

フレネル変換型バイナリーホログラムについて

藤 木 茂 夫*

On the Binary Hologram of Fresnel Transformation Type

Shigeo FUJIKI

要 旨

計算機によるバイナリーホログラムについては従来、フーリエ変換型についてのみ発表されている。本論文ではフーリエ変換型バイナリーホログラムの理論を用いて、フレネル変換型のバイナリーホログラムを作製する方法を提案し、実験した結果を報告する。フレネル変換型のホログラムから像を再生するには、フーリエ変換型と異なり特別な光学系を必要とせず適当なコヒーレント光で再生できる。また、ホログラム後方の空間に浮かび上がる仮想的物体の3次元実像のディスプレイなども可能になる。

Abstract

The investigations of binary Fraunhofer (Fourier) hologram have been reported. In this paper, the binary hologram of Fresnel transformation type using the theory of binary Fraunhofer hologram is proposed and experimental results are reported.

The binary Fresnel hologram dose not require the particular optical systems for reconstruction of image. The reconstruted image is obtained by the ordinary coherent lighth. By using the binary Fresnel hologram, three-dimensional real image floating in the back space of hologram plate may be obtained.

1. は じ め に

ホログラフィを空間の回折作用の立場から分類すると、フラウンホーファ回折（またはレンズのフーリエ変換作用を利用する）によるフーリエ変換型のものとフレネル回折を利用したフレネル変換型のものとに分けられる⁽¹⁾⁽²⁾。また、ホログラムを作製する方法としては、以下の二通りの方法がある。(1)実在する物体に光、マイクロ波、超音波などを照射して、その物体からの反射波や透過波の情報を何らかの方法で記録する。(2)計算機合成ホログラム：数式または数値で表された物理的に存在しない架空の物体にコヒーレントな波動を照射したと考え、計算機により反射波または透過波などを計算しその情報をプロッターまたはプリンターで表示する。

従来発表されている計算機合成ホログラムはフーリエ変換型のものであり、それらのホログラムから光学的に像再生を行うにはレンズを用いてフーリエ変換をしなければならず煩わしい。計算機合成ホログラムの存在理由の一つは、現実には存在しない仮想的物体のホログラムを作ることである。ホログラフィの最大の特徴である3次元像（通常のフレネル変換型ホログラムによる虚像や、二次ホログラムまたはイメージホログラムによってホログラム後方の空間に浮かび上がる3次元実像）を計算機合成によって得るためにはフレネル変換型ホログラムが必要である。

フレネル変換型のホログラムを音波またはマイクロ波で作製し、そのホログラムデータをプロッターまたはプリンターを使用して表示して、これから光学的に像を再生する例は報告されている⁽³⁾⁽⁴⁾。この場合にはホログラムは確かにバイナリー（透過関数が0か1）ではあるがデータは実

* 助教授 電気工学科

数値であり位相情報は含まれていない。その後、位相情報をも記録する型のフレネル変換型のバイナリーホログラムについての報告は見あたらない。

本論文では、計算機合成ホログラムの一つである A.W.Lohmann らの提案によるフーリエ変換型のバイナリーホログラムの理論⁽⁵⁾を用いてフレネル変換型バイナリーホログラムを作製する方法を提案し、その方法で作られたホログラムから比較的少ないサンプル数で良好な再生像が得られたので報告する。

2. 原 理

図1において、面1が波長 λ なるコヒーレント光（電波または音波でもよい）で照射されているものとする。面1を通過した直後の場を $\phi_1(x_1, y_1)$ とすると、面1から距離 z 後方の面2に到達する場 $\phi_2(x_2, y_2)$ はフレネル回折公式⁽⁶⁾より

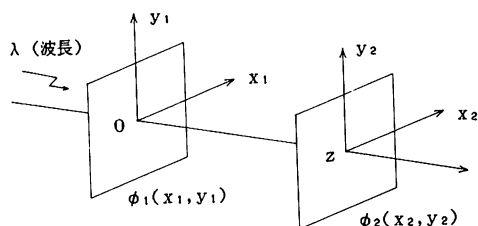


図1 フレネル回折

$$\phi_2(x_2, y_2) = D \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x_1, y_1) \cdot \exp\left[j \frac{k}{2z} \{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\}\right] dx_1 dy_1 \quad (1)$$

