

カットセットの列挙法について

梶 谷 有 三*

On the Algorithm to Enumerate all cut-sets

By Yuzo MASUYA

要 旨

本研究はネットワークのノードを排他的な2つの集合に分割するリンクの集合（カットセット）を列挙するアルゴリズムについて考察したものである。

Synopsis

In this study it is considered to enumerate the all link sets (cut-sets) that divide the nodes into the exclusive two sets in network.

1. ま え が き

ネットワークのノードを排他的な2つの集合に分割するリンクの集合、いわゆるカットセット（以下カットという）は通信網、電気回路網、システム理論あるいは交通網（道路網）などにおける諸問題の取扱いに際して有力な手段として考えられている^{1)~5)}。道路網に関する研究においても、道路網容量増強問題⁵⁾、道路網の感度分析⁶⁾、あるいは道路網の地震時信頼度分析⁷⁾などの問題に応用されている。道路交通問題の分野での従来からのカット列挙のアルゴリズムとしては次のようなものがある^{7),8)}。①ネットワークの任意のツリー（木）に対して定義される基本カットセット（fundamental cutset）を求め、これらを組合せて新しいカットをすべて生成する方法。② heuristic な方法として、お互いに補な2つの連結な部分ネットワークのすべての組を系統的に求めることにより、その境界線（分離集合）がカットをなすことか求める方法。③リンクのすべての取り得る組合せ状態を順番に列挙して、逐次カットであるかどうかを判定しながら求める方法、などがある。本研究で対象とするカットはいわゆる極小カット

セット（1つのカットの中に部分としてよりリンク数の少ないカットを含まないカット）であるが、これらの方法においては極小カット以外の多くのカットが列挙される。たとえば、 n 個のノードからネットワークにおいては $(n-1)$ 本の基本的なカットが求められるので、①の方法の場合は 2^{n-1} の組合せからいかに効率よく対象とするカットを求めるかという問題がある。この事は、他の②、③の方法においても同様な事がいわれる。したがって、これらの方法では対象とするネットワークの規模が大きくなると莫大な計算量が要求されてくる。

著者等は、道路網容量を通した道路網の感度分析を行うために必要なカット行列の作成手法について考察してきた。そして、このときカットの探索を「ループを含まぬスター（star）（あるノードに連結しているすべてのリンクからなる部分グラフ）は極小カット」というグラフ理論の定理を応用すると、カット行列の作成を簡単な行列演算で行うことができた。そこで、本研究はこのアルゴリズムをすべてのカットを列挙する方法に拡張しようとするものである。その結果、前述の他の方法のように極小カット以外のカットが求められることなく、容易にカットを列挙することができた。

* 助教授 土木工学科

2. 記号の定義

本研究で対象とするネットワークは無向グラフであるが、次章以降で必要な用語、記号の定義を図-1を例として説明する。道路網等で対象とするグラフは一般に図-1のような平面グラフ(planar graph)であるが、この平面グラフは紙面をいくつかの領域に分割し、その領域は何本かのリンクで囲まれている。そして、その囲まれた領域は内部領域と呼ばれ、囲まれていない領域は外部領域という。たとえば、図-1ではリンク1, 5, 6, 9からなる f_2 など f_3, f_4, f_5, f_6 が内部領域で、 f_1 が外部領域である。

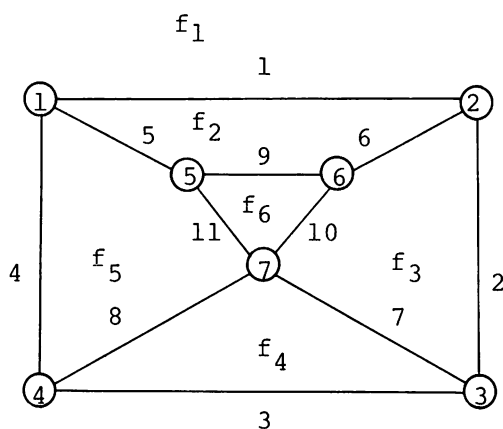


図-1 ネットワーク (グラフ)

l : グラフを構成するリンク数($=l_1+l_2$)

l_1 : 内部リンクの数(内部領域だけ接しているリンク5, 6, 7, 8, 9, 10, 11などを言う)

l_2 : 外部リンクの数(外部領域に接しているリンク1, 2, 3, 4などを言う)

n : ノードの数($=n_1+n_2$)

n_1 : 内部ノードの数(内部リンクだけが連結しているノード5, 6, 7などを言う)

n_2 : 外部ノードの数(外部リンクも連結しているノード1, 2, 3, 4などを言う)

