高等専門学校における数学と他教科との関連 V

—— 土木工学科について ——

小野寺　　隆*・菅 原 道 弘**

The Relation between Mathematics and other Curriculums in the Technical College, V.

—— with Civil Engineering Curriculums ——

Takashi ONODERA and Michihiro SUGAWARA

要　旨

前稿[ ]*** に引続き，高等専門学校における数学と他教科との関連を考察し，今回は土木工学科科目から数学教材に適切であると思われるものを捜しだすことを行ってみる。

Abstract

As a continuation of the last paper, we have paid attention to the relations between mathematics and other curriculums in the Technical College, and have looked up some examples for mathematics in civil engineering curriculums.

§1．土木工学科の授業科目

高等専門学校（以下「高専」と略記する。）の全国土木工学科(土木建築工学科を含む。以下同じ。)の授業科目のうち，実験を除いて全学年に配当されているものの状況を調べたのが表1である。

資料としては全国高専の昭和59年度学校要覧（土木工学科設置校28校中資料入手26校）を用いた。科目名とその配列は昭和51年改正された高等専門学校設置基準[1]による。表中A項は[1]に示された「基本的な授業科目」で，B項はそれ以外の科目である。

表1の示すように土木工学科は第1学年において既に数科目の専門科目が配当されている。殊に土木計画設計の基礎科目ともいうべき測量では数式計算を有力な武器としていることに留意せねばならない。

表1　土木工学科授業科目(第1～5学年)

	学年 ＼ 科目	当該科目を下記学年に配当している学校数 1	2	3	4	5	備考
A	応用物理		1	25	10		
	情報処理	3	8	17	15	3	概論を含む
	土木材料	10	19	3			
	構造力学		15	25	25	17	応用力学を含む
	水理学			26	26	4	
	測量学	23	26	23	15	3	
	土質工学			23	23	2	
	土木施工			1	22	7	
	鉄筋コンクリート工学			21	25	4	
	土木工学設計製図	24	22	21	25	25	
B	土木地学	6	7	3	4	5	土木地質を含む
	橋工学				20	20	橋梁工学を含む
	機械工学概論				8	11	
	電気工学概論				3	14	
	河川工学				11	16	水資源工学を含む
	道路工学				11	11	
	港湾工学					17	
	土木計画				3	23	都市計画を含む
	交通工学				6	10	

数字は延数を示す(科目により2ヶ学年以上にわたっているものあり)

*　教　授　一般教科数学

**　助教授　一般教科数学

***　[ ] の中の番号は論文末の文献参照番号を示す。

さらに第2・3学年の低学年において，他学科共通の製図と情報処理をさておくも測量学に加えて構造力学，水理学そして土質工学という土木工学の基礎科目が入ってくる。しかもこの何れの科目も相当高度な数式理解なくしては修得できないのである。

その上前稿［8］でも指摘して置いたように情報処理が基本的な授業科目の一つとなり，しかも低学年に移行の傾向にあるばかりでなく，情報処理能力を他科目に盛んに活用されつゝあるということにも意を留めねばならない。

さらに第4・5学年のB項目の何れの科目も配当時間は少ないながら内容は大学相当のものであり極めて高い数学内容が散見される。

§2．数学と土木工学科目との間

われわれはさきに高専の専門科目で採用されている教科書を全国的に調べた([4])。現在本校の土木工学科で使用中のものとを比較してみても大きな異同はなく，採用教科書の大半が高専・大学用に編集されたものであり高等学校工業科用の検定教科書は本校では製図と機械工学概論にすぎない。したがって数式扱いに未熟な低学年の担当者は学生の学力と教科書との間隙を埋めるために非常に苦心していると聞く。しかも§1で指摘したように低学年から相当な数式理解が要求される土木工学科では他学科に勝るとも劣らぬ数学との密なる連携が必要とみる。

このことについては，昭和52年度高専教員研究集会土木工学部会でも「土木専門科目と一般科目」のテーマで主として数学に対する切実なる要求が出されている([2])。われわれがすでに前稿[4]，［5］で警告しておいた数学の独善的高踏性について，こゝでも盛んに取り上げられていて，数学の進度や工学への応用についての希望を数学担当者に申し入れても仲々噛み合わないとの実態報告が数校からなされている。そして「数学の授業中に土木工学では，これはこんな方面に使うようだがと一寸挿んでもらうだけでもよいのだが」との控え目な助言者の発言があるが，われわれとしてはこの言葉を素直に受け止めねばならないのではなかろうか。

土木工学科授業科目（実験，卒研を除く。）について本校使用教科書とその関連専門書とを調べて数学内容を項別に分類したのが**表2**である。項目名は岩波数学辞典［9］の部門別項目表に，科目名とその配列は新旧の高専設置基準［1］に従った。

