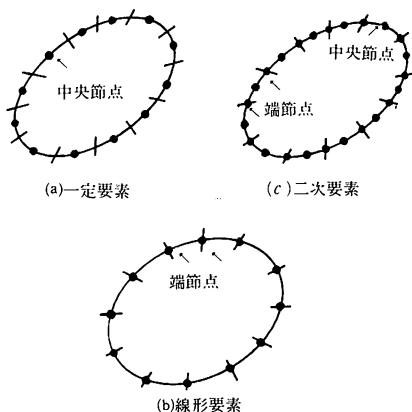


図-7 種々の境界要素

この場合は対称性を考慮することにより図-6に示すように対象同心円筒の1/4を考えて解析すればよいことになる。図-6には考慮されるべき境界条件を与えてある。

実際の計算に際しては、離散化要素としては図-7に示すように (a) 区分的に一定な要素, (b) 線形要素 (要素点間で線形性であるとする), (c) 高次の要素が考えられる。ここでは比較的簡単な例題をとり上げたことから一定要素と線形要素について計算を試みている。また図-8に示したように1/4モデルとはせず同心円筒全体について、これを境界面が2個存在しているものと考え、一定要素を用いて解析を試みた。これは対象物体内部に空孔が存在するような問題、また異った材質の複合体などを扱う問題などに有効手段と考えられる。解析結果を有限要素法 (FEM) による方法と、いわゆる通常の解析解とを比較するように表-1にまとめている。

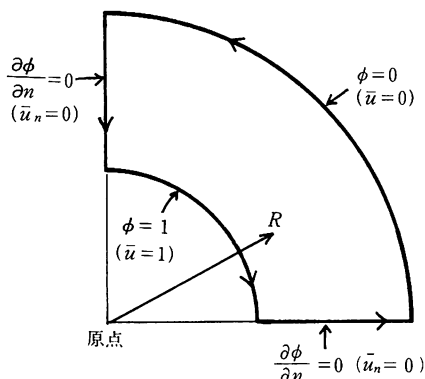


図-6 1/4同心円筒モデル及び境界条件

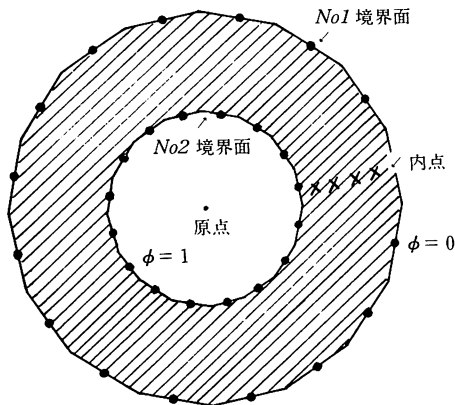


図-8 二次元同心円筒モデル (境界面2個の場合)

表-1 計算結果（各等電位点での平均値）

R(mm)	BEM-1	BEM-2	BEM-3	FEM	通常解
60	0.73753	0.73657	0.73106	0.73722	0.73697
70	0.51340	0.51424	0.50863	0.51487	0.51457
80	0.31878	0.32101	0.31599	0.32217	0.32193
90	0.14703	0.15054	0.14611	0.15213	0.15200

注) }BEM-1…(一定要素), BEM-2…(線形要素)
 {BEM-3…(境界面2個の一定要素), FEM…(有限要素法)

4. 結 言

ラプラスの閉領域問題を一例にとり、境界要素法による解析手法の妥当性を同心円筒間の電位を求めることにより静電界問題について確かめてみた。一定要素を用いた解析解ならびに図-8に示した一定要素を用いた全体にわたる解析解の結果については、要素点間で一定であるとの条件のもとでの解であることから（中心点で代表させる）要素点間を細かくする（すなわち要素を短かくとる）ことにより、精度を上げることができる。線形要素について満足のいく結果を得ているがこれも円周を等分して考えていることから60mmの半径の要素点間に比べて90mmの要素点間が広がることになりやはり60mmの半径の点での電位と90mmの半径での電位とを比較してみると明らかに90mm半径の誤差が多くなっている。このことから先の一定要素の場合と打様に要素間を細かくすることと共に同程度の細かさにする必要がある。

有限要素法に比べてデータの入力数が少なくて

すむこと、積分演算の次数が一次下げられることに注目し閉領域問題に適用してみた訳であるが、特に境界要素法の特徴としては開放領域問題に適していると云われており⁽³⁾、電気工学においては、開放領域問題を扱う場合が多くあり、この点での解析を今後試みることが必要である。さらに有限要素法が本来もっている不均質、異方性の問題に適している点も見すごすことのできない有利な点であり、境界要素法と有限要素法の併用が考えられこれも今後の課題としたい。なお、本文2の解析手法は参考文献(2)から引用していることを最後につけ加えておく。

参 考 文 献

- (1) C. A プレビア著神谷紀生, 田中正隆, 田中喜久昭共訳: 「境界要素法入門」, 培風館
- (2) 神谷紀生: 「有限要素法と境界要素法」, サイエンス社
- (3) 特集「境界要素法」; 数理科学, 12, 1982
(昭和57年12月1日受理)