与えられる。ただし、光は単色光で時間因子を $\exp(-j\omega t)$ とし、 $k = 2\pi/\lambda$ （波数）である。また $j = \sqrt{-1}$ 、 D は光源の強さに関係する定数である。(1)式の積分のまへの項は面2の上では定数であり、重要ではない。空間的作用としてのフレネル回折式(1)を考慮して、数学的にフレネル変換およびフレネル逆変換なるものを次のように定義することにする。

$$\phi(\alpha, \beta) = |A| \iint_{-\infty}^{\infty} \phi(p, q) \cdot \exp[j\pi A \{(\alpha - p)^2 + (\beta - q)^2\}] dp dq \quad (2)$$

$$\phi(p, q) = |A| \iint_{-\infty}^{\infty} \phi(\alpha, \beta)$$

$$\cdot \exp[-j\pi A \{(\alpha - p)^2 + (\beta - q)^2\}] d\alpha d\beta \quad (3)$$

(2)式でフレネル変換を定義したとき(3)式が成立することはデルタ関数を用いれば簡単に証明できる。波動光学的フレネル回折式(1)と、(2)、(3)式中の変換パラメータ A との対応は $A = 1/(\lambda z)$ である。(2)、(3)式は2つの関数の畳み込み積分である。例えばフレネル変換(2)式の場合には

$$\phi(\alpha, \beta) = \iint_{-\infty}^{\infty} \phi(p, q) h_1(\alpha - p, \beta - q) dp dq = \phi \oplus h_1 \quad (\oplus \text{記号は畳み込み積分を示す}) \quad (4)$$

ただし、

$$h_1(x, y) = |A| \exp[j\pi A (x^2 + y^2)] \quad (5)$$

である。畳み込み積分の性質から

$$\phi(\alpha, \beta) = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}[\phi \oplus h_1] = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(\phi) \mathcal{F}(h_1)] = \mathcal{F}^{-1}[\Phi \cdot H_1] \quad (6)$$

ここで、 $\mathcal{F}$ 、 $\mathcal{F}^{-1}$ は2次元フーリエ変換および逆変換をあらわし、 Φ 、 H_1 はそれぞれ ϕ 、 h_1 のフーリエ変換である。 H_1 は解析的に計算でき、

$$H_1(\mu, \nu) = \iint_{-\infty}^{\infty} h_1(p, q) \cdot \exp[-j2\pi(\mu p + \nu q)] \cdot \exp[-j2\pi(\mu p + \nu q)] dp dq \quad (7)$$

$$= \exp\left\{-j \frac{\pi}{A} (\mu^2 + \nu^2) + j \frac{\pi}{2}\right\} \quad (8)$$

である。フレネル逆変換の場合は

$$\phi(p, q) = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}[\phi \oplus h_2] = \mathcal{F}^{-1}[\Psi \cdot H_2] \quad (9)$$

である。 Ψ 、 H_2 はそれぞれ ψ 、 h_2 のフーリエ変換であり $H_2 = H_1^*$ （*印は複素共役数）である。これらのことからフレネル変換、逆変換は数値的に2次元の高速フーリエ変換（FFT）のアルゴリズムを用いて計算することができる⁽⁷⁾。

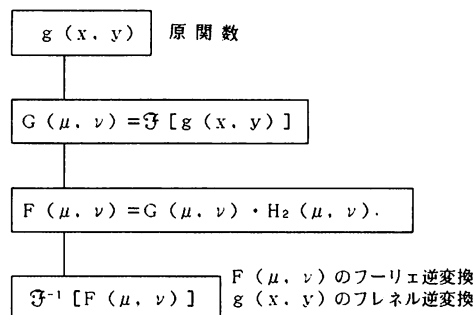


図2 フレネル逆変換の計算手順

フレネル変換型バイナリーホログラムの原理を説明するために、(9)式によりフレネル逆変換を計算する手順をあえて図示すると図2のようになる。

図2において $H_2(\mu, \nu)$ を $H_1(\mu, \nu)$ とすればフレネル変換が求まる。いまの場合には $\mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}[G(\mu, \nu) \cdot H_2(\mu, \nu)]$ は $g(x, y)$ のフレネル逆変換であるから、当然のことながらこれをフレネル変換すれば原関数 $g(x, y)$ となり、フーリエ変換をすれば

$$F(\mu, \nu) = G(\mu, \nu) \cdot H_2(\mu, \nu)$$

となる。フーリエ変換型バイナリーホログラムの原理は、ある関数のフーリエ変換値の振幅と位相とからバイナリーホログラムを作製するということである。したがって、 $F(\mu, \nu)$ をその原関数と考え、この関数に対するフーリエ変換型バイナリーホログラムを作製すればそれは関数 $g(x, y)$ に対してはフレネル変換型バイナリーホログラムとなることは明らかである。なお、光学的にはフーリエ変換もフーリエ逆変換も特に区別する必要はない。フーリエ変換の定義式(7)で $\mu \rightarrow -\mu, \nu \rightarrow -\nu$ と変数変換すればフーリエ逆変換となり、この変数変換は空間座標の正負の向きを逆にすることを意味している。したがってある関数を2度続けてフーリエ変換するとその関数の左右上下反転した関数が得られることは良く知られたことである。しかしながら、フレネル変換の場合には2度続けても元に戻らない。これがフレネル変換型バイナリーホログラムにおいては原関数 $g(x, y)$ のフレネル逆変換を計算する理由である。