表2の作成を通じてつぎのことが解る。

(1)　解析学（微分・積分学）が中心であり，使用頻度が極めて高い。Fourier 級数は構造力学や土質工学に用いられているが，Laplace 変換は殆んど見当らない。

(2)　関数方程式（常微分・偏微分方程式）は内容的な難しさはないが頻繁に用いられている。

(3)　関数論は正則関数の本質に係わるものとしてではなく，その応用としての等角写像が水理学や土質工学で扱われる程度である。

(4)　確率統計は土木工学全般にわたって活用されていて，今後も一層必要とされる重要項目であると見受ける。

(5)　代数・幾何における各種曲線は他学科では余り活用されないが，土木工学科では欠かせない項目である。

(6)　全科目にわたって3角，指数・対数は勿論のこと微分・積分の数式計算力が強く要求されている。

§3．数学の授業内容の一考察

前節に述べたように土木工学科の授業科目の組成と内容とを考察してくるとき，現行の本校数学の授業項目を土木工学科向きに再考する必要に迫られる。

そもそも高専設置基準［1］においては一般科目の数学と専門科目の応用数学とは別扱いになってはいるが，「数学と応用数学とは元来区別すべきものでなく，一貫性を持つものと考慮し，それらを内容によって区分せず，形式的に1～3年で履習するものを数学，4・5年で履習するものを応用数学と考える([3]。)との教育方法改善調査会数学部会の見解をわれわれも取り入れたい。

また数学の指導内容を，学科毎に変えることは，その性格上通常困難とされているが，福井高専では早くから積極的に対処しているとの報告があり([2])，幸い本校でも数学科は各学科毎縦割に授業分担していて，多少の授業内容変更なら実施可能の状況にあり，われわれは学科の要求を謙虚に受入れる方向で努力したいと思う。

以上の二つの観点に基づいた土木工学科数学の授業項目を**表3**に示す。項目の呼称は［3］の教育課程編成のための基礎資料に準ずる。

表3の授業項目の各項目にわたっての指導上の

表2　土木工学科科目数学内容一覧

	科目	応用物理	情報処理	土木材料	構造力学	水理学	測量学	土質工学	土木施工	鉄筋コンクリート工学	土木工学設計製図	土木地学	橋工学	河川工学	道路工学	港湾工学	土木計画	交通工学
A 集合・論理	記号論理		○															
	集合																○	
	実数	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	複素数	○	○		○													
	Boole 代数		○														○	
B 代数・幾何	代数方程式	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	行列式	○			○													
	行列	○	○		○												○	
	ベクトル	○			○	○		○										
	Euclid 幾何学				○		○	○		○	○	○						
	円錐曲線	○			○	○	○				○				○			
	2次曲面	○					○											
	座標（極・円柱等）	○			○	○	○	○			○							
C 解析学	指数・対数・双曲線関数	○	○	○	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	○
	3角・逆3角関数	○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	微分法	○	○		○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	○
	偏導関数	○			○	○	○	○				○						
	積分法	○	○		○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	○
	重積分	○			○								○					
	線・面積分	○			○	○												
	Fourier 級数・変換				○			○										
	Laplace 変換																	
D	正則関数																	
	等角写像	○				○		○										
E	常微分方程式	○	○		○	○	○	○						○	○		○	○
	偏微分方程式	○				○		○				○						
	楕円・双曲・放物型偏微分方程式	○						○										
F	Γ・Bessel 関数，多項式近似値		○				○										○	
G	確率分布・過程		○	○	○		○					○					○	○
	Markov 連鎖・過程																○	
	統計量・多変量解析等		○														○	

（注）表中部門別記号のDは「関数論」、Eは「関数方程式」、Fは「特殊関数・数値解析」、Gは「確率統計」である。

留意点は既に［4］に詳細に列挙して置いたので，こゝでは土木工学科に係わる点のみ述べる。

(イ)　A系列では

1(4)　は他学科以上に入念に扱う。半対数および全対数方眼紙や関数目盛なども手を抜くことのないように心掛ける。底 e にはふれない。

1(6)　は工業化学科では外した項目であるが，［7］に述べたように「微積分の早期導入」に従い復活する。たゞしその内容は高等学校の基礎解析程度とし整関数に留める。積分は微分の逆算法として扱うだけである。

