単純梁の弾・塑性状態における一考察

澤 田 知 之*・能 町 純 雄**

A Note for a Elastic-Plastic state Simple Beam

Tomoyuki SAWADA and Sumio. G. NOMACHI

要　旨

本稿は，載荷を受ける単純梁が塑性状態となる時のM－Φの関係，P－δの関係を整頓したものである。

Synopsis

We enumerated some relationship between M and Φ, P and δ on a Elastic-plastic simple beam.

ま　え　が　き

1940年代から1950年代にかけ弾性領域外における構造の崩壊について多くの研究が発表された。(J. F. Baker 1969, Prager 1950～1965 等)本稿は，構造物はどの様な強さを持っているのか，又，構造物はどの位まで変形し得るのか，内力はどの様な値であるのかという観点に立ち，最も単純構造である矩形断面を持つ単純梁に集中荷重が作用する時の弾性域を越える状態でのモーメントと曲率の関係，および荷重と変位の関係を塑性域の拡がりを踏まえて整頓したものである。

1．$M-\phi$の関係

図－1(c)より降伏モーメントは

$$M_y=\frac{2}{3}bd^2\sigma_y \tag{1}$$

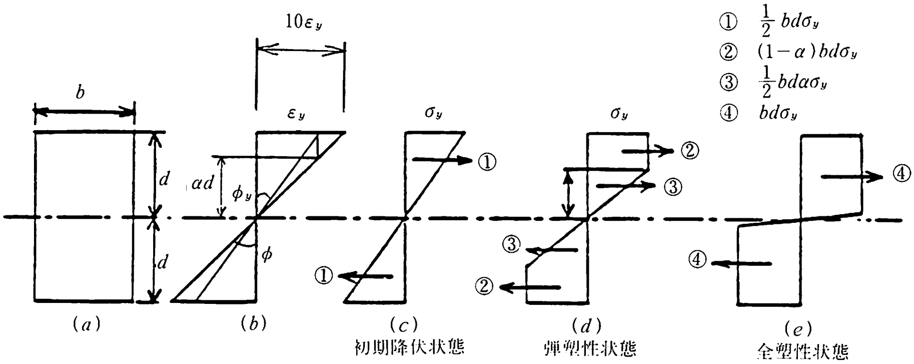
又，(d)より抵抗モーメントは

$$M_R=(1-\alpha)bd\sigma_y[(1+\alpha)d]+\frac{1}{2}\alpha bd\sigma_y\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\alpha d$$

$$=bd^2\sigma_y(1-\frac{1}{3}\alpha^2) \tag{2}$$

(b)より幾何学的関係より

$$\phi=\varepsilon_y/\alpha d \tag{3}$$



図－1

＊　助教授　土木工学科

＊＊　教　授　北海道大学工学部

(1)(2)(3)より

$$M_R/M_y=\frac{3}{2}\left\{1-\frac{1}{3}\left(\frac{\phi_y}{\phi}\right)^2\right\} \tag{4}$$

$$\frac{dM_R}{d\phi}=\frac{dM_R}{d\alpha}\cdot\frac{1}{\frac{d\phi}{d\alpha}}=-bd^2\sigma_y\cdot\frac{2}{3}\alpha\Big/\left(\frac{\sigma_y}{E\alpha}\times\frac{-1}{\alpha^2}\right)=Ebd^3\alpha^3\cdot\frac{2}{3}=EI\alpha^3 \tag{5}$$

ここで　$I=\frac{1}{R}\,b(2d^3)=\frac{2}{3}\,bd^3$　(6)

一方，(2)より

$$\alpha=0\rightarrow M=M_p=bd^2\sigma_y \tag{7}$$

$$\alpha=1\rightarrow M=M_y=\frac{2}{3}\,bd^2\sigma_y \tag{8}$$

又，　$\phi=\phi_y=\frac{\sigma_y}{Ed}$　(9)

よって図－2の様な，なめらかな曲線でモーメントと曲率の関係が得られる。又，設計計算等に要求される塑性ひずみ (ductility) は，

$\frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_y}=\frac{d}{\alpha d}=\frac{1}{\alpha}$ で示され，もし $\alpha=0.1$ なら

