

# 状態方程式の数値計算とグラフ化—第9報—

笹 村 泰 昭\*・宇 野 克 志\*

Graphical representation of the numerical calculation results for  
the equations of state  
—part IX—

Yasuaki SASAMURA and Katsushi UNO

## 要 旨

小島らの提出した新しい cubic 型状態方程式

$$P = \frac{RT}{v} \cdot \frac{v + \frac{m}{4} \cdot b}{v - (1 - \frac{m}{4}) \cdot b} - \frac{aT^h}{v(v+c)}$$

の“圧縮係数の一般化線図”を描き実測値に基づく図と比較した。Redlich-Kwong 型、Moritz 型の式についても検討を加え、Marquardt 法による実測値への最適化でプライム定数  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ , 指数  $h$ , 定数  $u$ ,  $w$ ,  $m$ などを求め「より正しく」実測値を表わすことができるかどうかの可能性を調べた。その結果簡便さを考慮し定数の少ない Redlich-Kwong 型の式

$$P = \frac{RT}{v-b} - \frac{aT^h}{v(v+c)}$$

が親しみやすく優れていると判断した。

## Synopsis

We drew the generalized compressibility factor charts for the new cubic equation of state

$$P = \frac{RT}{v} \cdot \frac{v + \frac{m}{4} \cdot b}{v - (1 - \frac{m}{4}) \cdot b} - \frac{aT^h}{v(v+c)}$$

,which proposed by K.Kojima and K.Tochigi.

We determined the dimensionless constant  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ , exponential index  $h$  and the new constant  $m$  to fit for the experimental data by the Marquardt method.

Considering the simplicity, we concluded that the Redlich-Kwong type equation

$$P = \frac{RT}{v-b} - \frac{aT^h}{v(v+c)}$$

is the better one at the present time.

## 1. 緒 言

既報<sup>1,2)</sup>に引き続き“圧縮係数の一般化線図”を描き状態方程式を評価する方法を石川らの式<sup>3)</sup>(I-C-L式), 小島らの式<sup>4)</sup>(K-T式)にも適用した。Redlich-Kwong式<sup>5)</sup>の修正が第二項目(引力項)に集中していた<sup>6)</sup>が①式で表わされるこれらの新しいcubic型の式は、剛体球理論<sup>7)</sup>に基づいて第一項目を修正している。

$$P = \frac{RT}{v} \cdot \frac{v + \frac{m}{4} \cdot b}{v - (1 - \frac{m}{4}) \cdot b} - \frac{aT^h}{v(v+c)} \quad \cdots \text{①}$$

$a, b, c$ は状態方程式①の定数,  $h$ は一般にR-K式の-0.5が用いられているが, 温度補正を考慮して, 変えることができるよう, 指数定数として表わした。 $m=0$ がR-K式,  $m=2$ がI-C-L式,  $m=1.5$ がK-T式である。本報はこの定数 $m$ が「より正しく」実測値を表わすのに役立っているかどうかに注目し定数の最適化を試み考察した結果である。前報<sup>2)</sup>のR-K型の式②, Moritzitz型の式<sup>8)</sup>③についてもさらに検討し手を加えた。

$$P = \frac{RT}{v-b} - \frac{aT^h}{v(v+c)} \quad \cdots \text{②}$$

$$P = \frac{RT}{v-b} - \frac{aT^h}{v^2 + u b v + w b^2} \quad \cdots \text{③}$$

計算は本校のHITAC-8250型, 描図は付属のX-YプロッターH-829-1型を使用した。最適化の収束計算は一部北海道大学大型計算機センターを利用した。

## 2. “圧縮係数の一般化線図”を描くための計算

### 2-1 プライム定数の計算

①式を展開すると体積 $v$ に関する3次式④が得られる。(ただし $m/4 = s$ とおく)

$$\begin{aligned} v^3 - & \left\{ (1-s)b - c + \frac{RT}{P} \right\} \cdot v^2 + \frac{aT^h}{P} \\ & - \frac{sbRT}{P} - (1-s)bc - \frac{cRT}{P} \} \cdot v - \\ & \left\{ \frac{(1-s)abT^h}{P} + \frac{sbcRT}{P} \right\} = 0 \quad \cdots \text{④} \end{aligned}$$

④式に無次元定数(プライム定数, ユニバーサル

定数)  $a', b', c'$ , を用い  $a = a' \cdot RT_c^{2-h}/P_c$ ,  $b = b' \cdot RT_c/P_c$ ,  $c = c' \cdot RT_c/P_c$  とおきかかる。 $P_c$ ,  $T_c$  はそれぞれ臨界圧力と温度,  $R$  は気体定数である。さらに臨界圧縮係数  $z_c$  を導入すると⑤~⑦式が得られる。

$$3 z_c = 1 + (1-s)b' - c' \quad \cdots \text{⑤}$$

$$3 z_c^2 = a' - sb' - (1-s)b'c' - c' \quad \cdots \text{⑥}$$

$$z_c^3 = (1-s)a'b' + sb'c' \quad \cdots \text{⑦}$$

$c' = b'$  とすると⑤, ⑥式より

$$a' = (1-sb')2/3 + (1-s)b' + (1-s)b'^2 \quad \cdots \text{⑧}$$

⑤, ⑧式を⑦式に代入して

$$(8s^3 - 36s^2 + 54s - 27) \cdot b'^3 + (12s^2 - 9s - 27) \cdot b'^2 + (6s - 9) \cdot b' + 1 = 0 \quad \cdots \text{⑨}$$

従って  $m$  を決めて⑨式より  $b'$  を, 次いで⑧式より  $a'$  が求められる。結果を表-1に示した。

表-1 新しいcubic型状態方程式のプライム定数

	$m$	$a'$	$b'$	$z_c$
R-K式	0	0.42748	0.08664	0.333
I-C-L式	2	0.46712	0.10876	0.315
K-T式	1.5	0.45517	0.10207	0.321

⑨式の3次式の解法はcardano法によった。R-K式の場合は実根が1ヶであったがI-C-L式, K-T式では3ヶとも実根でそのうち2ヶが負の値であった。正の根を  $b'$  の値とした。表にも示したように  $c' = b'$  とすると  $z_c$  は決ってしまい個々の物質の挙動を表わすことが難かしくなる。小島ら<sup>4)</sup>は  $c'$  を個々物質の  $z_c$  から逆算して用いている。

### 2-2 圧縮係数 $z$ の計算

④式に換算圧力  $P_r$ , 換算温度  $T_r$  を導入し  $v =$

$$\frac{RT}{P} \cdot z \text{ を代入すると } ⑩ \text{ 式が得られる。}$$

$$z^3 - \{(1-s)B - C + 1\} \cdot z^2 + \{A - sB - (1-s)BC - C\} \cdot z - \{(1-s)AB + sBC\} = 0 \quad \cdots \text{⑩}$$

ただし  $A = a' \cdot P_r / T_r^{2-h}$ ,  $B = b' \cdot P_r / T_r$ ,  $C = c' \cdot P_r / T_r$  である。⑩式において  $a', b', c', s$  (実は  $m$ ) を決め  $T_r, P_r$  を与える  $z$  を⑩式の3次式の解として求めることができる。3次式の解はcardano法によった。根の吟味について4に記述した。