連結した平面グラフにおいて、そのグラフのノード、リンクおよび領域(内部と外部の全領域)の数をそれぞれ n, l, f とすると、オイラーの多面体公式により式(1)を満足させる。

$$n - b + f = 2 \quad \text{---(1)}$$

3. カットセットの列挙法について

本研究においては、前述のように「ループを含まぬスターは極小カット」というグラフ理論の定理を基礎にカットセット列挙のアルゴリズムを考えるが、ここでは内部ノードが1以下と2以上に分けてアルゴリズムを考察する。まず、内部ノードが1以下のネットワークに対するアルゴリズム1は以下の通りである。

(1) ネットワークを構成するリンクを内部リンクと外部リンクに分ける。

(2) ノードを行、リンクを列とする接続行列(incident matrix)を作成し、そのうち適当な $(n-1)$ 個の行を取り出した行列をカット行列とする。

(3) (2)で作成されたカット行列において、外部リンクに対応する列に1の要素をもつ行ベクトル(カット)が2つ以上存在するかどうかを調べる。もし存在すれば、それぞれのカットはその外部リンクで交わっているため、該当する行ベクトルをmod 2 (2を法とする加法)で加えて新しいカットを求める。3つ以上存在するときには、その内の2つの行ベクトルを取り出すすべての組合せを考えればよい。

(4) (3)で作成された行列と(2)の行列との組合せで、(3)と同様のことを行う。組合せはそれぞれの行列から1つずつ取り出す組合せだけを考えればよい。このとき、当然(2)の同じカットが再度mod 2で加えられる計算は必要ない。また、すべての内部リンクを含むカットは除く。

(5) このように、新らしく作成された行列と(2)の行列との組合せで極小カットを求めてゆく。そして、ノード数が n のとき、これまでの計算ステップ回数は $(n-1)$ 回である。

このような手順を通して内部ノードが1以下の場合のネットワークのすべての極小カットを求めることができる。そして、この手順においては手順(4)のように同じカットが重複して出現しないための検討は必要であるが、前述の他の方法のようにノードを3つ以上に分割するカットは出現しない。手順(2)は次のグラフ理論の定理「接続行列はカットセット行列の特別なもの」を応用したものであり、また接続行列から $(n-1)$ 個を取り出すのはカット行列の階数(rank)が $n-1$ であるからである。また、手順(3)以降は外部リンクを短絡除去(リンクの両端点としてのノードを1点にまとめたのちそのリンクを取り去ること)してできたネットワークを対象にスターを求めているこ

とにほかならない。

次に、内部ノードが2以上の場合について考える。この場合も基本的に前述のアルゴリズム1と同じであるが、内部ノード同士でできるカットもあるため多少アルゴリズムが異なる。アルゴリズム2のおもな手順は次のとおりである。

(1) ネットワークを構成するリンクを内部リンクと外部リンクに、ノードを内部ノードと外部ノードに分ける。

(2) 内部ノード同士を連結している内部リンクをすべて短絡除去して、内部ノードを1つのノードに縮約する。そして、ネットワークを $(n_2 + 1)$ 個のノードを持つネットワークに縮約する。

(3) 縮約されたネットワークを対象に前述の内部ノードが1以下のアルゴリズム1の手順(2)~(5)を行う。

(4) 内部ノードと外部ノードを連結している内部リンクを短絡除去して、1点にまとめられたノードに対するスターを求める。そして、そのスターから1行のカット行列を作成する。

(5) (4)で作成された行列と(3)で作成された行列のうち接続行列から作成された行列において、同じ外部リンクを含む行ベクトル同士を前述のようにmod 2で加えて新しいカットを作成する。このとき、内部ノードと外部ノードを連結しているすべての内部リンクを含むカットはノードを3つ以上に分割するので除外する。

