

周波数応答法の降雨－流出系への適用

嵯 峨 浩*・藤 田 睦 博**

The application of Frequency Response Method to the rainfall-runoff process

Hiroshi SAGA and Mutsuhiro FUJITA

要 旨

実測資料を用いて周波数応答特性を調べると同一流域であっても洪水毎に乱れが生じる。本研究はこの乱れに着目し、非線形要素が降雨の分離則にあるとして、応答関数が時間の経過と共に変動することを確認し周波数領域において、2つのシステム関数を推定する方法を導いた。

Abstract

Under the investigation of a frequency response characteristics of rainfall-runoff data, it was found that the diffusion was produced with every flood in the drainage basin. In this paper, noticing this diffusion and on assumption which nonlinear-factor would be the separation of effective rainfall, we confirmed that the impulsive response function fluctuated with time and proposed an approximate method which estimated two transfer functions in the frequency region.

1. ま え が き

降雨流出系は、一般に非線形であるが線形要素の強い非線形であり、非線形要素としては流出の時間的遅れ・降雨の分離則にあるとされている。特に日野・長谷部¹⁾らは、図－1に示す流出過程において $r_i(t)$ 、 $q_i(t)$ の関係は線形であるが、有効雨量 $r_e(t)$ を $r_i(t)$ 、 $i=1, 2, \dots, p$ に分離する過程が非線形であることを指摘し、藤田ら²⁾はエント

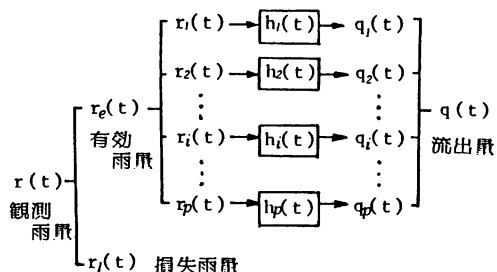
ロピー法によって単位図の変動特性を調べ、日野らの結論と符号する結果を得ている。

一方、自動制御系で用いられている周波数応答法は、従来線形系に用いられており、降雨資料と流量資料のみから解析する、非線形な input-output 問題への適用は理論的に矛盾すると考えられてきた。しかし、かなりの程度で明らかにされたこれらの非線形要素を考慮するならば、周波数応答法を降雨－流出系の解析に利用することが可能であると思われる。

本研究では、限定された非線形要素の存在する入出力系に周波数応答法を用いる手法を示し、天塩川上流域の名越橋地点における実測資料を用いた計算結果を示した。また、本手法によって得られた単位図の変動特性が、本手法と全く異なるエントロピー法によって得られた結論と符号する結果を示した。

2. 基 礎 理 論

降雨流出系は、ゼロ初期条件・線形性・不変性



図－1

* 土木工学科 助 手

** 北海道大学 教 授

等の一連の仮定を満足していると常に式(1)が成立する。

$$q(t) = \int_0^\infty r(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (1)$$

$h(t)$ はインパルス応答関数と呼ばれ、実在する物理系では式(2)の物理的実現性の条件の他に、式(3)の条件を必要とする。

$$h(t) = 0 \quad (t < 0) \quad (2)$$

$$\int_0^\infty h(t) dt < \infty \quad (3)$$

さらに $r(t)$, $q(t)$ に有効雨量、直接流出量を用いた時は式(4)となる。

$$\int_0^\infty h(t) dt = 1 \quad (4)$$

式(1)をゼロ初期条件のもとにフーリエ変換すると式(5)を得る。

$$Q(\omega) = R(\omega) H(\omega) \quad (5)$$

$$Q(\omega) = \int_0^\infty q(t) \cdot \exp(-j\omega t) dt \quad (6)$$

$$R(\omega) = \int_0^\infty r(t) \cdot \exp(-j\omega t) dt \quad (7)$$

j : 虚数単位

$H(\omega)$: システム関数

$H(\omega)$ は、インパルス応答関数のフーリエ変換関数であり、系の固有の性質を表すシステム関数である。 $Q(\omega)$, $R(\omega)$ はそれぞれ $q(t)$, $r(t)$ のフーリエ変換関数で、 ω は円周波数である。一般に任意関数のフーリエ変換は必ずしも収束するとは限らないが、ここで扱っている降雨流出系では、 $r(t)$, $q(t)$ は共に正值制限時間信号であるので、常にフーリエ変換は収束する。