2(2)　では極座標や媒介変数表示の曲線を丁寧に指導することにする。

3(1)　のイ)，ロ)項目とも1変数の場合と同じ程度にまで抵抗なく計算できるようにさせたい。土木工学科にはこの項目の応用例が非常に多い。

4(1)　の中に，数学の授業内容として偏微分方程式は含まれていないが，熱伝導方程式の一般解程度は指導しなければならない。

表3　数学授業項目（応用数学を含む）

学年	A系列 項目	単位数	B系列 項目	単位数
1	(1) 数と式		(1) 3角関数（その1）	
	(2) 方程式と不等式		(2) ベクトル	
	(3) 関数とグラフ		(3) 平面の図形	
	(4) 指数関数と対数関数		(4) 3角関数（その2）	
	(5) 数列と級数			
	(6) 微分と積分	4		2
2	(1) 微分法		(1) 順列・組合せ	
	(2) 微分法の応用		(2) 空間の図形	
	(3) 積分法		(3) 行列と行列式	
	(4) 積分法の応用	4		2
3	(1) 2変数の関数の微分積分		(1) 確率・統計	
	イ）偏微分			
	ロ）重積分			
	(2) 微分方程式（その1）	4		2
4	(1) 微分方程式（その2）		(1) ベクトル解析	
	(2) 複素変数の関数		(2) フーリエ級数	
		2	(3) 数値計算	2
計		14		8

(ロ)　B系列では

$1_{(1)}$　は3角比および一般角・弧度法まで扱う。当項目は中学校で欠いているのに，測量は勿論のこと他科目でも入学当初から盛んに使用される。単独に指導できる内容であるので最初に置いても差支えない。

$1_{(4)}$　は $1_{(1)}$ に直ちに続けるには無理があり，A系列の $1_{(4)}$ が学習済頃の学年後半に置く。なお逆3角関数はA系列の $2_{(1)}$ で扱った方がよい。

集合・論理の項目は特に設けず，各所で必要あればふれる程度とする。

$2_{(3)}$　は土木工学科では他学科程見当らないが，微分・積分学万能の弊に落入ることを警戒する意味からもきちんと学習させたい。

$3_{(1)}$　は§2でも触れたが前述の教員研究集会（[2]）において「土木工学は確率論に支えられている。」との発言に代表されている通り，測量や土木計画を初め他科目にも使用頻度の高い項目である。したがって［3］の教育課程編成の参考例通り土木工学科では2単位は是非確保しなければならないのでないか。

$4_{(2)}$　のフーリェ積分の応用として境界条件のもとでの偏微分方程式の解法に言及する。なおラプラス変換は外したが，その分を他3項目補強に用いた方がよい。

つぎに前稿からの継続として，土木工学科科目の中から数学教材に適当なものを捜し出してみる。

§4．例　　題

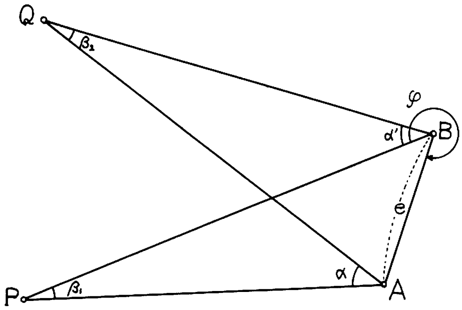
例題取扱上の留意点は前稿［5］および［7］に述べた通りである。たゞ専門科目に共通することではあるが，殊に土木工学科目の数式には使用文字が多く，しかも添字付の極めて煩雑なものである。したがって以下の例題では可能な限り数学常用の文字を使い単位は無名数に図も簡略化したが，本質的な過誤の無いことを願う気持が強い。なお専門用語は学術用語辞典[10]（文部省：学術用語集土木工学編は絶版中）に従った。

例題　V－1.　3角点Aから他の3角点PおよびQに対する水平角を観測しようとしたが，見通し線上に障害があるのでBに偏心して観測した。2点P，QがA点で挟む角 α がB点では α' と読みとられたとすると誤差 $\triangle\alpha$ は $\triangle\alpha=\alpha'-\alpha$ である。

図－1において $\angle APB=\beta_1$，$\angle AQB=\beta_2$ とおくと　$\alpha+\beta_1=\alpha'+\beta_2$　より

(1)　　$\triangle\alpha=\beta_1-\beta_2$

となる。いまBにおいてPからAまで右回りに測った水平角（偏心角）を φ，偏心距離 $AB=e$ と



図－1

する。

△APB　において正弦法則から

$$\frac{\sin\beta_1}{e}=\frac{\sin(2\pi-\varphi)}{\mathrm{AP}}$$

であるから

$$\beta_1=\sin^{-1}\left\{e\frac{\sin(2\pi-\varphi)}{\mathrm{AP}}\right\}.$$

同様に △AQB において

$$\frac{\sin\beta_2}{e}=\frac{\sin\{2\pi-(\varphi-\alpha')\}}{\mathrm{AQ}}=\frac{-\sin(\varphi-\alpha')}{\mathrm{AQ}}$$