### 2-3 実測値への最適化による定数探索

実測値は Viswanath ら<sup>9)</sup>のグラフから 11 ケの  $T_r$  について合計 313 ケの  $T_r, P_r \sim z$  の関係を読みとて使用した。最適化の計算は既報<sup>10)</sup>では非線型最小二乗法(附記-1), simplex 法を用いた。本報では収束は速いが発散の恐れのある前者の方法と、遅いが安定した収束をする後者の方法のそれぞれの長所を生かした Marquardt 法<sup>10)</sup>を使用し、FORTRAN による倍精度計算で行った。(附記-2) 3 次式の解は R-K 型, I-C-L, K-T 型の式については、3 実根が存在する場合にその最大の解を圧縮係数  $z$  とした。Moritz 型の式については解の選択のためか収束しなかったので、3 つの解のうち実測値に一番近い解を  $z$  とした。

なお初期値はそれぞれの式の元の型の値を用いた。

### 3. 結果と考察

2-3 の最適化で得られたプライム定数  $a', b', c'$ , 指数  $h$ , 新しい定数  $m$ , および  $u, w$  に基づいて、2-2 の⑩式、前報<sup>11)</sup>の⑫式で Moritz 型, R-K 型については前報<sup>2)</sup>の⑩式で  $d' = 0$  とし、3 次式を解く。

表-2 の誤差、ずれの計算の場合は 3 次式の解が 3 実根を持つ場合、2-3 の定数探索の場合と同様に Moritz 型の式の時には実測値との差の絶対値が小さい解を圧縮係数  $z$  とした。R-K 型, I-C-L, K-T 型の時はその最大の解を  $z$  とした。

表の誤差、ずれの表わし方は前報<sup>2)</sup>と全く同じである。

図を描く場合には各  $T_r$  ごとに  $P_r$  を 64 ケ選んでおり cardano 法の解が 3 実根を持つ時は全てその最大値を圧縮係数  $z$  とした。

図の右上の(1)～(16)は表-2 のそれと対応している。同じく図の( )の中の数値は表の最下段の誤差指標で 1.00 より少さい場合が元の R-K 式よりも実測値を「より正しく」表わすことができたことを示す。

右下方の数値が最適化によって求められた値で、他の定数などは、それぞれの式の固有の値、表-1 の値、である。

表-2 と図を照し合せて見ることによって式の特徴を把握することができる。

表-2において、R-K 型の式(1)～(4)では前報<sup>2)</sup>の  $c', h$  を最適化した場合が誤差指標が一番小さく(4)の全ての定数を動かした結果とほぼ同じである。Moritz 型の式(5)～(7)では  $a', b', u, w, h$  全てを最適化した場合の(7)が本報で示した 16 ケの中で誤差指標が 0.50 と最も小さかった。I-C-L 型の式(8)～(11)では  $m = 2$  と固定し全ての定数を変えた場合のみ 0.74 と R-K 式より誤差指標が小さくなる。元の式(8)はもとより(9), (10)についても  $P_r$  の大きい部分で実測値よりも  $z$  が小さいのが目立っている。この傾向は K-T 型の式にも見られ元の式(12),  $c'$  のみを変えた場合(13)らしきである。しかし(14), (15)では誤差指標が 0.69 とかなり修正することができる。

(16)は①式で全ての定数を自由に動かして最適化した場合で、初期値を I-C-L 式でスタートした場合と K-T 式でスタートした場合の結果が一致した。これは 5 つもの定数を変えて使用することになる。一番誤差指標の小さい Moritz 型の(7)も同じく 5 つである。本報の計算の範囲では全体像を最も良く表わすことのできるのは、簡便さを考慮すると③の  $a', b'$  をそれぞれ R-K 式の 0.42748, 0.08664 に固定し  $c', h$  の 2 つの定数を動かした場合である。すなわち個々の物質の固有値として  $c'$  を変え、その物質の温度による挙動を指数  $h$  で表現しようとする方法が今のところ優れていると考えられる。もちろん状態方程式を使用する場合のそれぞれの用途によってどの型の式が適当であるかは変って来るが、それぞれの物質の P-v-T 関係を精度良く表わそうとする余り、式が複雑になったり、定数が多くなりそれぞれの定数が意味を持たなくなったりするので注意しなければならない。狭い範囲の物質の挙動を精度良く表わす場合にはむしろ virial 式の方が適切かも知れない。本報での(1)～(16), 式①～③のどの型が実測値にフィットしているかは読者諸氏の「目」におまかせした方が良いであろう。