図-1における流出過程において、有効雨量 r_e の i 番目の降雨成分 r_i とそれに対応する流出成分 q_i が線形関係にあると仮定すると、式(8)が成立する。

$$\begin{aligned} q(t) &= \int_0^\infty \sum_i r_i(\tau) \cdot h_i(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^\infty r_e(\tau) \sum_i g_i(\tau) h_i(t-\tau) d\tau \quad (8) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} g_i(\tau) &= r_i(\tau) / r_e(\tau) \\ \sum_i g_i(\tau) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここに、有効雨量 r_e と降雨成分 r_i との間に、式(9)の関係が成り立つものとする。式(8)は $r_e(t)$ を入力、 $q(t)$ を出力とする入出力関係を示しており、式(1)と比較するとインパルス応答関数 $h(t-\tau)$ は、式(8)において $(t-\tau)$ の関数のみならず、

τ の関数にもなっている。このことは、降雨流出系が図-1の流出過程に従うと単位図が時間の経過とともに、変動することを示している。

いま、有効雨量 $r_e(t)$ が2つの降雨成分 $r_1(t)$, $r_2(t)$ から構成されているとすると、 $r(t) = r_1(t) + r_2(t)$, $q(t) = q_1(t) + q_2(t)$ より式(10), (11)が得られ、式(5)より式(12)が求まる。

$$Q(\omega) = Q_1(\omega) + Q_2(\omega) \quad (10)$$

$$R(\omega) = R_1(\omega) + R_2(\omega) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{R_1(\omega)}{R(\omega)} H_1(\omega) + \frac{R_2(\omega)}{R(\omega)} H_2(\omega) \\ &= H_2(\omega) + \frac{R_1(\omega)}{R(\omega)} \{H_1(\omega) - H_2(\omega)\} \quad (12) \end{aligned}$$

式(12)において未知数は、 $H_1(\omega)$, $H_2(\omega)$, $R_1(\omega)$ であり、一般にこの式を直接解くことはできないが、 $r_1(t)$ が卓越するならば、 $H(\omega)$ は $H_1(\omega)$ の近傍の値をとり、逆に $r_2(t)$ が卓越する場合には $H_2(\omega)$ に近ずき、 $H(\omega)$ は $H_1(\omega)$ と $H_2(\omega)$ の中間の値をとることが予想される。

実際、実測資料を用いてゲイン・位相を計算すると同一流域であっても洪水毎に乱れが生じ、これは、ノイズや非線形成分によるものと考えられている。従って、同一流域における複数の出水例のナイキスト図、ゲイン線図、位相線図を求めるとこれらの情報から二流出成分 $H_1(\omega)$, $H_2(\omega)$ を推定できると思われる。システム関数 $H_1(\omega) \cdot H_2(\omega)$ を式(13)で逆変換するとインパルス応答関数が求まり、従って二流出成分の単位図を求めることができる。

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \text{Re}\{H(\omega)\} \cos \omega t d\omega \quad (13)$$

$H_1(\omega)$, $H_2(\omega)$ が求まると未知数は $R_1(\omega)$ だけとなり、式(14), (15)の逆変換公式によって $r_1(t)$ を求めることができ、降雨の逆推定も可能となる。

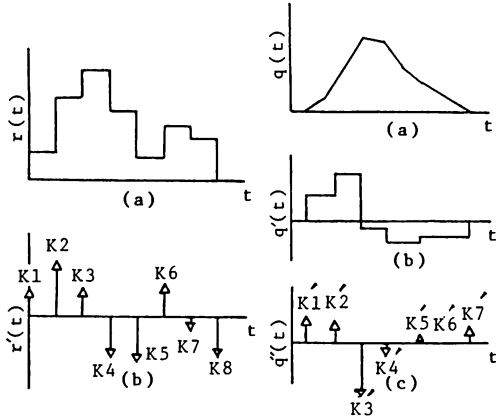
$$R_1(\omega) = \frac{Q(\omega) - R(\omega) H_2(\omega)}{H_1(\omega) - H_2(\omega)} \quad (14)$$

$$r_1(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \text{Re}\{R_1(\omega)\} \cos \omega t d\omega \quad (15)$$

3. フーリエ変換の数値計算

関数 $f(t)$ をフーリエ変換するための数値計算法としては、フーリエ級数展開法・多項式近似法等があるが、いずれの方法によっても得られた $H(\omega)$ は因果性(式(2))を満足していなければならない。