(6) (4), (5)を内部ノードと外部ノードを連結しているすべての内部リンクに対して行う。

このように、内部ノードを2つ以上含むネットワークに対しては大きく手順(1)~(3)と手順(4)~(6)に分けられる。

4. 計 算 例

ここでは簡単な計算例を通して前章での2つのアルゴリズムについて考える。まず、図-2のネットワークを対象にアルゴリズム1の計算を行う。このネットワークは、 $l = 9$, $l_1 = 4$ (リンク6, 7, 8, 9), $l_2 = 5$ (リンク1, 2, 3, 4, 5), $n = 6$, $n_1 = 1$ (ノード6), $n_2 = 5$ (ノード6以外のノード)である。ステップ1として、このネットワークの接続行列から図-2の5つのカットが求められる。なお、図-5のリンク番号に○印をつけているのが外部リンクである。次に、外部リンクに対応する列に1を要素としてもつ行ベクトル(カット)同士をmod 2で加えると、ステップ2として図-2, 5に示すカット5~10の5本

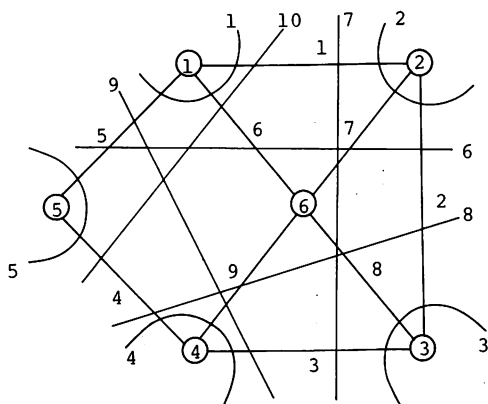


図-2 ネットワーク(内部ノード1の場合)とカット

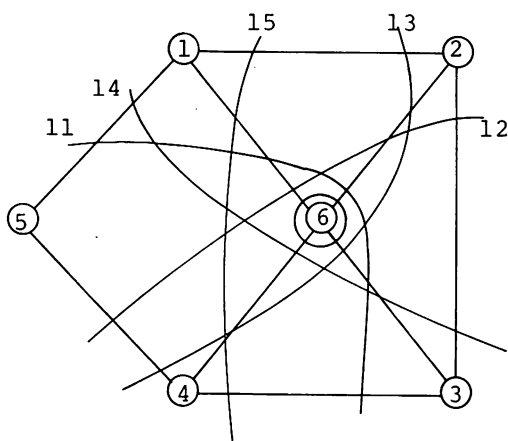


図-3 アルゴリズム1で得られたカット11~15

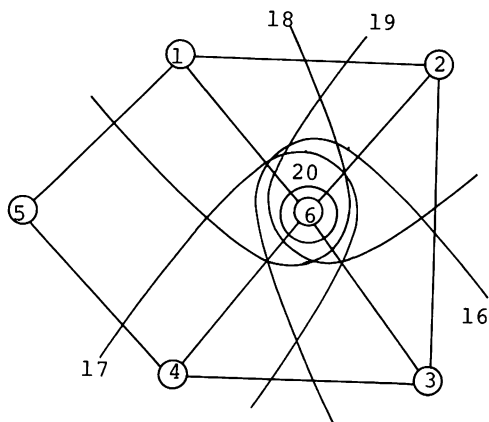


図-4 アルゴリズム1で得られたカット16~20

リ ン ク

ステップ /	①	②	③	④	⑤	6	7	8	9
カ	1	1	0	0	0	1	0	0	0
ツ	2	1	1	0	0	0	0	1	0
ト	3	0	1	1	0	0	0	0	1
	4	0	0	1	1	0	0	0	1
	5	0	0	0	0	1	1	0	0
ステップ2									
6 (1+2)	0	1	0	0	1	1	1	0	0
7 (2+3)	1	0	1	0	0	0	1	1	0
8 (3+4)	0	1	0	1	0	0	0	1	1
9 (4+5)	0	0	1	0	1	0	0	0	1
10 (1+5)	1	0	0	1	0	1	0	0	0
ステップ3									
11 (1+7)	0	0	1	0	1	1	1	1	0
12 (2+10)	0	1	0	1	0	1	1	0	0
13 (2+8)	1	0	0	1	0	0	1	1	1
14 (3+9)	0	1	0	0	1	0	0	1	1
15 (4+10)	1	0	1	0	0	1	0	0	1
ステップ4									
16 (2+15)	0	1	1	0	0	1	1	0	1
17 (3+12)	0	0	1	1	0	1	1	1	0
18 (2+14)	1	0	0	0	1	0	1	1	1
19 (3+15)	1	1	0	0	0	1	0	1	1
ステップ5									
20 (1+18)	0	0	0	0	0	1	1	1	1