であるが　$0<\beta_2<\frac{\pi}{2}$　とみてよいので

$$\beta_2=-\sin^{-1}\left\{e\frac{\sin(\varphi-\alpha')}{\mathrm{AQ}}\right\}$$

となり，(1)より

(2)　$$\triangle\alpha=\sin^{-1}\left\{e\frac{\sin(2\pi-\varphi)}{\mathrm{AP}}\right\}+\sin^{-1}\left\{e\frac{\sin(\varphi-\alpha')}{\mathrm{AQ}}\right\}$$

を得る。ここで e は AP，AQ に比べて極めて小さくとったとする。一般に $\sin^{-1}x$ の巾級数展開式

$$\sin^{-1}x=x+\frac{1}{2\cdot3}x^3+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2k(2k+1)}\times x^{2k+1}+\cdots$$

において x が微小のとき　$\sin^{-1}x\fallingdotseq x$　とみて(2)式は結局

$$\triangle\alpha=e\left\{\frac{\sin(2\pi-\varphi)}{\mathrm{AP}}+\frac{\sin(\varphi-\alpha')}{\mathrm{AQ}}\right\}$$

となる。

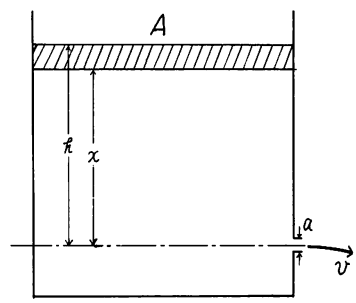
さらに　△APB，△AQB　に第2余弦法則を用いて

$$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2+e^2-2\,\mathrm{BP}\cdot e\cos(2\pi-\varphi),$$
$$\mathrm{AQ}^2=\mathrm{BQ}^2+e^2-2\,\mathrm{BQ}\cdot e\ \cos(2\pi-\varphi+\alpha')$$

より AP，AQ は可測量を用いて求めることができる（[17]，[18]，[19]）。

この例題は第2学年の逆3角関数の教材として用いる。土木工学科においては前節にも述べたように3角，指数，対数を縦横に駆使する計算力が特に必要である。数学では逆3角関数は微積分の計算過程において大いに利用されているが，角測量という具体的な内容のある当例題を示すことにより，逆3角関数の持つ効力を強く印象づけ得ることになろう。なお中途計算に用いた関数展開による近似式は，後日の学習予告として将来への関心を持たせるように扱うものとする。

例題　V－2．　図－2の水槽において，水深 h であるものが，排水によって x になったときの時間を t とする。



図－2

水槽の横断面積が A ならば，排水量 Q は

(1)　　$$Q=A(h-x)$$

である。このとき下方の，断面積 a の小孔口からの流水速度 v は理論的にはトリチェリーの定理より　$v=\sqrt{2gx}$　ではあるが，実際には流量係数 c を用いて瞬間流出量を

(2)　　$$\frac{dQ}{dt}=cav=ca\sqrt{2gx}$$

で与えている。x を t の関数とみて(1)を t で微分すると

(3)　　$$\frac{dQ}{dt}=\frac{dQ}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=-A\frac{dx}{dt}$$

となり(2)と(3)により

$$\frac{dt}{dx}=\frac{-A}{ca\sqrt{2gx}}$$

を得るので x で積分すると

$$t=\int\frac{-A}{ca\sqrt{2gx}}dx+k=\frac{-2A}{ca\sqrt{2g}}\sqrt{x}+k$$

であるが，$x=h$ のとき　$t=0$　より積分定数 k は

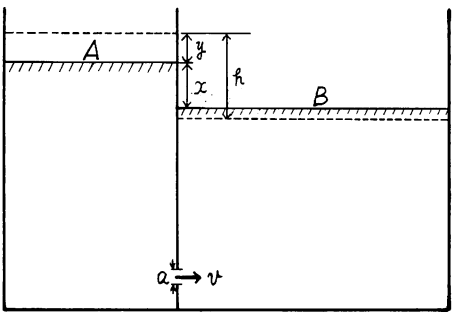
$$k=\frac{2A}{ca\sqrt{2g}}\sqrt{h}$$

となり，したがって

(4)　　$$t=\frac{2A}{ca\sqrt{2g}}(\sqrt{h}-\sqrt{x})$$

を得る。

つぎに 図－3のように横断面積が A，B である2つの水槽が前問同様の小孔で連結している場合を考える。



図－3

初めの水面差を h，時間 t たった後を x，A 面の降下を y とする。孔口からの流水速度は　$v=\sqrt{2gx}$　であり，このときも瞬間流水量は(2)で与えられる。A 面の下降水量と B 面の上昇水量とは等しいので

$$Ay=B(h-x-y)$$

より

(5)　　$$x=h-\frac{A+B}{B}y$$

を得るので，(2)と(5)とより

(6)　　$$\frac{dQ}{dt}=ca\sqrt{2g\left(h-\frac{A+B}{B}y\right)}$$

となる。ところが　$Q=Ay$　で y は t の関数であるから

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{dQ}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=A\frac{dy}{dt}$$