表-2 Cubic型最適化状態方程式の実測値からのずれ

Tr	P <sub>r</sub>	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
1.0	0.28	0.6	0.6	0.6	0.6	0.7	0.6	-0.1	0.0	0.0	0.0	1.1	0.2	0.2	1.0	1.0	0.7
	0.50	1.8	1.6	1.5	1.7	2.1	1.9	0.6	0.6	0.6	2.7	1.0	1.6	2.4	2.4	2.0	
	0.74	5.7	3.0	2.6	3.3	4.7	4.1	2.4	1.6	1.6	5.9	2.2	2.2	4.8	4.8	3.0	
	0.46	6.1	4.3	2.9	4.8	8.5	6.8	5.5	3.5	3.5	8.6	4.1	4.1	7.5	7.5	5.7	
	0.92	8.0	4.3	1.0	5.2	11.6	8.9	8.5	4.6	4.6	11.1	9.7	9.7	9.7	9.7	6.6	
	1.40	8.7	-26.2	-30.2	-29.2	-7.0	-31.1	-7.2	-1.6	-1.6	-23.7	-1.6	-0.7	-23.7	-23.7	-28.1	
	1.03	8.6	-6.1	-12.5	-11.6	-0.7	-14.0	-17.6	0.7	0.7	-6.3	3.0	3.0	-8.1	-8.1	-10.5	
	1.69	15.7	2.0	-2.6	-2.6	-1.1	-5.2	-9.3	4.6	4.6	1.9	7.2	7.2	0.4	0.4	-1.7	
	1.20	16.6	7.3	2.2	2.0	2.8	-0.6	-4.9	6.6	6.6	6.6	9.5	9.5	4.7	4.7	2.9	
	1.26	17.9	9.9	5.2	6.7	5.1	2.2	-2.2	7.5	7.5	8.3	10.3	10.3	7.2	7.2	5.3	
	1.32	18.9	11.7	7.3	6.7	6.6	4.1	-0.3	8.1	8.1	9.9	11.2	11.2	8.8	8.8	7.3	
	1.38	17.6	11.1	7.1	6.2	6.0	3.8	-0.5	6.6	6.6	9.2	9.8	9.8	8.2	8.2	6.8	
	1.50	16.6	11.5	8.1	6.8	6.2	4.6	-0.6	5.0	5.0	9.0	9.2	8.4	8.5	8.5	7.3	
	2.00	13.3	9.8	7.5	5.6	4.8	3.9	0.6	0.6	0.6	6.6	4.3	4.3	6.6	6.6	5.9	
	3.00	9.6	7.3	5.7	5.4	2.8	2.9	0.2	-4.3	-4.3	3.9	-0.3	-0.3	3.8	3.8	3.5	
	4.50	7.8	6.1	5.0	2.6	2.2	2.0	1.0	-7.6	-7.6	2.1	-3.2	-3.2	2.2	2.2	2.3	
	6.00	6.2	4.9	4.0	1.2	1.3	1.3	1.1	-10.1	-10.1	0.4	-5.5	-5.5	0.6	0.6	1.0	
	7.50	3.9	2.8	2.1	-0.8	-0.3	-0.3	0.1	-13.0	-13.0	-13.0	-0.0	-0.0	-8.5	-8.5	-1.1	
	9.00	2.2	1.3	0.7	-2.2	-1.6	-1.5	-0.6	-15.2	-15.2	-15.2	-3.9	-3.9	-10.2	-10.2	-2.6	
	(2)	3.319	2.478	2.026	1.906	1.754	1.958	1.173	3.101	3.101	3.101	2.409	2.549	2.551	2.512	2.512	2.045
	(21)																
1.1	0.25	1.1	1.0	1.1	1.2	1.1	1.1	0.6	0.8	0.8	1.3	0.9	0.9	1.3	1.3	1.2	
	0.50	0.2	0.1	0.3	0.5	0.4	0.5	-0.6	-0.3	-0.3	-0.2	0.7	-0.2	-0.2	0.6	0.6	0.6
	0.74	0.1	-0.1	0.2	0.6	0.6	0.7	-0.8	-0.6	-0.6	-0.4	0.8	-0.4	-0.4	0.7	0.7	0.7
	1.00	-1.4	-2.1	-1.6	-0.7	-0.6	-0.4	-1.9	-2.1	-2.1	-1.8	-0.8	-1.9	-1.9	-0.8	-0.8	-0.8
	1.20	-2.4	-4.1	-3.5	-1.7	-0.7	-0.8	-1.9	-2.4	-2.4	-2.0	-2.2	-2.4	-2.4	-2.1	-2.1	-1.9
	1.43	-1.8	-6.1	-5.7	-2.1	0.3	-0.4	0.5	-4.0	-0.0	0.8	-3.7	-0.4	-0.5	-3.3	-3.3	-2.5
	1.66	1.8	-4.0	-4.6	-1.6	0.2	-1.0	1.2	3.4	3.4	4.4	-3.0	2.9	2.9	-2.6	-2.6	-2.0
	1.86	5.5	0.2	-0.6	1.0	1.5	0.6	1.5	5.3	5.3	6.2	0.5	5.2	5.2	0.6	0.6	0.9
	2.30	7.8	3.1	2.3	3.1	2.8	2.2	2.0	6.0	6.0	6.9	6.4	6.4	3.0	3.0	3.0	3.0
	2.13	8.9	6.6	3.8	4.1	3.5	3.0	2.2	6.0	6.0	6.6	6.2	6.7	6.7	6.1	6.1	4.1
	2.41	8.6	5.0	4.2	3.8	2.9	2.6	1.2	3.9	3.9	4.5	4.1	5.1	5.1	4.1	4.1	3.9
	2.50	8.8	5.4	4.6	4.0	3.0	2.8	1.3	3.6	3.6	6.2	4.4	5.0	5.0	4.3	4.3	4.2
	3.00	7.8	5.0	6.3	3.2	2.1	2.1	0.4	0.6	0.6	1.0	3.6	2.6	2.6	3.5	3.5	3.3
	5.00	6.9	5.2	4.7	2.0	2.0	2.2	1.2	-4.3	-4.3	-4.0	2.7	-1.1	-1.1	2.7	2.7	2.7
	7.50	4.7	3.5	3.1	0.7	0.6	0.8	0.7	-8.3	-8.3	-8.2	0.3	-4.7	-4.7	0.4	0.4	0.6
	9.00	3.2	2.2	1.9	-0.7	-0.5	-0.3	0.3	-11.2	-11.2	-11.1	-1.6	-7.2	-7.2	-1.5	-1.5	-1.0
	(2)	2.339	1.809	1.629	1.046	0.739	0.715	0.666	2.411	2.411	2.502	1.227	1.938	1.937	1.179	1.179	1.096
	(21)																
1.2	0.28	-0.4	-0.6	-0.2	-0.2	-0.4	-0.2	-0.8	-0.6	-0.6	-0.5	-0.2	-0.5	-0.3	-0.2	-0.2	-0.2