図-5 アルゴリズム1でカットを求める過程

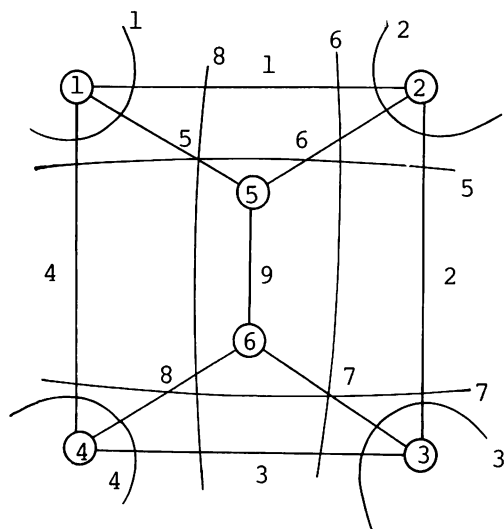


図-6 ネットワーク(内部ノード2の場合)とカット1~8

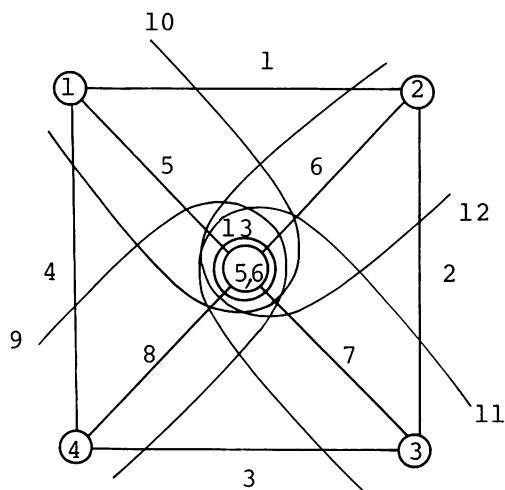


図-7 アルゴリズム2の手順(1)~(3)で得られたカット

リ ン ク

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
カ	1	1	0	0	1	1	0	0	0
ツ	2	1	1	0	0	0	1	0	0
ト	3	0	1	1	0	0	0	1	0
	4	0	0	1	1	0	0	0	1
	5	0	1	0	1	1	1	0	0
	6	1	0	1	0	0	1	1	0
	7	0	1	0	1	0	0	1	1
	8	1	0	1	0	1	0	0	1
	9	0	0	1	1	1	1	0	0
	10	1	0	0	1	0	1	1	1
	11	0	1	1	0	1	1	0	1
	12	1	1	0	0	1	0	1	1
	13	0	0	0	0	1	1	1	0