であり，この式と(6)とより

$$\frac{dt}{dy}=\frac{A}{ca\sqrt{2g\left(h-\frac{A+B}{B}y\right)}}$$

を得る。y で積分すると

$$t=\int\frac{A}{ca\sqrt{2g\left(h-\frac{A+B}{B}y\right)}}dy+k$$

$$=-\frac{2AB}{ca\sqrt{2g}(A+B)}\sqrt{h-\frac{A+B}{B}y}+k$$

となるが，$y=0$　のとき　$t=0$　であるから

$$k=\frac{2AB}{ca\sqrt{2g}(A+B)}\sqrt{h}$$

が定まり，(5)を用いると水面が h から x になるまでの時間は(4)と同じように

$$t=\frac{2AB}{ca\sqrt{2g}(A+B)}(\sqrt{h}-\sqrt{x})$$

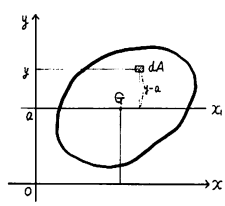
となる。([16]，[20]，[29])。

この例題は第2学年の不定積分の応用教材として用いる。例題V－1で指摘した3角，指数，対数関数の習熟の上に，さらに変化量の間に存在する微分とその逆演算としての積分が，一般の4則計算同様に何の抵抗なく活用出来るまで修得させることが肝要である。殊に当例題のように数式に使用の文字が多数である場合に，定数と変数の別をしっかり把握することを力説し，外見上非常に複雑に見えるものも実はきちんと整頓すると，見た目より遙かに容易な数式であることを解らせたい。

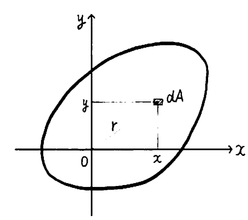
例題　V－3．　断面積が A である図形の x 軸および y 軸に関する断面2次モーメント I_x，I_y はそれぞれ

(1)　　$$I_x=\int_A y^2dA,\qquad I_y=\int_A x^2dA$$

で与えられる。



図－4



図－5

図－4に示すような図形の重心Gを通り x 軸に平行な軸 x_1 に関する断面2次モーメントを I_{x_1} とする。

$$I_x=\int_A\{a+(y-a)\}^2dA$$

$$=\int_A a^2dA+2a\int_A(y-a)dA+\int_A(y-a)^2dA$$

であるが，重心の性質より右辺の第2項は0であるので

(2)　　$$I_{x_1}=I_x-a^2A$$

を得る。

つぎに図－5のような図形において，原点を通

り x, y の両軸に垂直な軸に関する断面２次モーメントは

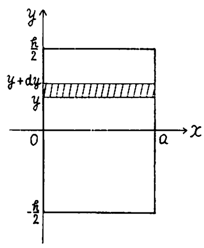
$$I_p=\int_A r^2 dA$$

で与えられる。したがって

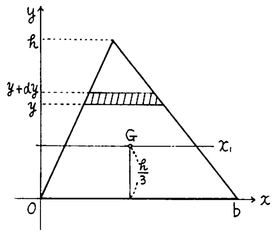
$$(3)\qquad I_p=\int_A (x^2+y^2)dA=I_x+I_y$$

となる。

つぎに基本的な図形の断面２次モーメントを求めてみよう。



図－６



図－７

1．　中心軸を x 軸として底辺 a 高さ h の長方形。図－６より

$$I_x=\int_A y^2 dA=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 a dy=\frac{ah^3}{12}$$

となる。または重積分を用いて

$$I_x=\int_0^a dx\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy=\frac{ah^3}{12}$$

としてもよい。

2．x 軸を底辺として，その長さを b 高さ h の３角形。

図－７より

$$I_x=\int_A y^2 dA=\int_0^h y^2\frac{b(h-y)}{h}dy=\frac{bh^3}{12}$$

となる。

G を通り底辺に平行な軸 x_1 に関するものは(2)式で　$a=h/3$, $A=bh/2$　と置いて

$$I_{x_1}=I_x-a^2 A$$
$$=\frac{bh^3}{12}-\left(\frac{h}{3}\right)^2\frac{bh}{2}=\frac{bh^3}{36}$$