$\varepsilon_{max}=10\,\varepsilon_y$ となり降伏ひずみの10倍を取り得ることになり，$\varepsilon_y=0.1\%$ なら $\varepsilon/_{\alpha=0.1}=1\%$ と言うことになる。

2．塑性領域の広がり

図－3に示される様に全塑性モーメント(M_p)は支間中央に生じ $M_p=\frac{P_c}{2}\,l$ である。よって(7)より，

$$P_c=\frac{2M_p}{l}=\frac{2bd^2\sigma_y}{l} \tag{10}$$

そこで外力によるモーメントと抵抗モーメントが等しいと置くと，(1)(10)より

$$M_R=M_P\left(\frac{l-x}{l}\right)=\sigma_y\,bd^2\left(1-\frac{\alpha^2}{3}\right)=M_y\left(1-\frac{\alpha^2}{3}\right) \tag{11}$$

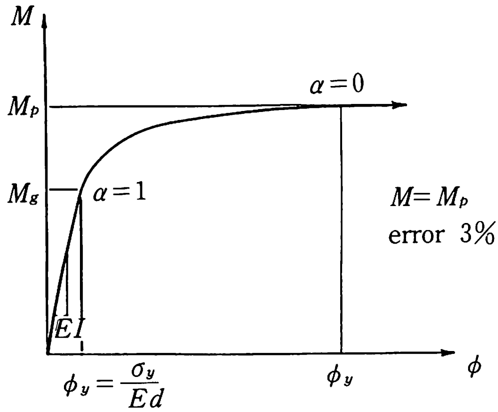
故に

$$1-\frac{x}{l}=1-\frac{\alpha^2}{3}\longrightarrow\alpha=\sqrt{\frac{3x}{l}} \tag{12}$$

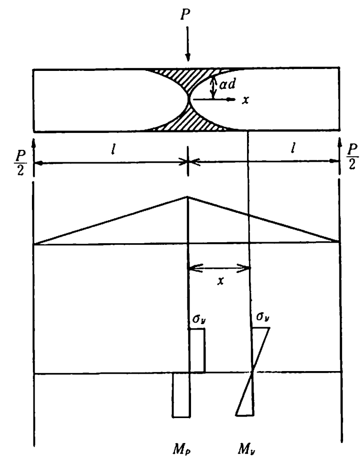
(12)より

$$\alpha=0\rightarrow x=0 \tag{13}$$

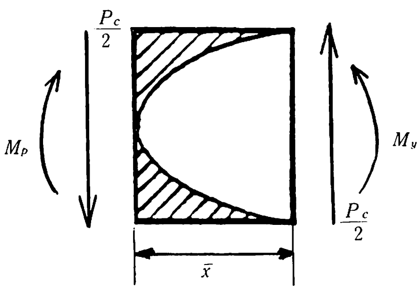
$$\alpha=1\rightarrow x=\frac{1}{3}\,l \tag{14}$$



図－2



図－3



図－4

で，断面の高さ方向の塑性域係数αにより，梁の長さ方向に塑性領域は$\frac{1}{3}$まで広がることが示される。又，図－4から

$$M_{pc}-M_y=\frac{P_c}{2}\,\bar{x} \tag{15}$$

$$P_c=\frac{2M_p}{l} \tag{16}$$

(15)(16)より

$$\bar{x}=\frac{M_p-M_y}{\frac{2M_p}{2l}}=\left(1-\frac{M_y}{M_p}\right)l \tag{17}$$

(1),(10)より　$\bar{x}=(1-\frac{2}{3})\ l=\frac{1}{3}\ l$　(18)