	0.74	-0.6	-0.7	-0.2	0.1	-0.3	0.0	-1.3	-0.8	-0.8	-0.7	-0.3	-0.7	-0.7	-0.2	-0.2	0.0
	1.32	-0.6	-1.4	-0.1	0.8	0.5	0.9	-0.6	-0.2	-0.2	0.2	-0.6	-0.3	-0.3	-0.2	-0.2	-0.3
	1.50	0.1	-1.1	0.5	1.7	1.2	1.9	0.7	1.0	1.0	1.6	-0.2	0.8	0.8	0.4	0.4	1.2
	2.00	5.1	0.4	2.3	4.1	3.7	4.6	4.5	5.3	5.3	6.2	1.3	4.7	4.7	2.2	2.2	3.5
	2.50	4.0	1.0	2.5	4.0	3.3	4.0	4.5	5.6	5.6	6.7	1.7	5.2	5.2	2.3	2.3	3.4
	3.00	4.5	1.6	2.6	2.8	2.6	2.2	2.1	3.4	3.4	4.3	1.9	3.6	3.6	2.2	2.2	2.6
	5.00	4.3	2.8	3.0	1.6	0.6	1.2	0.6	-2.1	-2.1	-1.6	1.8	-0.3	-0.3	1.8	1.8	1.7
	7.00	2.1	0.9	0.9	-1.0	-1.5	-1.0	-1.1	-7.2	-7.2	-6.9	-0.9	-4.7	-4.7	-0.9	-0.9	-0.9
	9.00	-1.2	-0.2	0.2	-2.0	-2.1	-1.7	-1.2	-10.0	-10.0	-9.7	-2.2	-6.9	-6.9	-2.2	-2.2	-2.0
	(2)	1.478	0.733	0.846	1.265	1.062	1.203	1.229	2.850	2.850	2.969	0.826	2.146	2.145	0.909	0.909	1.133
	(21)																
1.3	0.25	-1.7	-1.8	-1.6	-1.5	-1.7	-1.6	-2.1	-1.8	-1.8	-1.8	-1.7	-1.8	-1.8	-1.6	-1.6	-1.6
	1.50	-1.1	-1.6	-0.2	-0.2	-0.4	-0.4	-1.0	-0.3	-0.3	0.2	-1.1	-0.5	-0.5	-0.6	-0.6	0.2
	2.00	-0.9	-2.0	-0.0	1.0	-0.1	1.0	0.0	0.8	0.8	1.5	-1.4	0.3	0.3	-0.6	-0.6	0.5
	2.50	-0.0	-1.7	0.4	1.5	0.3	1.5	1.2	2.1	2.1	3.0	-0.9	1.5	1.5	-0.2	-0.2	1.0
	3.00	1.0	-0.9	1.0	1.8	0.4	1.6	1.7	2.6	2.6	3.5	-0.1	2.1	2.1	0.5	0.5	1.3
	3.50	1.7	-0.2	1.4	1.7	0.3	1.4	1.6	2.3	2.3	3.1	0.5	2.0	2.0	0.9	0.9	1.5
	5.00	2.5	0.8	1.9	1.4	0.1	1.0	1.0	0.6	0.6	1.3	1.1	1.0	1.0	1.3	1.3	1.4
	6.00	1.9	0.5	1.3	0.1	-1.0	-0.2	-0.2	-2.9	-2.9	-2.3	0.3	-1.6	-1.6	0.3	0.3	0.2
	7.50	0.6	-0.5	-0.0	-1.6	-2.3	-1.6	-1.4	-6.2	-6.2	-5.7	-1.3	-4.4	-4.4	-1.4	-1.4	-1.5
	9.00	0.1	-0.8	-0.5	-2.3	-2.7	-2.1	-1.6	-8.2	-8.2	-7.9	-2.1	-6.0	-6.0	-2.2	-2.2	-2.3
	(2)	0.909	0.865	0.633	1.101	0.874	1.026	0.974	2.469	2.469	2.598	0.902	1.874	1.874	0.823	0.823	0.944
	(21)																
1.5	0.25	-0.7	-0.7	-0.6	-0.5	-0.7	-0.6	-0.9	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7	-0.6	-0.6	-0.6
	1.50	-2.3	-2.5	-1.3	-0.9	-1.2	-2.4	-1.5	-1.5	-1.1	-2.1	-1.7	-1.7	-1.7	-1.7	-1.7	-1.2
	2.00	-2.2	-2.6	-1.0	-0.5	-1.8	-0.8	-2.0	-0.9	-0.9	-0.4	-2.0	-1.3	-1.3	-1.6	-1.6	-0.9
	2.50	-1.6	-2.2	-0.2	0.3	-1.1	0.1	-0.9	0.2	0.2	0.8	-1.4	-0.3	-0.3	-0.9	-0.9	-0.1
	3.00	-1.1	-1.9	0.3	0.8	-0.7	0.6	0.0	1.1	1.1	1.8	-0.9	0.4	0.4	-0.3	-0.3	0.9
	3.50	-0.7	-1.7	0.6	1.0	-0.5	0.9	0.6	1.5	1.5	1.7	0.6	0.8	0.8	0.0	0.0	0.7
	4.50	-0.4	-0.7	0.6	1.0	-0.2	0.7	-0.0	1.5	1.5	1.7	0.6	0.8	0.8	0.7	0.7	0.9
	5.00	-0.3	-0.6	1.0	1.2	-0.1	1.0	0.3	1.6	1.6	2.1	1.0	1.1	1.1	1.0	1.0	1.1
	6.00	-0.7	-1.8	-0.2	-0.6	-2.0	-0.7	-0.4	-1.2	-1.2	-0.5	-0.5	-1.1	-1.1	-0.5	-0.5	-0.6
	7.50	-1.0	-2.0	-0.7	-1.7	-2.7	-1.6	-1.1	-3.4	-3.4	-2.8	-1.1	-2.8	-2.8	-1.2	-1.2	-1.5
	9.00	-1.2	-2.1	-1.1	-2.4	-3.2	-2.2	-1.5	-5.3	-5.3	-4.8	-1.6	-4.3	-4.3	-1.8	-1.8	-2.2
	(2)	1.062	1.088	0.593	0.866	1.444	0.866	0.944	1.590	1.590	1.571	0.974	1.349	1.349	0.821	0.821	0.809
	(21)																
2.0	0.25	-0.1	-0.1	0.1	-0.1	-0.1	-0.2	-0.2	0.0	0.0	-0.1	-0.8	-0.8	0.0	0.0	0.1	0.1
	1.50	-0.6	-0.7	0.1	0.2	-0.5	0.0	-0.7	0.2	0.2	0.4	-0.1	-0.6	-0.6	0.2	0.2	0.3
	2.00	-0.7	-0.8	0.4	0.6	-0.5	0.3	-0.5	0.7	0.7	1.1	0.2	0.3	0.3	0.3	0.3	0.5
	2.50	-0.7	-0.9	0.4	0.6	-0.5	0.3	-0.5	0.7	0.7	1.1	0.2	0.3	0.3	0.3	0.3	0.5
	3.00	-0.5	-0.7	0.6													