を得る。

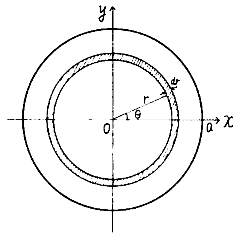
3．　原点を中心とする半径 a の円。

図－８より

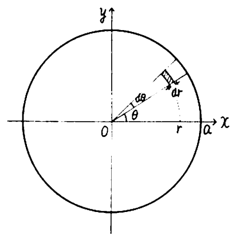
$$I_p=\int_A r^2 dA=\int_0^a r^2\cdot 2\pi r\,dr=\frac{\pi a^4}{2}$$

となり(3)式を用いると

$$I_x=I_y=\frac{1}{2}I_p=\frac{\pi a^4}{4}.$$



図－８



図－９

直接 I_x を求めるのには図－９を用いて

$y=r\sin\theta$, $dA=rd\theta dr$

より

$$I_x=\int_0^a\int_0^{2\pi} r^3\sin^2\theta\,d\theta\,dr=\int_0^a r^3 dr\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta$$
$$=\int_0^a \pi r^3 dr=\frac{\pi a^4}{4}$$

を得る。

4．　サイクロイド　$x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$　$(a>0,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$　と x 軸とに囲まれた図形。

$$I_x=\int_A y^2 dA$$
$$=2\int_0^{\pi a}dx\int_0^{a(1-\cos\theta)} y^2 dy=\frac{2}{3}a^3\int_0^{\pi a}(1-\cos\theta)^3 dx$$

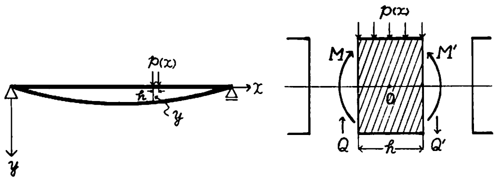
となるが，　$dx=a(1-\cos\theta)d\theta$, $0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから

$$I_x=\frac{2}{3}a^4\int_0^{\pi}(1-\cos\theta)^4 d\theta=\frac{32}{3}a^4\int_0^{\pi}\sin^8\frac{\theta}{2}d\theta$$
$$=\frac{64}{3}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 t\,dt=\frac{64}{3}a^4\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$=\frac{35}{12}\pi a^4$$

を得る（[21]，[22]，[23]，[24]）。

この例題は第３学年の重積分の応用教材として用いる。２次モーメントは１次モーメントと共に構造力学の基礎教材であるばかりでなく，橋，ダム，ビルディング等の実務上欠くことのできない主要項目である。前稿［６］において機械工学科の例題としても類似のものを掲げておいたが当題は土木工学科向きに書き直した。２次モーメントの値は一覧表として直ちに利用できるようになってはいるが，単なる右から左へのハンドブック式知識を与えるのでなく，新しく公式を生み出す楽しさと積分計算への自信を会得させるために用いるものとする。なおこの例題は単一積分と重積分の両者に係わるものとして，重積分に対する違和感を取除くためにも効果的であろう。

例題　V－4．　A点が回転支点（ヒンジ），B点が移動支点（ローラー）である単純ばりに垂直分布加重 $p(x)$ が作用しているものとする。



図－10

図－10 のようにスパンの方向に x 軸，下向きに y 軸をとり，x と $x+h$ で切りとられる微小部分について考える。

x および $x+h$ における曲げモーメントをそれぞれ M，M'，せん断力を Q，Q'とすると，それらの応力は図－10 の右図のように働く。微小区間 h では等分布荷重とみれるので，鉛直力のつり合いから

$$Q-ph-Q'=0$$

であり

$$-p=\frac{Q'-Q}{h}=\frac{Q(x+h)-Q(x)}{h}$$

となる。こゝで　$h\to 0$ とすると

$$(1)\qquad -p=\frac{dQ}{dx}$$

となるが，一方中心Oの回りの断面モーメントのつり合いから

$$M'-M-(Q+Q')\frac{h}{2}=0$$

であり，したがって

$$\frac{M(x+h)-M(x)}{h}=\frac{Q(x)+Q(x+h)}{2}$$

となる。こゝで　$h\to 0$ とすると

$$(2)\qquad \frac{dM}{dx}=Q$$

であるから(1)，(2)より

$$(3)\qquad \frac{dQ}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dM}{dx}\right)=\frac{d^2M}{dx^2}=-p$$

を得る。(3)を x で積分して(2)を用いると

$$(4)\qquad \frac{dM}{dx}=-px+c_1=Q$$

であり，再び x で積分すると

$$M=-\frac{1}{2}px^2+c_1x+c_2$$

となる。積分定数 c_1，c_2を定めるのに $x=0$ および $x=l$ の両端で $M=0$ であることを用いると $c_1=pl/2$，$c_2=0$ となり

$$(5)\qquad M=\frac{p}{2}(lx-x^2),\qquad Q=p\left(\frac{l}{2}-x\right)$$

を得る。

こゝで弾性曲線の微分方程式

$$(6)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M}{EI}\qquad\left(\begin{array}{l}E:\text{弾性係数}\\ I:\text{断面2次モーメント}\end{array}\right)$$