ここでは $r(t)$ 、 $q(t)$ の特性と $H(\omega)$ の因果性を考慮して次の様な方法を採用した。



図－2

降雨量 $r(t)$ は図－2 に示される様に Δt 毎の平均値の矩形パルスとして与えられるので $R(\omega)$ は、式(16)となる。

$$R(\omega) \approx \frac{1}{j\omega} \sum_i K_i \cdot \exp(-j\omega t) \quad (16)$$

一方、流出量 $q(t)$ も Δt 毎の平均値であるが $r(t)$ に比較して非常に滑らかなので接線近似法をとった。従って $Q(\omega)$ は式(17)となる。

$$Q(\omega) \approx -\frac{1}{\omega^2} \sum_i K'_i \exp(-j\omega t) \quad (17)$$

また、式(18)、(19)よりここで採用した数値計算法は、計算上の安定条件を満足している。

$$Q(\omega) \approx -\frac{1}{\omega^2} \frac{\sum K_i \exp(-j\omega t)}{\sum K'_i \exp(-j\omega t)} \quad (18)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(\omega) = 0 \quad (19)$$

4. シミュレーション法

2. で展開した基礎理論を実証するためにシミュレーションを行った。手順としては、降雨 r

(t) (図－3・a) 及び単位図 (図－3・b) を仮定し、 $r(t)$ は $r1(t) \cdot r2(t)$ の2つの降雨成分からなり、それぞれ $u1 \cdot u2$ の流出成分の組み合わせにより流出するものとし、得られた流量 $q(t)$ (図－3・c) と $r(t)$ からゲイン線図・位相線図を求めた。

いま、 $r1(t) \cdot r2(t)$ が式(20)で与えられ、式(21)の分配率に従っているものとし、

$$\left. \begin{aligned} r1(t) &= r(t) g_1(t) \\ r2(t) &= r(t) g_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} g_1(t) &= \exp(-\alpha t) \\ g_2(t) &= 1 - \exp(-\alpha t) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$r1(t)$ が単位図 $u1$ に、 $r2(t)$ が $u2$ に従って流出する場合を Case 1 とする。また、逆に $r2(t)$ が $u1$ に従い、 $r1(t)$ が $u2$ に従って流出する場合を Case 2 とし、流量を図中の実線と破線で示す。また、式(21)における α を 0.3～0.7 の範囲で変化させた。

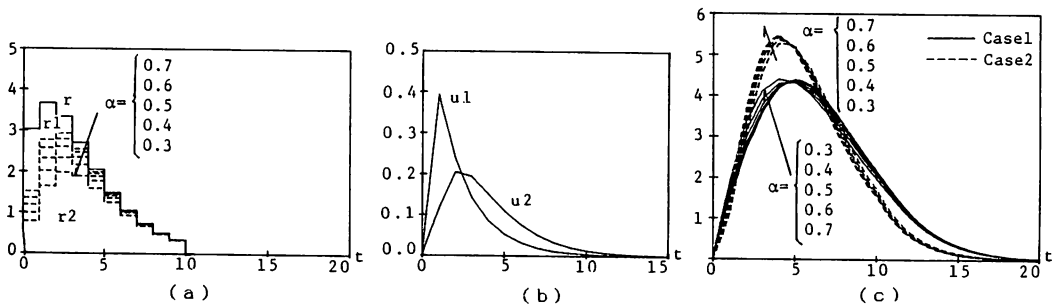
単位図 $u1$ は、式(22)で示される1段タンク特性の速い流出成分、 $u2$ は式(23)の2段タンク特性の遅い流出成分とした。

$$2 \frac{dq}{dt} + q = r(t) \quad (22)$$

$$3 \frac{d^2q}{dt^2} + 3.5 \frac{dq}{dt} + q = r(t) \quad (23)$$

Case 1、Case 2 の周波数応答特性を図－4～図－6 に示す。図－4 はゲイン線図であり横軸に周波数 ω 、縦軸にゲイン [dB] をとってある。Case 1 の場合、低周波領域で $H2(\omega)$ に、高周波領域で $H1(\omega)$ の近傍の値をとり、逆に Case 2 では低周波領域で $H1(\omega)$ 、高周波領域で $H2(\omega)$ の値をとっている。また、 α が 0.7～0.3 に変化すると、即ち $u1$ 成分の増加 ($u2$ 成分の減少) と共に、Case 1 では $H1(\omega)$ に近づき、Case 2 では $u2$ 成分の増加 ($u1$ 成分の減少) と共に $H2(\omega)$ に近づいている。