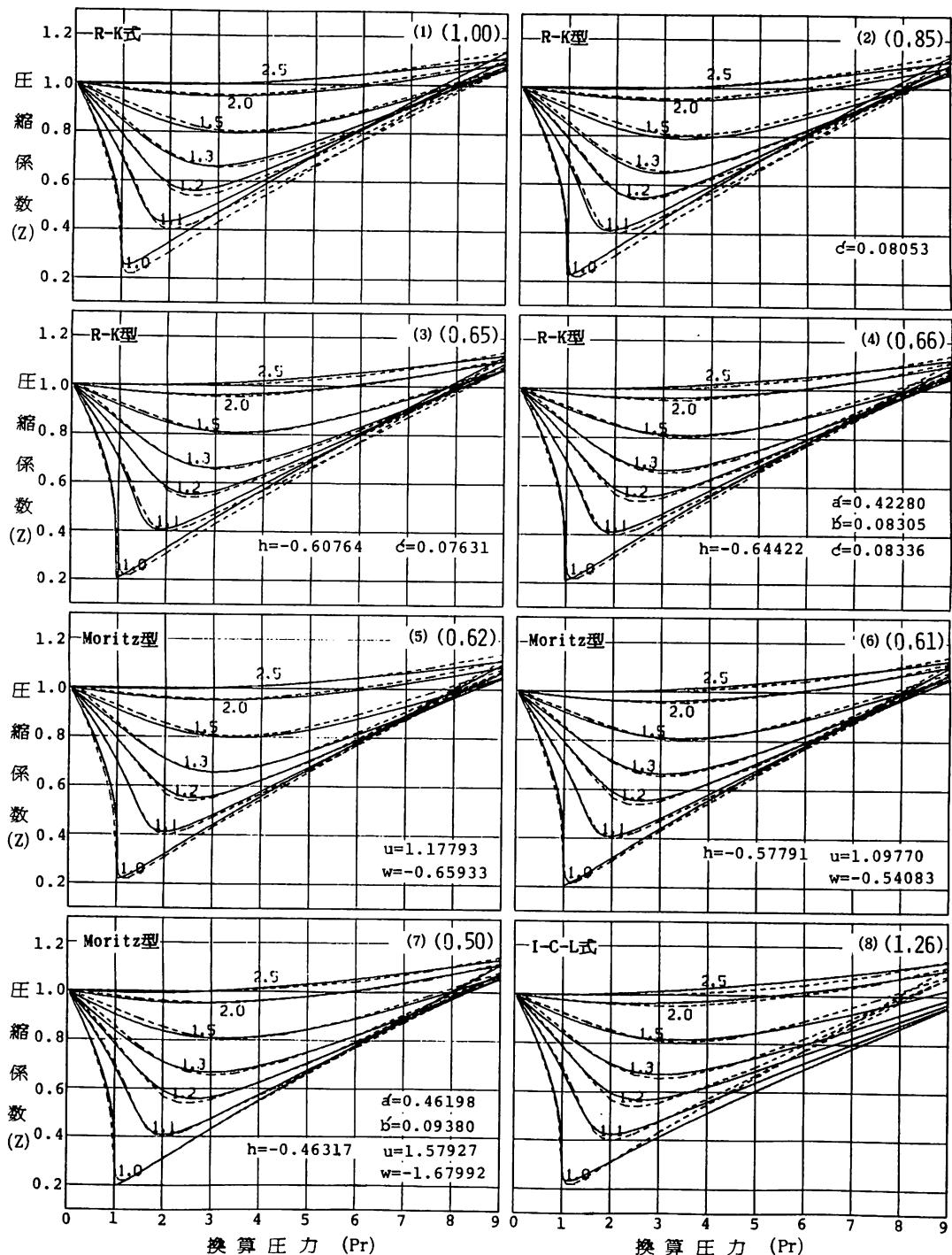


図 Cubic 型状態方程式の最適化による“圧縮係数”的一般化線図

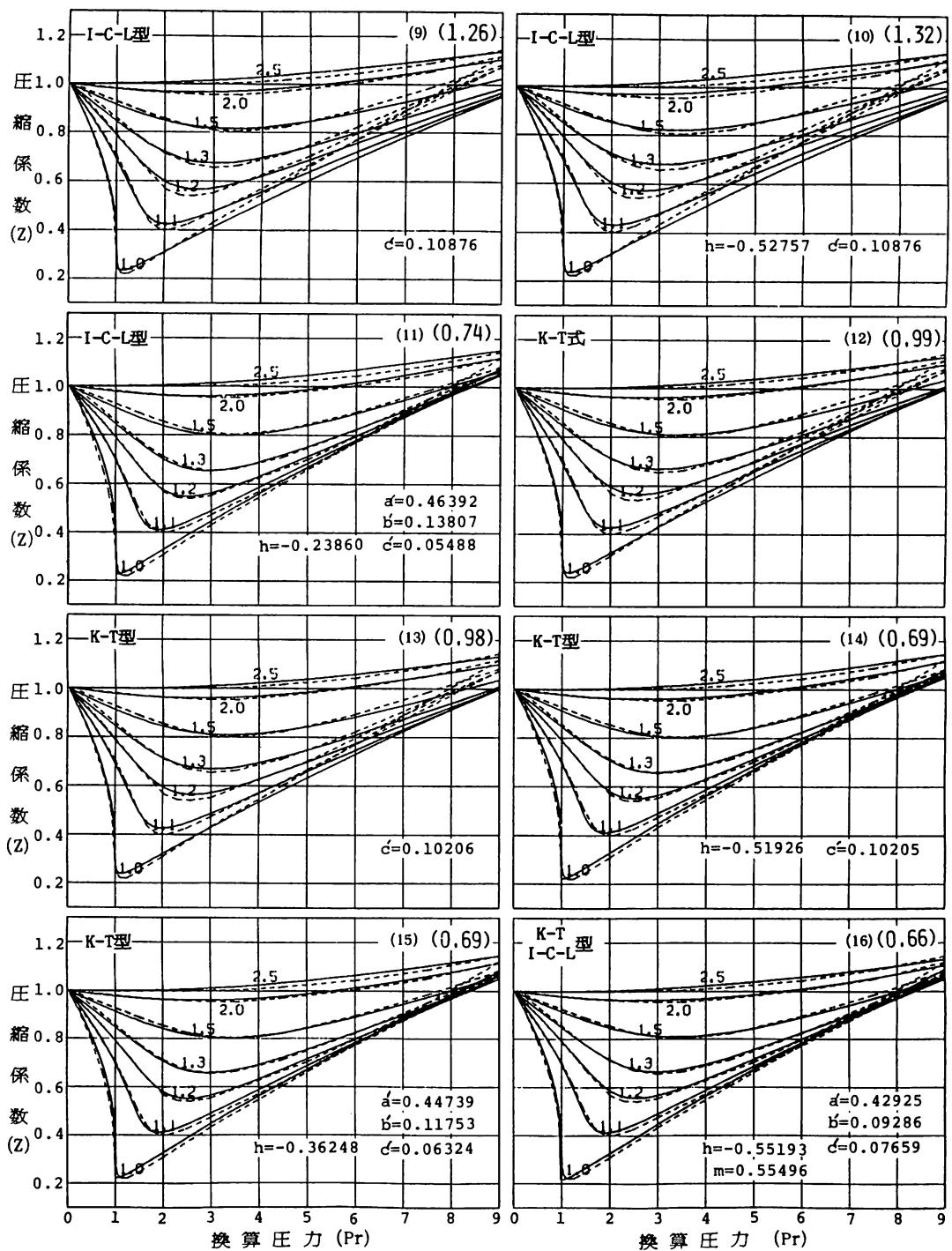


図 続き

#### 4. 3次式が実根を持つ場合の解の吟味

Peng らは 3つの解のうち 2相の存在する領域では一番大きい根が気相の圧縮係数、一番小さいのを液相の圧縮係数であるとしている<sup>11)</sup>。本報の計算、表-2 の誤差を求める場合、および図を描く場合に 3つの実根が得られた例を表-3 と表-4 に示した。 $T_r$  はいずれも 1.00 の場合である。 $\text{⑦}$ の場合  $T_r=2.0, 2.5$  に 3つの解を持つことがある。そのうちの 1つは負、もうひとつは極端に小さな値で式の第一項目の分母 ( $v - b$ ) が負になり從って圧力  $P$  も負になる場合と推測される<sup>12)</sup>。

図を描く場合には  $T_r$  ごとに 64ヶの  $P_r$  について計算している。その  $7 \times 16 \times 64 = 7,168$  点のうち 3実根を持つのは  $\text{⑦}$  の  $T_r=1.5, P_r=9.00, T_r=2.0, P_r=1.4$  から 9.0までと  $T_r=2.5$  で  $P_r$  64点全ての計 96 点を除き表-4 に示す 23 点で

表-3 cubic 型状態方程式の解の吟味-1

表-2 の式番号	$P_r$	実測値	3 つの 解		
(3)	0.92	0.498	0.503	0.208	0.299
(4)	0.92	0.498	0.524	0.227	0.249
(5)	1.00	0.300	0.439	0.225	0.322
(7)	1.00	0.300	0.199	0.426	0.321

表-4 cubic 型状態方程式の解の吟味-2

表-2 の式番号	$P_r$	3 つの 解		
(2)	0.94	0.486	0.245	0.275
	0.96	0.232	0.438	0.335
(3)	0.88	0.554	0.223	0.232
	0.91	0.516	0.208	0.285
	0.94	0.207	0.456	0.347
(4)	0.94	0.491	0.216	0.293
	0.96	0.219	0.447	0.340
(5)	0.98	0.480	0.234	0.270
	1.00	0.439	0.225	0.321
(6)	0.94	0.516	0.210	0.266
	0.96	0.486	0.207	0.299
	0.98	0.206	0.441	0.344
(7)	0.96	0.495	0.201	0.251
	0.98	0.466	0.199	0.281
	1.00	0.199	0.425	0.322
(11)	0.96	0.499	0.251	0.263
	0.98	0.460	0.233	0.321
(14)	0.96	0.486	0.230	0.294
	0.98	0.225	0.436	0.349
(15)	0.96	0.486	0.230	0.294
	0.98	0.225	0.436	0.349
(16)	0.96	0.486	0.230	0.294
	0.98	0.436	0.436	0.349