に(5)を用いると

$$EI\frac{dy}{dx}=-\frac{p}{2}\left(\frac{l}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right)+c_1$$

となり，再び x で積分すると

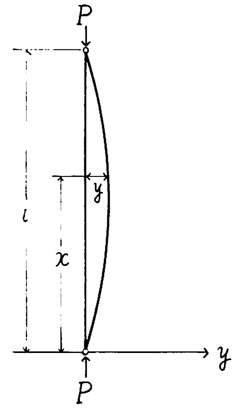
$$EIy=-\frac{p}{2}\left(\frac{l}{6}x^3-\frac{x^4}{12}\right)+c_1x+c_2$$

となる。こゝで $x=0$ および $x=l$ のとき $y=0$ であることを用いると $c_1=pl^3/24$，$c_2=0$ が求まり，したがって

$$y=\frac{p}{24EI}(x^4-2lx^3+l^3x)$$

の関係式を得る。

つぎに長柱の場合を考える。両端が回転支点のとき図－11 のように材軸方向に x，これと直角に y 軸をとる。



図－11

いま荷重 P によって僅かにたわみが生じたものとする。この場合にも(6)式が成り立ち，$M=Py$ であるから，直ちに

$$(7)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0\qquad\left(k=\frac{P}{EI}\right)$$

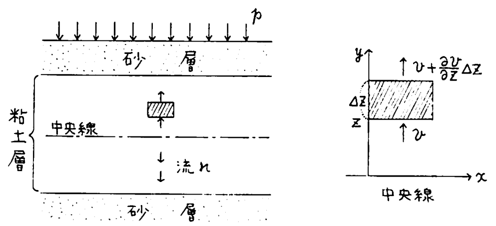
の微分方程式を得る。(7)の一般解は

$$y=c_1\cos kx+c_2\sin kx$$

である。積分定数 c_1，c_2 についての工学上の解釈には触れない（[13]，[21]，[23]，[24]）。

この例題は第３学年後期の微分方程式教材として用いる。この時期になると微分や積分そして簡単な微分方程式が専門各科目でも頻りに使用され，特に違和感なく立向えるまでの学力が育っているのが普通である。たゞ数学では飽くまでも変数関係等きっちり捕えて数式処理するのは当然である。当例題は前題Ｖ－３に引き続く構造力学の主要項目でありその専門科目の講義と重複することを承知しながらも，数学と専門科目との連携を得る好例として捨て難い。

例題　Ｖ－５．　土の自重や上載構造物の荷重などにより，土が除々に間隙水を排出しながら圧縮される現象を圧密という。



図－12

いま図－12で示すように間隙が水で飽和している粘土層の中央線から z の位置にある断面積 A で厚さ Δz の微小部分を考える。分布荷重 p が加わると間隙内の水に水圧 $u(z,\ t)$ が発生して間隙水が上下に押し出されるので，間隙水圧は減少しその分だけ土粒子部分に圧力が移って行く。これを土粒子間の有効圧力といい $p_e(z, t)$ で表わすと，つねに

(1)　$p=u+p_e$

の関係がある。p を一定として(1)を t で微分すると

(2)　$$-\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial p_e}{\partial t}$$

である。断面の下部から流入してくる透水速度を $v(z,\ t)$ とすると，上部から流出していく透水速度は $v+(\partial v/\partial z)\Delta z$ であり，Δt 間に流れる水量を ΔQ とすると

(3)　$$\triangle Q=\left(v+\frac{\partial v}{\partial z}\triangle z\right)A\triangle t-vA\triangle t$$
$$=\frac{\partial v}{\partial z}\triangle zA\triangle t$$

となる。一方，Δt 内に体積 ΔQ だけ減少するので，体積の沿直ひずみを $\varepsilon(z,\ t)$ とすると

(4)　$$\triangle Q=A\triangle z\triangle\varepsilon=A\triangle z\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\triangle t$$

であるから，(3)と(4)とより

(5)　$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial z}$$

を得る。

つぎに動水勾配 i は，間隙水圧を $u(z,\ t)$，水の単位当り体積重量を γ とするとき

$$i=-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial u}{\partial z}$$

で与えられるので，ダルシーの法則　$v=ki$（k は透水係数）を用いると

(6)　$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}ki$$
$$=\frac{\partial}{\partial z}k\left(-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{k}{\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

となる。さらに体積圧縮係数 m を定数として $\Delta\varepsilon=m\Delta p_e$ の関係に(2)を用いて

(7)　$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=m\frac{\partial p_e}{\partial t}=-m\frac{\partial u}{\partial t}$$