図－5 は位相線図を示しており、縦軸に位相 (ラ



図－3

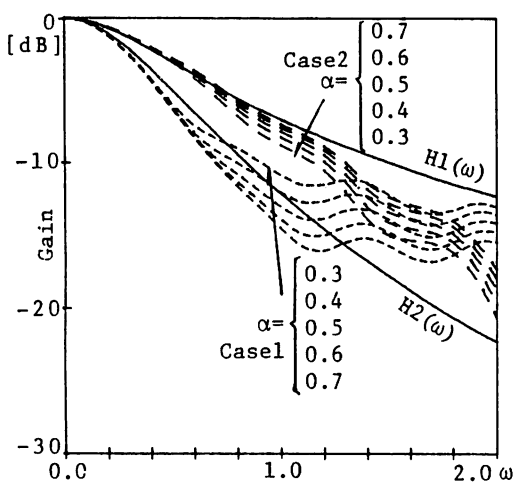


図-4

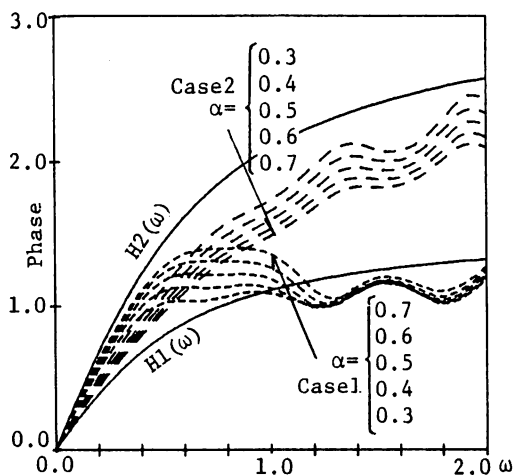


図-5

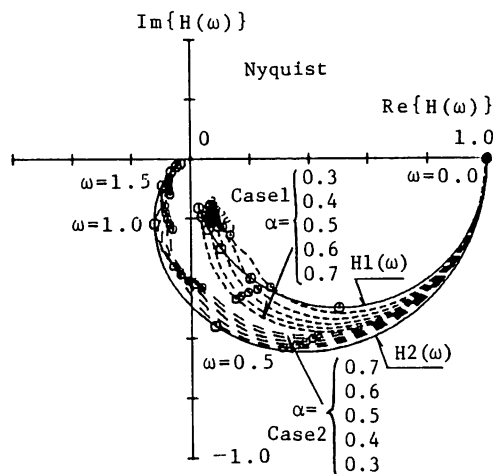
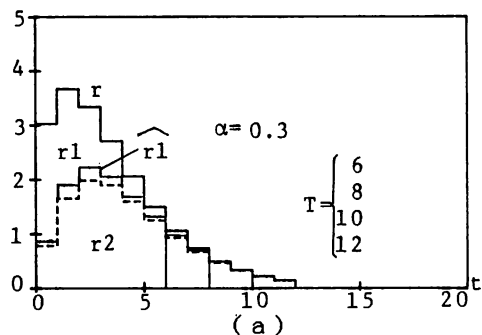


図-6

ジアン), 横軸に周波数をとっている。位相もゲインと同様に Case 1 では低周波領域で $H1(\omega)$ の近傍を通過し, Case 2 ではその傾向が逆になっている。また, α の変化による位相の変化も同様で Case 1, Case 2 とも $u1$ 成分の増加で $H1(\omega)$ に近づき, $u2$ 成分の増加で $H2(\omega)$ に近づいている。

図-6 はナイキスト図であり, ゲイン・位相を一挙に示すベクトル軌跡である。縦軸に $H(\omega)$ の虚数部, 横軸に実数部をとってある。ナイキスト図においても $H(\omega)$ の挙動は, ゲイン線図・位相線図と同じであるが, 高周波領域の $H(\omega)$ の挙動は, ゲイン線図・位相線図に比べて不明瞭となっている。しかし, 低周波領域では, $H1(\omega) \cdot H2(\omega)$ を推定しやすいようである。このことから, 低周波領域の $H1(\omega) \cdot H2(\omega)$ の推定にはナイキスト図を, 高周波領域での推定にはゲイン線図・位相線図からの情報を取り入れることで, 流出成分 $H1(\omega) \cdot H2(\omega)$ をより正確に推定できると予想される。