図-8 アルゴリズム2の手順(1)~(3)の過程で得られたカット

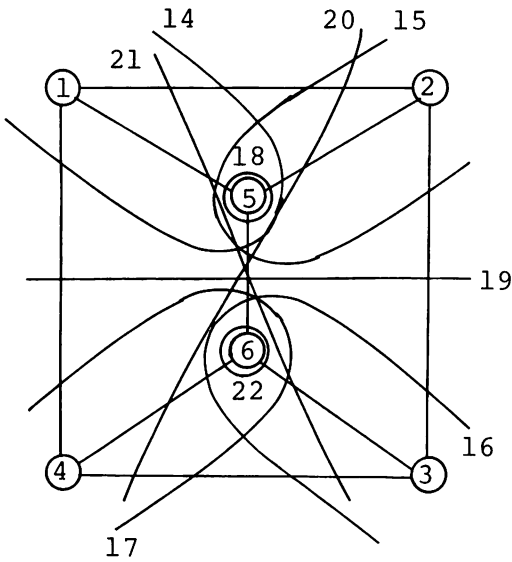


図-9 アルゴリズム2の手順(4), (5)で得られたカット

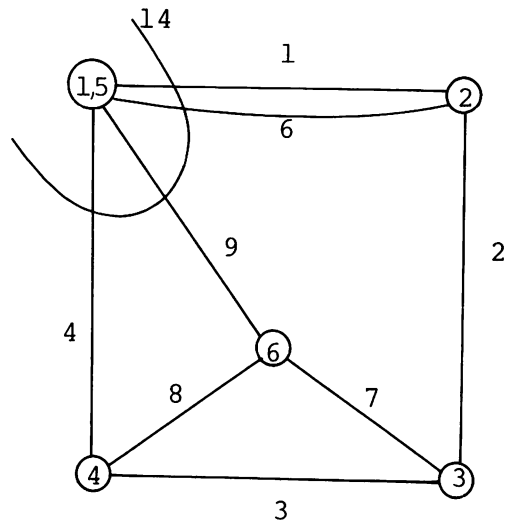


図-10 内部リンク5を短絡除去したときのネットワークとカット14

リンク		1	2	3	4	5	6	7	8	9
カット	14	1	0	0	1	0	1	0	0	1
	15	1	1	0	0	1	0	0	0	1
	16	0	1	1	0	0	0	0	1	1
	17	0	0	1	1	0	0	1	0	1
18 (1+14)		0	0	0	0	1	1	0	0	1
19 (2+14)		0	1	0	1	0	0	0	0	1
20 (4+14)		1	0	1	0	0	1	0	1	1
21 (3+15)		1	0	1	0	1	0	1	0	1
22 (3+16)		0	0	0	0	0	0	1	1	1

図-11 アルゴリズム2の手順(4)~(5)の過程で得られたカット

のカットが求められる。さらに、手順(5)を繰り返すと、図-3、4のカット11~20の10本のカットが図-5のステップ3~5の過程で得られる。したがって、前述のようにこの場合はノード数が6なので5つのステップを通してすべてのカットを探索することができる。

次に、内部ノードが2つの図-6を通して計算を行う。このとき、 $l = 9$ 、 $l_1 = 5$ 、 $l_2 = 4$ 、 $n = 6$ 、 $n_1 = 2$ 、 $n_2 = 4$ である。そして内部ノード同士を連結しているリンク9を短絡除去すると図-7のネットワークが得られる。この図-7に対してアルゴリズム1の手順(2)~(5)を繰り返すと、図-6、7のカットが得られる。これらのカットのカット行列は図-8に示した。次にアルゴリズム2の手順(4), (5)にもどって、外部ノードと内部ノードを

連結している内部リンクを短絡除去すると、それぞれ図-9のカット14~17の4本のカットを得る。リンク5を短絡除去したネットワークの例を図-10に示した。これら4本のカットと図-8のカット1~4の4本のカットにおいて同じ外部リンクに要素1をもつベクトル同士をmod 2で加えると、図-9のカット18~22の5本のカットを得る。したがって、このネットワークにおいては22本のカットを得る。なお、これらのカット行列は図-11に示した。

このように、内部ノードが2つ以上の場合にはリンクの短絡除去を必要とするが、同じ外部リンクに交わるリンクの行ベクトル同士をmod 2で加える演算を通してすべてのカットを列挙することができる。また、アルゴリズム2においては手順(5)で内部ノードと外部ノードを連結しているすべての内部リンクを含むカットを対象外とする必要があるが、一般にノードを3つ以上の集合に分割するカットは探索されない。

5. あ と が き

以上、本研究は著者等が道路網の感度分析に必要なカット行列の作成過程において考察した方法を応用してすべてのカットを列挙するアルゴリズムを考えた。そして、4. で挙げた計算例以外においてもいくつかの計算を行ったところ、他の計

算例においても3. で考察したアルゴリズムを通してすべてのカットを列挙することができた。しかし、3. で考察したアルゴリズム1, 2については定理, 証明などを含めて十分にグラフ理論的な議論をしていない面もあるので, 大規模なネットワークへの適用なども含めて今後さらに考察を進めて行く予定である。

参 考 文 献

- (1) 前田・伊東：現代グラフ理論の基礎, オーム社, 1978
- (2) 小野寺：グラフ理論の基礎, 森北出版, 1971
- (3) 伊理ほか：演習グラフ理論－基礎と応用－, コロナ社, 1983
- (4) 三根・河合：信頼性・保全性の数理, 朝倉書店, 1982
- (5) 榎谷・加来：道路網容量増強問題について, 土木学会第35回年次学術講演会概要集, 1980
- (6) 榎谷・加来：カット行列の作成手法について, 土木学会北海道支部論文集, 第39号, 1983
- (7) 小林：道路網・ネットワークシステムの信頼度解析法に関する研究, 昭和55年度都市計画学会学術研究発表会論文集, 1980
- (8) 西村：ネットワーク容量増強問題と最適ネットワーク問題への拡張について, 土木学会論文報告集, 第258号, 1977

(昭和58年11月30日受理)