ある。 $T_r$  は全て 1.00 の場合で  $P_r$  もほぼ 1.0 に近い所である。臨界点付近においてそれぞれの解が Peng の言う液相と気相の挙動を表わしているか吟味する必要があると思われる。

#### 5. ま と め

R-K 型、Moritz 型、小島らの提出した新しい cubic 型の式について、定数を自由に動かし実測値にフィットするように最適化計算を行った。その結果、定数を自由に変えて見ても大巾に実測値を「より正しく」表わすことは難かしく、むしろ簡便さ親しみやすさを考慮するならば R-K 型の式

$$P = \frac{RT}{v - b} - \frac{aT^h}{v(v + c)}$$

で、 $a'$ 、 $b'$ を元の 0.42748、0.08664 に固定し、 $c'$ と  $h$ を変えて用いるのが良いと判断した。その場合の実測値からのずれ、誤差指標は R-K 式を 1.00 として、0.65 であった。

$c' = 0.07631, h = -0.60764$  は前報<sup>2)</sup>の simplex 法による最適化の結果  $c' = 0.07629, h = -0.60780$  と一致している。差は倍精度と単精度によるものと考えられる。

本報をまとめるにあたり色々と有益な御助言をいただいた本校工業化学科、平沼充安教授に心から感謝いたします。特に（附記-1）のプログラムは先生によるところが大きい。また電算機使用にあたりお世話になった電算室の方々にお礼申し上げます。

## (附記-1) 非線型最小二乗法プログラム前報<sup>2)</sup>の 3項式の場合

```

DICTIONARY NN(14),TR(14),PH(14,56),ZZ(14,56),PRR(327)+ZZZ(327)
COMMON P,T,Z,A0+80,C0,U0,F,DF1,DF2
READ (5,10) KTR
20 FORMAT (15)
  READ (5+153) (TH(I),I=1,KTR)
153 FORMAT (10F8.2)
  READ (5,100) (NN(I),I=1,KTR)
100 FORMAT (16I5)
  DO 250 I=1,KTR
  NP=NN(I)
  READ (5,151) (PR(I,K),K=1,NP)
151 FORMAT (16F5.3)
  READ (5,152) (ZZ(I,K),K=1,NP)
152 FORMAT (16F5.3)
250 CONTINUE

KZR=513
R=0.0R205

DO 280 I=1,KTR
NP=NN(I)
WRITE (6,225) TH(I),NN(I)
225 FORMAT (1H ,//,8X,TR*'F5.2,5X,'NP*',13)
  GO TO (61,62,63,64,65,66,67,68,69,70,71),1
61 DO 1101 K=1,NP
  J$K
  PRR(J)=PR(I,K)
  ZZZ(J)=ZZ(I,K)
1101 CONTINUE
M$1
N$45
GO TO 97
62 DO 1102 K=1,NP
  J$45*K
  PRR(J)=PR(I,K)
  ZZZ(J)=ZZ(I,K)
1102 CONTINUE
  /
データの数の指定
  /
71 DO 1111 K=1,NP
  J$294
  PRR(J)=PR(I,K)
  ZZZ(J)=ZZ(I,K)
1111 CONTINUE
M$295
N$KZR
87 WRITE (6,333) (PRR(J),J=M,M)
  WRITE (6,333) (ZZZ(J),J=M,M)
333 FORMAT (2X,16F8.3)
88 CONTINUE
  KEISAN
  WRITE (6,999)
999 FORMAT (1H1//,8X,'KEKKA'//,/)
  START,S CONSTANT
  R=M EQUATION
  A00=0.42748
  B00=0.08664
  M$**#
  DO 10 L=1,30
  WRITE (6,222) L
222 FORMAT (1H ,//,8X,'L='',15,/,1
  4 JO 5U
  D1=0.
  D2=0.
  D41=0.
  D42=0.
  DR1=0.
  DR2=0.
  DS=0.
  DO 2000 I=1,KTR
  T$TR(I)
  GO TO (161,162,163,164,165,166,167,168,169,170,171),1
161 M$1
  N$45
  GO TO 555
  /
データの数の指定
  /
171 M$295
N$KZR
555 DO 1000 J=M,M
  P$=PRR(J)
  Z$=ZZZ(J)
  KOKOKARA KEISAN
  A0=A00
  B0=800
SUB, CALL
  CALL KEISAN
  D1=DF1*01
  D2=DF2*02
  DS=$M*2*05
  A0=A00+0.0001
SUB, CALL
  CALL KEISAN
  D1=DF1*01
  D2=DF2*02
  DA0=A0+0.0001
SUB, CALL
  CALL KEISAN
  D1=DF1*01
  D2=DF2*02
  DS=$M*2*05
  A0=A00+0.0001
SUB, CALL
  CALL KEISAN
  D1=DF1*01
  D2=DF2*02
  D8B=P/T
  DCB0=+D080*P/T
  DBB0=+D030*P/M*2/T$M(3,+G)
  OFB0=-D080-DCB0)*M*2*(-B$DCB0-D880*C-DCB0+DAB0)*Z
  2-(A$DB30*DAB0*B$DB0)
1000 CONTINUE
2000 CONTINUE
  DAB0=0.
  D8B=P/T
  DCB0=+D080*P/T
  DBB0=+D030*P/M*2/T$M(3,+G)
  OFB0=-D080-DCB0)*M*2*(-B$DCB0-D880*C-DCB0+DAB0)*Z
  2-(A$DB30*DAB0*B$DB0)

DF1=F$W*F$A0
2+(-1,-U)*Z$W*DBU-B$W*DBU-B$W*2*DBU-(U$W*DBU+B$W*DBU)*DAU)*Z
3+(-1,-U)*Z$W*DBU*2,-M$W*DBU+A$W*DBU+O$W*DBU)*Z
DFW=(-(1,-U)*Z$W*DBU+B$W*DBU-B$W*2*DBU+O$W*DBU)*Z
2+((-1,-U)*Z$W*DBW+B$W*DBW-B$W*3)*(W$Z,W$W*DBW+B$W*2)+(A$DBW*DABW)
DF1=F$W*F$U
DF2=F$W*F$W
RETURN
END.