次に, 降雨継続時間 T の違いによる $H(\omega)$ の挙動を調べるために, $\alpha=0.3$ とし, $T=6, 8, 10, 12$ の場合の計算例を示す。仮定した降雨は



(a)

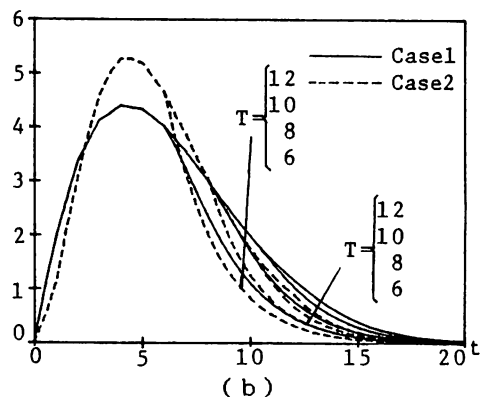


図-7

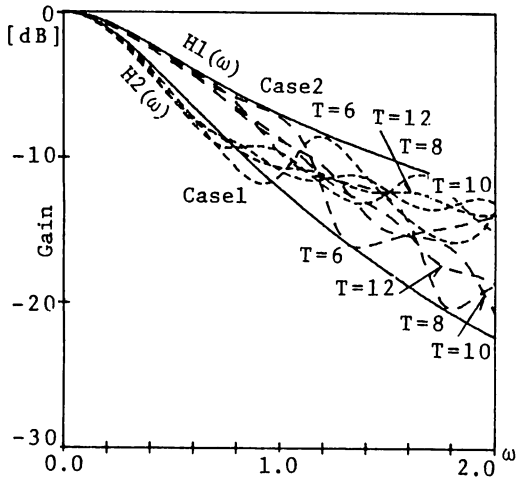


図-8

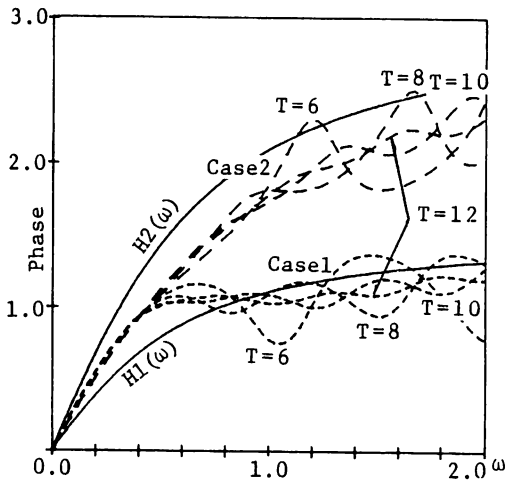


図-9

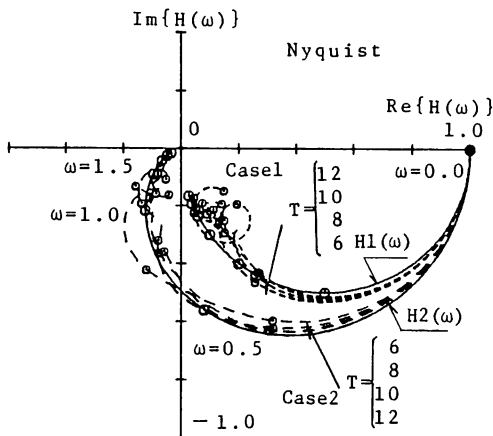


図-10

図-7・aであり、Case 1, Case 2 の流量を図-7・bにそれぞれ実線と破線で示す。

図-8のゲイン線図では、Case 1, Case 2とも継続時間 T が6の場合にゲインの振動幅が最も大きく、 T が大きくなるにつれて振動幅が小さくなっている。この傾向は、図-9の位相線図でも同様である。また、図-10のナイキスト図では、低周波領域でそれぞれベクトル軌跡は安定しているが、高周波領域では T が短くなると不安定になる傾向が見られる。このことから降雨継続時間が異なる場合でも、ナイキスト図は低周波領域での流出成分 $H1(\omega) \cdot H2(\omega)$ の推定に有力な情報を与えることがわかる。