3．荷重－変位の関係

今，図－5において，

$$M_{max}=\frac{Pl}{4}=M_y$$

$$\therefore\ P_y=\frac{4M_y}{l} \tag{19}$$

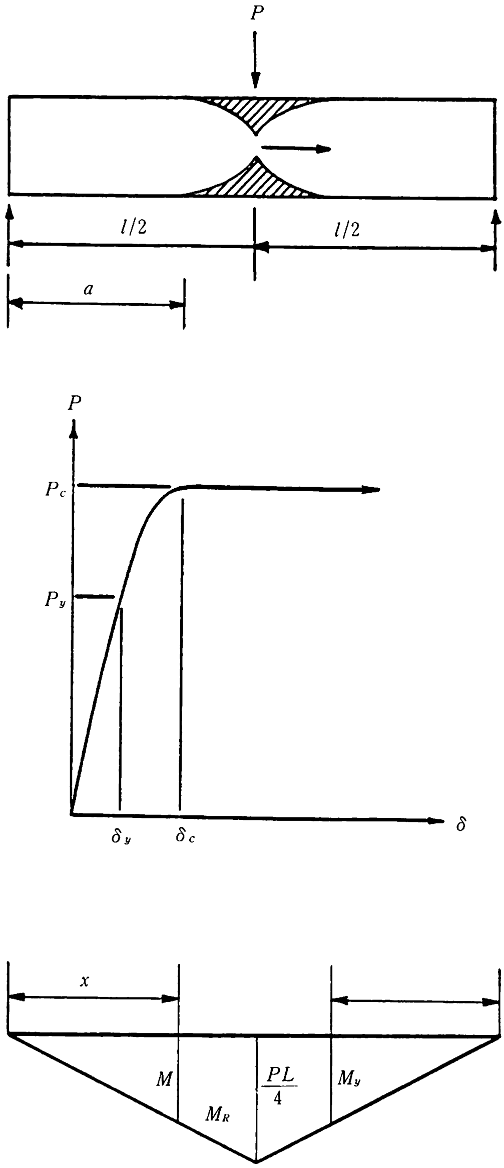
又，全塑性モーメントとおくと

$$M_{max}=\frac{Pl}{4}=M_p$$

$$\therefore P_c=\frac{4M_p}{l} \tag{20}$$

荷重PがP_y(降伏荷重）に達しない場合は弾性域で $\delta_y=\frac{P_y l^3}{48EI}$　(21)である。

しかし，$P_y<P<P_c$の場合は，Pは変位δの関数として示され，弾性域と弾塑性域の両方の考慮を必要とする。



図－5

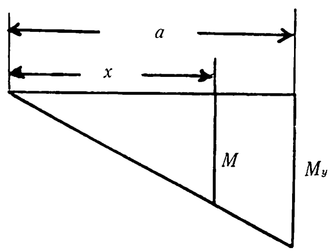
A）弾性域

図－5,6に示される様に単純梁の片側について$o<x<a$の領域は弾性域であり，

$$M=EI\ \phi$$

$$\frac{M}{M_y}=\frac{x}{a}=\frac{EI\phi}{EI\phi_y}=\frac{\phi}{\phi_y}$$

$$\therefore\ \phi=\phi_y\cdot\frac{x}{a} \tag{22}$$



図－6

B) 弾−塑性域

同様に図−5,6の $a < x \leqq \frac{l}{2}$ は弾・塑性領域であり，(4) より矩形断面においては

$$\frac{M_R}{M_y} = \frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{\phi_y}{\phi}\right)^2\right] = \frac{x}{a}$$

$$\therefore\ \phi = \frac{\phi_y}{\sqrt{3-2\left(\frac{x}{a}\right)}} \qquad (23)$$

(22),(23)より

$$\delta = \int_0^{\frac{l}{2}} \phi\cdot x\,dx = \int_0^{a} \phi\cdot x\,dx + \int_a^{\frac{l}{2}} \phi\cdot x\,dx$$

$$= \int_0^{a} \phi_y\left(\frac{x}{a}\right)^2 dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\phi_y\cdot x}{\sqrt{3-2\left(\frac{x}{a}\right)}}\,dx \qquad (24)$$

故に(24)より

$$\delta = \frac{a^2}{3}\phi_y - \phi_y a^2\left(1+\frac{l}{6a}\right)\sqrt{3-\left(\frac{l}{a}\right)} + \frac{4}{3}\phi_y a^2 \qquad (25)$$

