バタワースフィルタによる並列合成フィルタ

金　野　靖　英*・小　川　吉　彦**

A Parallel Synthesis-Filter using Butterworth Filters

Yasuhide KONNO and Yoshihiko OGAWA

要　旨

並列合成フィルタは複数のフィルタを並列に接続して新しい特性を持たせたものである。その基本的な場合であるバタワース低域通過フィルタと高域通過フィルタの並列合成について検討している。その結果，フィルタの次数によって各種のフィルタ特性を示すことが得られたので報告する。さらにバイカッド回路を用いた合成フィルタについて検討している。

Abstract

A parallel synthesis-filter has a new characteristic, as it consists of parallel conected filters. On basic ocasion it makes up of a Butterworth lowpass filter and a highpass filter. Its magnitude characteristic and its phase characteristic are investigated. And it is reported that the parallel synthesis-filters are classified by the order of filters. Moreover those are inqured into when biquad circuits are used.

1．まえがき

目的とする通過特性をもつ合成フィルタを設計するには，部分フィルタを縦続接続する縦続設計法が用いられる。高次フィルタやスタガ同調型バンドパスフィルタはこの方法で設計されている。これは新しい特性をそれぞれの特性の乗算によって得ようとするものである。特性の極や零点を考慮すれば，良い特性のものが得られることが知られている。[1][2] しかし並列接続によっても新しい特性を持つフィルタを合成することが可能である。

本稿では，この並列合成フィルタの基本的な振幅特性，位相特性について検討を加えている。部分フィルタには最大平担特性を示すバタワースフィルタを使用している。基本的な回路は同一のしゃ断周波数を持つ低域通過フィルタと高域通過フィルタのそれぞれの出力を並列加算した構成となっている。

さらに2次フィルタの応用としてバイカッド回路を用いた場合について検討している。

2．同一しゃ断周波数をもつバタワース低域通過フィルタと高域通過フィルタの並列合成

図1に基本的な回路構成を示す。これは筆者らが提案している帯域分割形遅延等化器[3]の基本遅

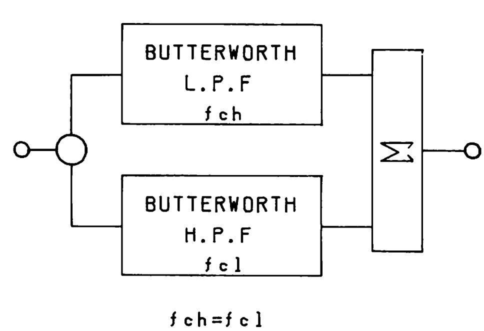

図1　並列合成フィルタの基本回路

＊電気工学科助教授
＊＊北海道大学工学部教授

延区間(4)でT＝0とした場合である。

この回路の伝達数関 $F(\omega)$ を求める。n 次低域通過のフィルタの伝達関数を $F_l(\omega)$, 高域通過フィルタの伝達関数を $F_h(\omega)$ とし，そのしゃ断周波数は正規化されて $\omega_c=1$ とする。

n が奇数の場合は

$$F_l(\omega)=\frac{1}{1+j\omega}\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\frac{1}{1-\omega^2+2ja_k\omega} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}F_h(\omega)&=F_l\left(-\frac{1}{\omega}\right)\\&=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot j\omega^n\cdot F_l(\omega)\end{aligned} \qquad (2)$$

n が偶数の場合は

$$F_l(\omega)=\prod_{k=1}^{n/2}\frac{1}{1-\omega^2+2ja_k\omega} \qquad (3)$$

$$F_h(\omega)=(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\omega^n\cdot F_l(\omega) \qquad (4)$$

となる。

a_k は図2のバタワースフィルタの極の位置より次のように求まる。

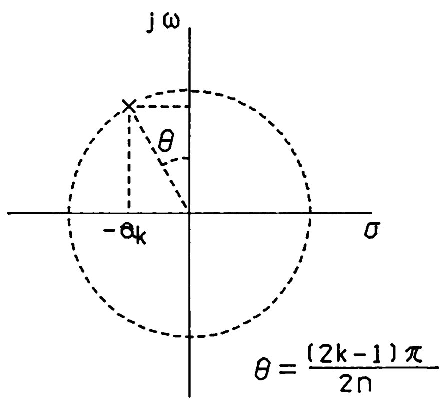

図2 バタワースフィルタの極

$$a_k=\sin\frac{(2k-1)n}{2n}$$

ここで

$$F_l(\omega)=|F_l(\omega)|e^{j\theta_l(\omega)}$$

$$F_h(\omega)=|F_h(\omega)|e^{j\theta_h(\omega)}$$

$$\because\quad |F_l(\omega)|^2=\frac{1}{1+\omega^{2n}},\quad |F_h(\omega)|^2=\frac{\omega^{2n}}{1+\omega^{2n}}$$

とし，

$$\begin{aligned}F(\omega)&=F_l(\omega)+F_h(\omega)\\&=|F(\omega)|e^{j\theta(\omega)}\end{aligned} \qquad (5)$$