```

## (附記-2) Marquardt 法プログラム

```

DOUBLE PRECISION TH,PR,ZZ,F1,F2,BP,TC,PC,ELAM,H,EPS,FX
COMMON /BLDATA/NT,NM(12),ND,TR(12),PR(12,30),ZZ(12,30)
DIMENSION F(8),F(8),KJ(19),IF(8)
COMMON /SLUP/NUOPVT
COMMON /NAME/NA,NAME(19)
READ (5,150) KJ,(KJ,0),KJ=1,KJ
120 FORMAT (14.19A4)
READ (5,150) BP,TC,PC
READ (5,150) NT,(NM(K),K=1,NT)
130 FORMAT (16I5)
READ (5,150) (TR(K),K=1,NT)
150 FORMAT (10F8.5)
ND=0
DO 200 J=1,NT
NS=N(N)
ND=0+N$5
READ (5,150) (PH(J,K),K=1,NS)
READ (5,150) (ZZ(J,K),K=1,NS)
200 CONTINUE
READ (5,220) NUOPVT,NA,(NAME(K),K=1,NA)
220 FORMAT (2I2,19A4)
WRITE (6,270) (KJ,0),KJ=1,KJ
230 FORMAT (46.14,8F9.6)
240 FORMAT (3E10.1,10I5)
270 FORMAT (1H/,10X,19A4)
290 FORMAT (1H,10X,19A4)
READ (5,200) (NP,(F1(K),K=1,NP)
READ (5,240) ELAM,H,EPS,NFLAG,(F(K),K=1,NP)
WRITE (6,290) (NAME(K),K=1,NA)
WRITE (5,230) (K,NP,(F1(K),K=1,NP)
WRITE (5,240) ELAM,H,EPS,NFLAG,(F(K),K=1,NP)
CALL U3MARQ (NP,ND,NFLAG,IF,F1,ELAM,H,EPS)
900 CONTINUE
STOP
END

SUBROUTINE UNFUNC (F,FM)
DOUBLE PRECISION F,FM,TR,PH,ZZ,FX
COMMON /BLDATA/NT,NM(12),ND,TR(12),PR(12,30),ZZ(12,30)
DIMENSION F(8),FM(38)
COMMON /BLKZ/KZ,KX(3)
DO 50 J=1,3
50 KX(J)=0
KZ=0
K=0
DO 100 I=1,NT
NS=N(N)
DO 100 J=1,NS
K=K+1
100 FM(K)=ZZ(I,J)-FX(F,TR(I),PR(I,J),ZZ(I,J))
WRITE (6,300) KZ,(KX(L),L=1,3)
300 FORMAT (1H,23X,1ND=3',2X,KAI='13,
'2X,X'(1)='13,2X,X'(2)='13,2X,X'(3)='13)
RETURN
END

SUBROUTINE FONTAD (Ax,IND)
C --- METOD OF NICOLÒ FONTANA ---
DOUBLE PRECISION Ax,Px,U,D,RD
-,R1,R2,RC1,RC2,THETA
-,DA3S,DSORT,DATA,NDSIN,UCOS
DIMENSION A(3),X(3)
P=(A(1)/3.00)*#2+(A(2)/3.00
Q2,DW=(A(1)/3.00)*#3-(A(1)*A(2)/3.00*A(3)
D#MM#2+,D#MM#3+
IF (D) 900,900,100
100 RD=DSQRT(D)
IF (D) 300,300,200
200 R1=(-D-RD)/500
GO TO 300
300 R1=(-D-RD)/500
400 R2=-P#MM#2/R1
RC1=(DA8S(R1))*#(1.00/3.00)
IF (R1) 500,600,600
500 RC1=R1
600 RC2=(DA8S(R2))*#(1.00/3.00)
IF (R2) 700,800,800
700 RC2=R2
800 (IND=
X(1)=R2+RC2-A(1)/3.00
X(2)=+5D0*(RC1+RC2)-A(1)/3.00
X(3)=DA8S(DSQRT(3,D0)*(RC1-RC2)/2.00)
RETURN
900 IND=3
THETA=DATAN(DSQRT(-D)/(-Q))/3.00
RC1=-DCOS(THETA)*DSQRT(-P)
RC2=DSQRT(-P#3.00)*DSIN(THETA)
X(1)=2.00*DSQRT(-P)*DCOS(THETA)-A(1)/3.00
X(2)=RC1-RC2-A(1)/3.00
X(3)=RC1+RC2-A(1)/3.00
RETURN
END

C NONLINEAR LEAST SQUARES BY MARQUARDT D.N.
SUBROUTINE U3MARQ (NP,ND,NFLAG,BPM,BPM,ELAM,H,EPS)
DOUBLE PRECISION BPMX,XM,DXM,OMG,A=,BB,FMX,AJ,FM,BPM
-,DOSR,DHS,ELAM,TOL,AINC,DEC,FLAM,H,EPS,PM,PM0,DELH
DIMENSION BPMX(8),BPM(8),XM(8),DXM(8),OMG(8),AA(8,8)
DIMENSION BB(8,9),FMX(38),AJ(38,8),FM(38),BPM(8)
NP1=NP+1
TOL=10.00#M(-6)
AINC=10.00
DEC=0.100
FLAM=ELAM
NF=0
IG=0
CALL UNFUNC (BPM,FM)
PM=0.00
DO 150 J=1,ND
150 PM#M=(M)*K#2
WRITE (6,170) PM,(BPM(I),I=1,NP)
170 FORMAT (1H,5X,'PM',F10.6,5X,'BPM',F10.6)
NF=NF+1
IBC=0
DO 180 I=1,NP
180 IBC=IBC+IABS(BPM(I))
IF ((IBC,EO,0) GO TO 900
200 (G=1
FLAM#FLAM#DEC
IF ((FLAM,LT,TOL) FLAM=TOL
PM=PM
DO 240 J=1,ND
240 FMX(J)=FM(J)
DO 300 J=1,ND
300 AJ(J)=FM(J)/DELM
BPM(J)=BPM(J)-DELM
260 CONTINUE
270 CONTINUE
300 CONTINUE
300 CONTINUE
DO 500 I=1,ND
IF ((BPM(I),EO,0) GO TU 270
DELH=(JABS(BPM(I))+H)*NM
BPM(J)=BPM(J)+DELH
CALL UNFUNC (BPM,FM)
DO 260 I=1,ND
260 AJ(I,J)=(FM(I)-FMX(I))/DELM
BPM(J)=BPM(J)-DELM
270 CONTINUE
300 CONTINUE
300 CONTINUE
DO 500 I=1,ND
IF ((BPM(I),EO,0) GO TU 400
XM(I)=0.00
DO 320 J=1,ND
320 XM(I)=XM(I)+AJ(J,I)*FMX(J)
DO 380 J=1,ND
380 AA(I,J)=AA(I,J)+AJ(K,I)*AJ(K,J)
350 CONTINUE
360 CONTINUE
360 CONTINUE
380 CONTINUE
380 CONTINUE
GO TO 450
400 DO 420 J=1,ND
420 AA(I,J)=0.00
AA(I,J)=1.00
XM(I)=0.00
450 CONTINUE
500 CONTINUE
500 CONTINUE
DO 520 I=1,ND
520 OMG(I)=DSQRT(AA(I,I))
DO 550 I=1,ND
550 XM(I)=XM(I)/OMG(I)
DO 550 J=1,ND
550 AA(I,J)=AA(I,J)/(OMG(I)*OMG(J))
600 DO 630 I=1,ND
630 BB(I,NP1)=XM(I)
DO 620 J=1,ND
620 BB(I,J)=AA(I,J)
630 BB(I,J)=BB(I,J)+FLAM
DO 700 I=1,ND
700 BB(I,J)=BB(I,J)
I=I+1
DO 650 J=1,ND
650 BB(I,J)=BB(I,J)/BB(I,I)
DO 660 J=1,ND
660 IF ((I,EO,0) GO TO 670
DO 660 K=1,ND
660 BB(J,K)=BB(I,K)-BB(J,I)
660 BB(J,K)=BB(J,K)-BB(I,K)*BB(J,I)
670 CONTINUE
680 CONTINUE
700 CONTINUE
DO 710 J=1,ND
710 XM(I)=BB(I,NP1)/OMG(I)
710 BPM(I)=BPMX(I)+DXM(I)
CALL UNFUNC (BPM,FM)
NF#NF+1
PM=0.0
DO 720 J=1,ND
720 PM#PM+F(M)*K#2
IF ((PM,LT,PM) GO TO 750
FLAM#FLAM#DEC
IF ((FLAM,GT,1.00#M10) GO TO 900
GO TO 500
750 KODE=0
DO 770 J=1,ND
770 IF (DA3S(DXM(J))/(DABS(BPM(J))+H),GT,EPS) KODE=KODE+1
IF ((NFLAG,EO,0) GO TO 800
WRITE (6,170) PM,(BPM(I),I=1,ND)
800 IF (KODE,EO,0) GO TO 900
GO TO 200
900 CONTINUE
RETURN
END

R-K 型の場合

C
C DOUBLE PRECISION FUNCTION FX (F,TX,PX,ZX)
C P#M/(V-B)-ANT#M/(V#M(V-C))
C DOUBLE PRECISION F,x,A,Px,Tx,Apt,Bpt,Cpt,Xmax
C DOUBLE PRECISION Dabs,Xuef1,Xdef2,Zx
COMMON /BLKZ/Kz,Kx(3)
DIMENSION A(3),X(3),Fx(4)
APt=F(1)*Px/Tx*(2.00-F(4))
Bpt=F(2)*Px/Tx
Cpt=F(3)*Px/Tx
A(1)=3Pt-Cpt-1.00
A(2)=3Pt*Cpt-Cpt+ApT
A(3)=ApT*Bpt
CALL F3MTAO (A,x,Ind)
Fx=x(1)
IF ((Ind,EO,1) RETURN
Jx=1
Kz#Kz+1
Xdef1=Jabs(X(1)-Zx)
DO 200 J=2,3
Xdef2=Jabs(X(j)-Zx)
IF ((Xdef2,GE,Xdef1) GO TO 200
Xdef1=Xdef2
Fx=x(j)
Jx=j
200 CONTINUE
DO 300 J=1,3
300 IF ((J,EO,JX) Xk(j)=Kx(j)+1
RETURN
END