を得る。(6)，(7)を(5)に代入すると

$$-m\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{k}{\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

であり，したがって

(8)　$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\qquad\left(c=\frac{k}{\gamma m}\right)$$

となる。この(8)式が圧密の基礎方程式で熱伝導方程式等と同一形の微分方程式であり，その一般解の解法はすでに前稿［６］に掲げておいた。またこの方程式を境界条件のもとで解くのはフーリェ積分の応用として扱うことになる（[25]，[26]，[27]，[28]）。

この例題は第３学年の偏微分または第４学年の偏微分方程式の応用教材として用いる。何れの場合にも各変数間の関係に十分注意を払いながら微分方程式を作り上げる過程を主眼に指導するものとする。たゞ第３学年では微分方程式の解法は予告だけに留める。当例題は計算途中に専門用語が多く門外漢が立入ってはどうかとの懸念を抱きつゝも，高専数学教育担当者自らが専門科目の数学内容を理解するためにも，この程度の教材を取り扱う態度を持つべきではなかろうか。

§5．お　わ　り　に

さきにわれわれは高専における数学教育の指導理念を打ち立てた（[４]）。そしてそれに基づいた

効果的な数学教育を目指して授業内容の見直しを一般［5］，機械［6］，電気［7］，化学［8］と進めて来て最後の土木工学科に至った。

数学の教科書で各項目の応用例として挙げられているのは機械や電気関係のものが殆んとで，ことに土木に関するものはモーメント以外は皆無といってよい。したがって僅か数題の講義用例題の作成でも，その困難さには予想以上のものがあった。専門用語を順序立てて理解することなく，実験器材に触れることもなく単に専門書の表面的な判読から，数学的感覚で作り上げた無謀さを恐れている。この間にあって貴重な資料の提供と，たびたびの助言をいたゞいた本校土木工学科教官各位のご好意に深く感謝を捧げる。

文　献

［1］ 文部省：高等専門学校設置基準，文部省令第 32 号（昭和 52 年 4 月），第 23 号（昭和 36 年 8 月）。

［2］ ――― ：昭和 52 年度高等専門学校教員研究集会議事録（土木工学科部会），和歌山高専。

［3］ 高等専門学校教育研究会：一般部会数学分科会報告，高専教育創刊号（1978），19－42。

［4］ 菅原道弘，小野寺隆：工業高等専門学校における数学教育のあり方，苫小牧高専紀要，13 号（1978），131－140。

［5］ 小野寺隆：高等専門学校における数学と他教科との関連，苫小牧高専紀要，16 号（1981），155－166。

［6］ ――― ：高等専門学校における数学と他教科との関連 II，苫小牧高専紀要，17 号（1982），115－125。

［7］ ――― ：高等専門学校における数学と他教科との関連 III，苫小牧高専紀要，18 号（1983），133－143。

［8］ ――― ：高等専門学校における数学と他教科との関連 IV，苫小牧高専紀要，19 号（1984），131－140。

［9］ 日本数学会：岩波数学辞典第 2 版，岩波書店（1968），19－23。

［10］ 標準学術用語辞典編集委員会：標準学術用語辞典土木工学編，誠文堂新光社（1962）。

［11］ 杉山昌平：偏微分方程式例題演習，森北出版（1974）。

［12］ 丹生慶四郎，阿部寛治：工業数学 II，共立出版（1976）。

［13］ カルマン，ビオ著，村上勇次郎他訳：工学における数学的方法下巻，法政大学出版（1954）。

［14］ 大地羊三他：わかり易い土木講座 1 数学，彰国社（1969）。

［15］ 近藤泰夫，江崎一博：土木応用数学，コロナ社（1969）。

［16］ 金原寿郎：基礎物理学上巻，裳華房（1963）。

［17］ 春日屋伸昌：測量学演習(1)，学献社（1966）。

［18］ 笠松清，長谷川博：測量(2)，コロナ社（1971）。

［19］ 長谷川博他：測量(1)基礎，彰国社（1969）。

［20］ 小川元：水理学，共立出版（1968）。

［21］ 能町純雄：構造力学 I，朝倉書店（1975）。

［22］ 宮原良夫，高端宏直：構造力学(1)，コロナ社（1970）。

［23］ 川田雄一：材料力学，裳華房（1965）。

［24］ 久保慶三郎：構造力学演習，学献社（1967）。

［25］ 今井五郎：わかりやすい土質力学，鹿島出版（1984）。

［26］ 赤井浩一：土質力学，朝倉書店（1966）。

［27］ 神谷貞吉，今野誠：土質工学，彰国社（1968）。

［28］ 河上房義：新編土質力学，森北出版（1969）。

［29］ 土木技術研究会：土木公式例題 500 題，近代図書（1981）。

（昭和 59 年 11 月 30 日受理）