とすると、$F(\omega)$ の2乗振幅関数は

$$\begin{aligned}|F(\omega)|^2=&|F_l(\omega)|^2+|F_h(\omega)|^2\\&+2|F_l(\omega)||F_h(\omega)|\cos\{\theta_h(\omega)-\theta_l(\omega)\}\end{aligned}$$

となる。n の値によって次のようになる。

1）n が奇数の時

$$\theta_h(\omega)-\theta_l(\omega)=\frac{\pi}{2}+\frac{n+1}{2}\pi \text{ であるから}$$

$$|F(\omega)|^2=1 \qquad (6)$$

2）n が偶数の時

$$\theta_h(\omega)-\theta_l(\omega)=\frac{n}{2}\pi \text{ であるから}$$

$$|F(\omega)|^2=1-(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{2\omega^n}{1+\omega^{2n}}$$

したがって

(a) $n/2$ が奇数の時

$$|F(\omega)^2|=1-\frac{2\omega^n}{1+\omega^{2n}} \qquad (7)$$

(b) $n/2$ が偶数の時

$$|F(\omega)|^2=1+\frac{2\omega^n}{1+\omega^{2n}} \qquad (8)$$

$\theta(\omega)$ は(5)より

$$\theta(\omega)=\tan^{-1}\frac{|F_l(\omega)|\sin\theta_l(\omega)+|F_h(\omega)|\sin\theta_h(\omega)}{|F_l(\omega)|\cos\theta_l(\omega)+|F_h(\omega)|\cos\theta_h(\omega)}$$

となる。これは n の値によって次のようになる。

1）n が奇数の時

$$\theta(\omega)\tan^{-1}\frac{|F_l(\omega)|\sin\theta_l(\omega)+(-1)^{(n-1)/2}|F_h(\omega)|\cos\theta_l(\omega)}{|F_l(\omega)|\cos\theta_l(\omega)-(-1)^{(n-1)/2}|F_h(\omega)|\sin\theta_l(\omega)}$$

2）n が偶数の時

$$\theta(\omega)=\theta_l(\omega)$$

nが奇数の時は，(6)より全域通過フィルタとなることが示されている。又nが偶数でn/2が奇数の時は帯域阻止フィルタとなる。n/2が偶数の時は，$\omega=1$ 附近で振幅特性が丘状となり，他では振幅が1となる特性となる。図3にnが偶数の場合の振幅の周波数特性を示す。特性は，(7), (8)より $2\omega^n/(1+\omega^{2n})$ で変化している。n/2が奇数でnの次数が増すと，鋭い帯域阻止の特性を示している。

図4にnが偶数次の時の位相特性を示す。$\omega=1$ までは，ほぼ直線的に変化し，次数を増せば位相の変化は大きくなる。(10)よりこの位相特性は低域通過フィルタの特性と同一である。

図5にnが奇数次の時の位相特性を示す。偶数次と異なって低域通過フィルタの特性より位相の変化が大きい。図より明らかなように，隣り合った（n－1）/2（n＝3，5，7，9……）が奇数と偶数であるものは $\omega=1$ で交差している。$\omega=$

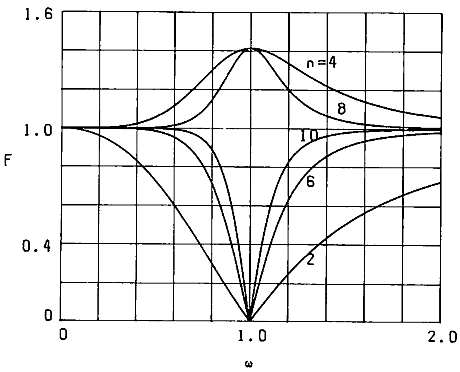

図3　振幅特性（n=偶数次）

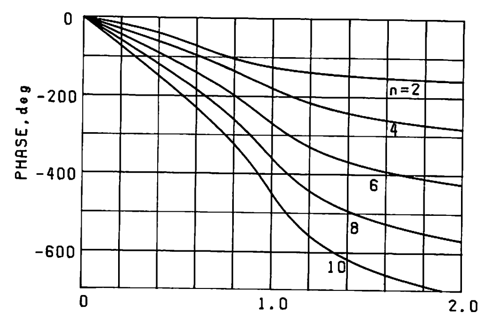

図4　位相特性（n=偶数次）

1を越えると両者の特性が入れ替っている。(n−1)/2が偶数であるものは，$\omega=1$までは良い直線位相特性を示していて，位相等化に用いる場合には望ましい特性となっている。この間の位相変化は5次で180°，9次で360°となっている。

3．並列合成フィルタの極と零点

合成伝達関数$F(s)$は，(1)，(2)，(3)，(4)より次のようになる。

1）nが奇数の時

$$F(S)=\frac{1+s^n}{1+s}\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\frac{1}{1+2a_k s+s^2}$$