また、式(14)から $R1(\omega)$ を計算し、式(15)によって逆変換した $r1(t)$ を図-7・aに $\hat{r}1$ として実線で示す。 $r1(t)$ の最大値に対して78%を再現し、逆に $\hat{r}1(t)$ が小さくなると、 $\hat{r}1$ の方が大きくなっている。これは式(15)の積分を有限和に置換えて数値積分を行った計算誤差や、数値積分に伴う cut-off 周波数を極高周波数まで採用しなかったために生じたものと思われる。

以上のことから、同一流域における複数の出水例の周波数応答特性から、その流出成分を分離することが可能である。

5. 実流域における計算例

ここでは天塩川上流域の名越橋地点(面積612.4 km²)における4出水例について計算した。

有効雨量は藤田がエントロピー法によって推定した値を用い、直接流出量はハイドログラフの立

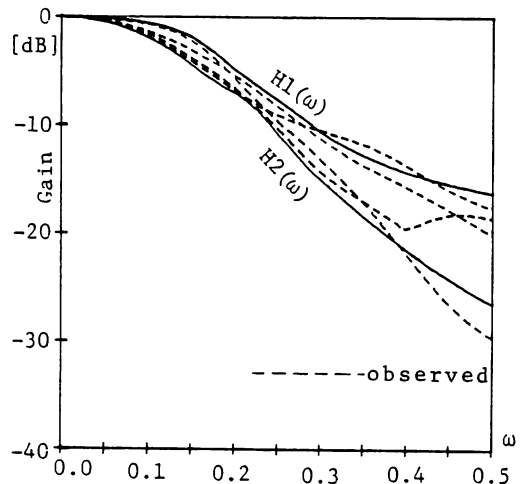


図-11

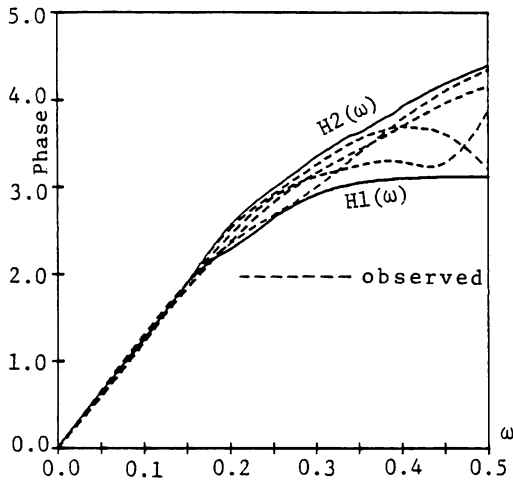


図-12

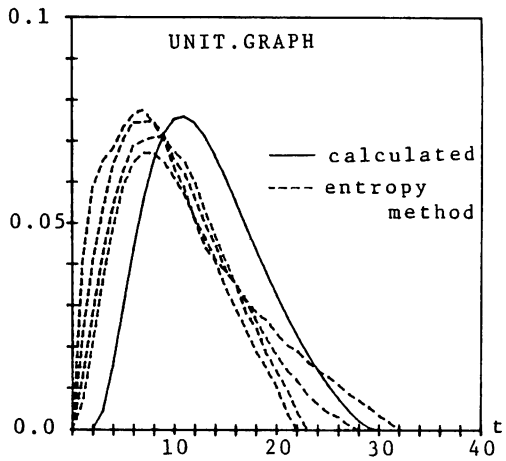


図-15

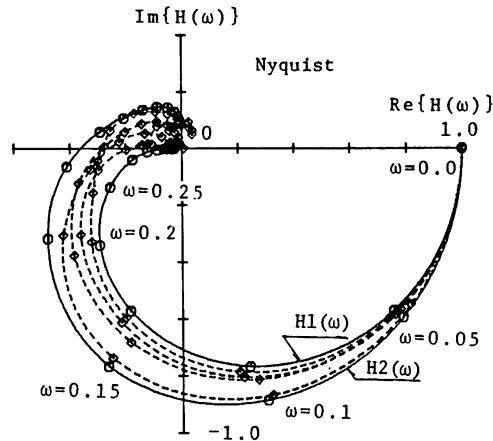


図-13

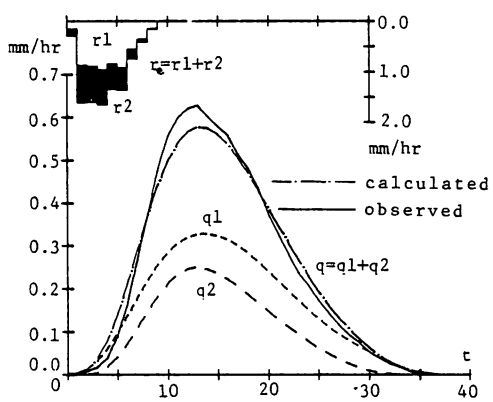


図-16

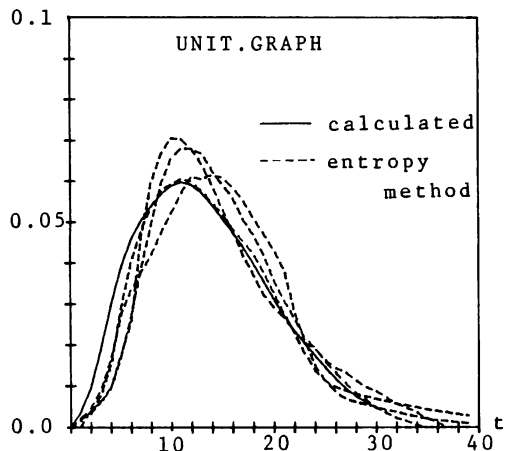


図-14

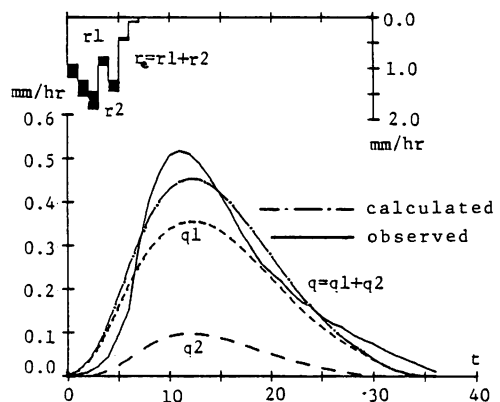


図-17

上り時刻と減水部二析曲点を直線で結ぶ分離法を採用した。

4 出水例のゲイン線図・位相線図・ナイキスト図を図-11・12・13 に破線で示す。図中実線の $H1(\omega) \cdot H2(\omega)$ はシミュレーションの結果を考慮して推定した流出成分である。 $\omega=0.3$ までをナイキスト図でそれ以上の周波数領域では、ゲイン線図・位相線図で推定した。ただし、実測資料には必ず流出の時間遅れが含まれ、これが位相線図においては発散特性となり、ナイキスト図においては原点を中心とした回転特性となることから、 $H1(\omega)$ は π に、 $H2(\omega)$ は $3/2\pi$ に強制的に収束させている。また、cut-off 周波数は 0.5 とした。