```

### K-T型の場合のSUBROUTINE I-C-L

```

      DOUBLE PRECISION FUNCTION FX (F,TX,PX,ZX)
      Z=(F5+F4*Y)/(F7-(F6-F4)*Y)-F1*WTF4/(RWT*(V+F2))   Y=F2/(4*W)(12)
      DOUBLE PRECISION F,X,A,X1,TX,APT,BPT,CPT,F7,XMAX
      DOUBLE PRECISION DABS,XDEF1,XDEF2,ZX
      COMMON /BLKZ/K2,KX(3)
      DIMENSION A(3),X(3),F(8)
      APT=F(1)*PX/TX**2*(2.00-F(4))
      BPT=F(2)*PX/TX
      CPT=F(5)*PX/TX
      F7=+.00WF(7)
      A(1)=3*PTWF(8)/F7+8PTWF(6)/F7+CPT-F(5)/F(7)
      A(2)=3*PTWCPTWF(8)/F7+8PTWCPTWF(6)/F7-8PTWF(6)/F7-CPTWF(5)/F(7)
      BPT=A(3)*(-BPTWF(6))-APT*BPTWF(8)+APT*BPTWF(6))/F7
      CALL F3NTAO (A,X,IND)
      FX=x(1)
      IF (IND.EQ.1) RETURN
      JX=1
      K2=X+1
      XDEF1=3*A85(X(1))-ZX
      DO 200 J=2,3
      XDEF2=3*A85(X(J))-ZX
      IF (XDEF2.GE.XDEF1) GO TO 200
      XDEF1=XDEF2
      FX=x(J)
      JX=J
  200 CONTINUE
  DO 300 J=1,3
  300 IF (J.EQ.JX) KX(J)=KX(J)+1
  RETURN
  END

```

### Moritz型の場合のSUBROUTINE

```

      DOUBLE PRECISION FUNCTION FX (F,TX,PX,ZX)
      C = P=RWT/(V-B)-APT*WTF/(V*#2+UMB#V+WB#W#2)
      DOUBLE PRECISION F,X,A,PX,TX,APT,BPT,XMAX
      DOUBLE PRECISION DABS,XDEF1,XDEF2,ZX
      DIMENSION A(3),X(3),F(8)
      COMMON /BLKZ/K2,KX(3)
      APT=F(1)*PX/TX**2*(2.-F(3))
      BPT=F(2)*PX/TX
      A(1)=F(4)*BPT-BPT-1.00
      A(2)=(F(5)-F(4))*BPT**2-F(4)*BPT+APT
      A(3)=-(F(5)*BPT**2-F(5))*BPT*W#2-APT*WPT
      CALL F3NTAO (A,X,IND)
      FX=x(1)
      IF (IND.EQ.1) RETURN
      JX=1
      K2=X+1
      XDEF1=3*A85(X(1))-ZX
      DO 200 J=2,3
      XDEF2=3*A85(X(J))-ZX
      IF (XDEF2.GE.XDEF1) GO TO 200
      XDEF1=XDEF2
      FX=x(J)
      JX=J
  200 CONTINUE
  DO 300 J=1,3
  300 IF (J.EQ.JX) KX(J)=KX(J)+1
  RETURN
  END

```

### 文 献 等

- 1) 笹村, 宇野, 分離技術, 13, 29(1983)
- 2) 笹村, 宇野, 本校紀要, 第18号, 63(1983)
- 3) 石川, Chung, Lu, AIChE. Journal, 26, 372(1980)
- 4) 柄木, 栗原, 高野, 小島, 化学工学協会第17回秋季大会, 研究発表講演要旨集, p 392
- 5) Redlich, Kwong, Chem. Rev., 44, 233(1949)
- 6) 例えば Soave, Chem. Eng. Sci., 27, 1197(1972)
- Peng, Robinson, Ind. Eng. chem., Fundam., 15, 59(1976)
- Abbott, A. I. Ch. E. Journal, 19, 596(1973)
- F.H. Ree, W.G. Hoover, J. chem. phys., 46, 4181(1967)
- 8) 1967) 大江, 分離技術, 12, 17(1982) を参照した。
- 9) Viswanath, Su, A.I. Ch. E. Journal, 11, 202(1965)
- 10) D.W.Marguardt, "An Algorithm for Least Squares Estimation of Non-Linear Parameters" J. Soc. Indust. Appl. Math., 11, 431 (1963)
- 新田友茂, 分離技術, 13, 170(1983)にBASIC プログラムがありこれをFORTRANに書きなおして使用した。
- 11) D.Peng, D.B. Robinson, Ind. Eng. Chem., Fundam., 15, 57 (1976)
- 12) 笹村, 宇野, 本校紀要, 第17号, 35(1982)から類推した。

(昭和58年11月30日受理)