2）nが偶数の時

$$F(s)=(1+s^n)\prod_{k=1}^{n/2}\frac{1}{1+2a_k\, s+s^2}$$

nが奇数の時は分子，分母に（1＋s）の項があるので，極と零点とは約され次数が1だけ下がる。s=−1以外のバタワース特性の極が残り，零点はZ(s)＝0の複素根である。ここで

$$Z(s)=\sum_{k=1}^{n-1}(-s)^{n-1}$$

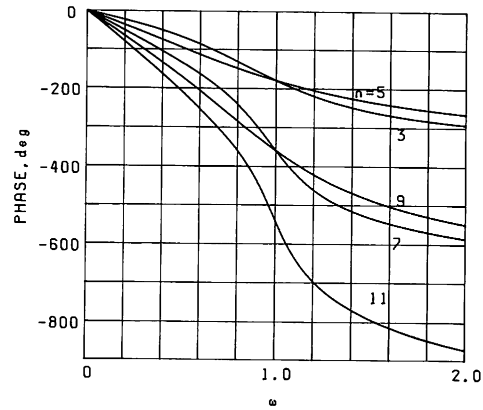

図5　位相特性（n=奇数次）

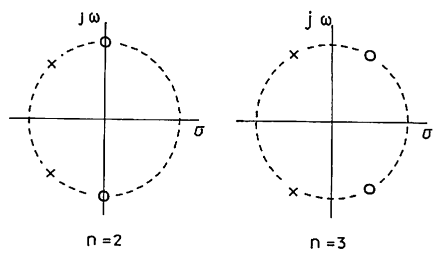

図6　並列合成フィルタの極と零点

である。例としてn=3の時の極と零点を図6に示す。この場合は極と零点とが打消し合う，2次の全域通過フィルタの配置となっている。[5]

nが偶数の時は，極はバタワース特性と同じで零点は$1+s^n$の複素根である。例としてn=2の時の極と零点を図7に示す。この場合は零点が，$j\omega=\pm j$にあって帯域阻止フィルタの配置となっている。[5]

4．バイカッド回路による帯域阻止フィルタ

バイカッド回路を用いたフィルタの伝達関数は次のようになる。

低域通過フィルタは

$$F_l(\omega)=\frac{1}{1-\omega^2+j\omega/Q}$$

（∵ωは正規化され$\omega_c=1$）

高域通過フィルタは

$$F_h(\omega)=\frac{-\omega^2}{1-\omega^2+j\,\omega/Q}$$

となる。これらを並列合成した伝達関数は

$$F(\omega)=\frac{1-\omega^2}{1-\omega^2+j\omega/Q}$$

となって帯域阻止（ノッチ）フィルタとなる。このフィルタのQを変えた場合の振幅特性，位相特性を図7，図8に示す。Qの値によってノッチ特性が変化するので，適当なQの値を設定可能である。

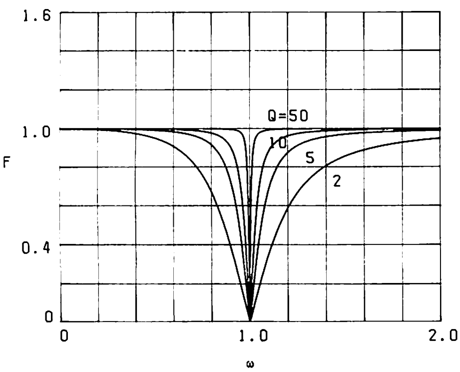

図7　振幅特性（バイカッド回路による）

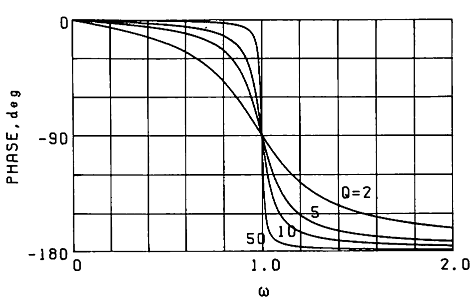

図8　位相特性（バイカッド回路による）

5．む　す　び

並列型の合成フィルタについて，バタワースフィルタを用いた1段の合成について検討したが，使用するフィルタの次数によって，その合成特性を分類できる。nが奇数の場合は全域通過フィルタとなり，位相が大きく変化するため，遅延等化等に有効な回路である。nが偶数でn/2が奇数の場合は帯域阻止フィルタとなる。特に2次のバイカッド回路を用いた場合は，ノッチ特性がQによって可変可能なフィルタとなる。並列合成にあたって，フィルタのしゃ断周波数を同一としたがそうでない場合については今後の課題としたい。

参　考　文　献

(1) 柳沢健他：アクティブフィルタの設計，産報出版，1973.

(2) M. E. Van Valkenburg : Analog Filter Design, CBS College Publishing, 1982.

(3) 金野・小川・柏倉：中波ラジオ中継線用の帯域分割形遅延等化器，テレビジョン学会全国大会講演予稿集，9－11，1984.

(4) 金野・小川：帯域分割形遅延等化器の等化特性の検討，苫小牧工業高等専門学校紀要，第21号，1986.

(5) David E. Johnson : Introduction to Filter Theory, Prentice-Hall, 1976.

（昭和61年11月29日受理）