上式中，未知量は a であり，次の条件下のモーメント時に求め得る。つまり，

$$\frac{P}{2}a = M_y \rightarrow a = \frac{2M_y}{P} \qquad (26)$$

よって a は P の関数(最大で P, 最小で a)となり

$$a = \frac{P_y l}{2P} \qquad \left(\because M_y = \frac{P_y l}{4}\right) \qquad (27)$$

(25)(27)より，無次元化された一般解は次式の如く示される。

$$\delta = \frac{l^2\phi_y}{12}\left(\frac{P_y}{P}\right)^2\left[5-\left(3+\frac{P}{P_y}\right)\sqrt{3-2(P/P_y)}\right] \qquad (28)$$

境界値は

$$P = P_y \rightarrow \delta = \frac{l^2}{12}\phi_y = \frac{l^2}{12}\frac{M_y}{EI} = \frac{l^2}{12}\frac{P_y l}{4EI}$$

$$= \frac{P_y l^3}{48EI} = \delta_y \qquad (29)$$

$$P = P_c \rightarrow \delta = \frac{20}{9}\delta_y = 2.22\ \delta_y \qquad (30)$$

一方，(28) より

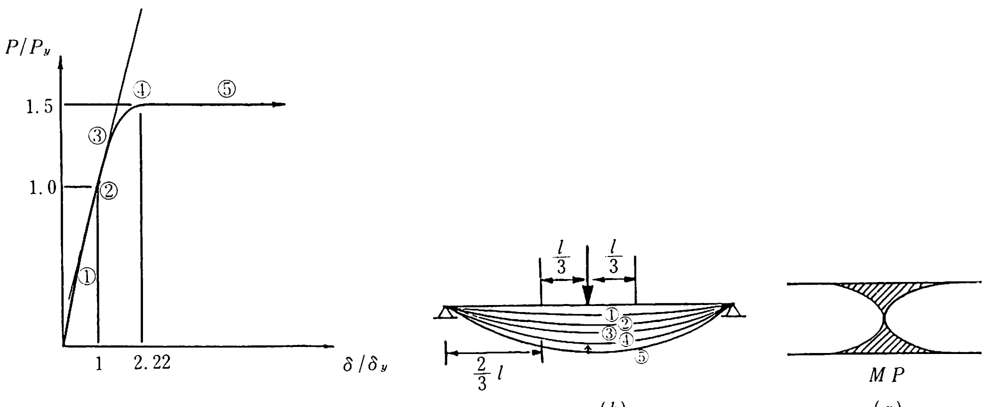
$$\frac{\delta}{\delta_y} = \left(\frac{P_y}{P}\right)^2\left[5-\left(3+\frac{P}{P_y}\right)\sqrt{3-2(P/P_y)}\right] \qquad (31)$$

故に，(29)～(31)より図−7 (a) (b) (c) と表わし得る。

4. ま と め

図−2により弾性域を越えた領域でのモーメントと曲率の関係図を描くことができ，$\alpha=0.1$ つまり厚さ方向1割程度が塑性となる単純梁においても，塑性ひずみが弾性のそれより10倍の値を取り、弾性範囲のみでの設計計算の不経済を示す。又､塑性域は､中央載荷点より左右に $l/3$ まで拡がることが図−3，4は示しており，荷重の増加に伴い変位は当然大きくなるが，弾性限界で $P/P_y=1$，$\delta/\delta_y=1$ ならば弾塑性限界は $P/P_y=1.5$, $\delta/\delta_y=2.22$ であり，それ以上は荷重下において2本の棒が連結された如くの塑性ヒンヂが表われることを図−7(a)(b)(c)は示している。

尚，本校土木11期生，扇谷，大山，佐藤(拓)，千保の四君に協力して頂いたことに深く感謝いたします。



(a) (b) (c)

図−7

参 考 文 献

1) Sir John BAKER & Jacques HEYMAN : "Plastic Design of Frames", Cambridge Univ. Press, 1969

2) A. C. Ugural & S. K. Fenster : "Advanced Strength and Applied Elasticity. The SI Version", Elsevier Scientific Publishing Co., New York. OXford, 1981

3) W. F. Chen : "Plasiticity in Reinforced Concrete", McGraw-Hill Book Company, 1981

(昭和 58 年 11 月 30 日)