$H1(\omega)$ 、 $H2(\omega)$ を式(13)によって逆変換してインパルス応答関数を求め、さらに単位図に変換したものが図-14、15 の実線である。図-14 は $H2(\omega)$ から求め、図-15 は $H1(\omega)$ から求めたもので図中の破線は、藤田がエントロピー法で得た 4 出水例の単位図であり、それぞれ降雨開始時及び終了時の単位図である。両者はよく類似しており、周波数領域から推定した流出成分がそれぞれ降雨開始時と終了時の単位図と符合する結果となった。

逆推定した降雨は、式(14)・(15)によって求めた $r1(t)$ と $r2(t)$ から分配率 $g(t)$ を計算し、式(20)により求めた。推定した単位図と降雨を用いて流出量を再現したものを図-16・17 に示す。周波数領域から機械的に逆変換したものであるが、十分な精度で一致しているものと思われる。

最後に、本研究をすすめるにあたり、文部省科研費（一般研究（c）No.60550358 代表北大工藤田睦博）の援助を受けた。記して謝意にかえる次第である。

参 考 文 献

- 1) 日野・長谷部：「流量時系列のみによる流出解析」土木学会論文集 Vol.300, 1981
- 2) 藤田・道口：「エントロピー法を用いた流出解析」北海道支部論文集 Vol.40, 1984
- 3) 藤田：「降雨流出系のシステム関係の解析について」第 15 回水講論文集, 1971
- 4) 嵯峨・藤田：「非線形流出系の周波数特性について」第 39 回年講概要集 II, 1984
- 5) 嵯峨：「周波数応答法による流出成分の分離について」北海道支部論文集 Vol.41, 1985
- 6) 嵯峨・藤田：「周波数応答法を用いた流出成分

の分離」第 40 回年講概要集 II, 1985

(昭和 60 年 12 月 2 日受理)