上述の方法で作られたホログラムを光学的にフーリエ変換すれば $F(\mu, \nu)$ が得られ、光学的にフレネル変換を行えば $g(x, y)$ が得られる。

3. ホログラムの作製

2. で説明した理論にしたがってバイナリーホログラムを作り、それから原関数を完全に再現するためには、次の条件が満たされなければならない。すなわち、

$$|\mu| > \Delta\mu/2, \quad |\nu| > \Delta\nu/2 \quad (10)$$

なる $\Delta\mu, \Delta\nu$ が存在すること。すなわち、 $F(\mu, \nu)$ はある有限な領域でのみ0でない値を持ち、それ以外では0でなければならない。しかし、 $F(\mu, \nu)$ の絶対値は元関数 $g(x, y)$ のフーリエ変換 $G(\mu, \nu)$ の絶対値に等しいので一般にはこの条件は

満たされない。しかし、通常の画像関数では高い周波数成分は直流成分に比べ急激に減少するので、この制限についてはあまり考慮しなくてもよいと思われる。実験結果によればこの条件がかなり荒い近似で満たされていても比較的良好な像が得られることがわかる。これは数学的値を光で再生した場合の視覚感覚の冗長性にもとづくものであると考えられる。

文献(1)により、 $F(\mu, \nu)$ のフーリエ変換値 $f(x, y)$ のサンプル値を $f(m\delta x, n\delta y)$ とする。

$$f(m\delta x, n\delta y) = A_{mn} \cdot \exp(j\varphi_{mn}) \quad (11)$$

とおき、振幅 A_{mn} と位相 φ_{mn} よりホログラムを作製する。ここで $\delta x, \delta y$ は理論的にはそれぞれ(10)式の $\Delta\mu, \Delta\nu$ とは

$$\begin{aligned} \delta x &= 1/\Delta\mu \\ \delta y &= 1/\Delta\nu \end{aligned} \quad (12)$$

の関係にある。

実現すべきバイナリーホログラムの透過関数を $H_0(x, y)$ とすると、

$$\begin{aligned} H_0(x, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \text{rect}\left\{ \frac{x - (m + P_{mn})\delta x}{C\delta x} \right\} \\ &\quad \cdot \text{rect}\left\{ \frac{y - n\delta y}{W_{mn}\delta y} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

で与えられる。ここで M, N は原関数のサンプル数で、 C は通常 $0 \leq C \leq 1$ なる任意の値にとられる。 W_{mn}, φ_{mn} は

$$W_{mn} = K \cdot A_{mn} \quad (14)$$

$$P_{mn} = \varphi_{mn} / (2 \pi M_0) \quad (15)$$

で、 M_0 は1より大きな任意の整数、 K は比例定数である。また、

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases} \quad (16)$$

である。

図3に式(16)による (m, n) 番目のセルの構造を示す。図の斜線部分がホログラムの光透過率が0で、白地の部分(窓)が1である。

すなわち、波動場の情報である複素数の振幅を窓の高さに、位相を窓の位置に対応させるものである。

プロッターでは白地の部分を黒インクで塗りつぶし、出来上がったホログラム原版をフィルムに撮影し、白黒を反転させる。

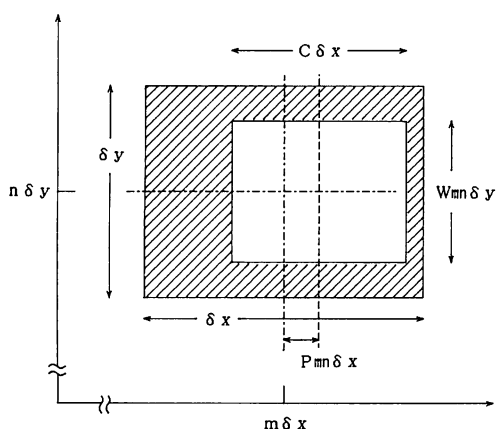


図3 セルの構造

次に実際のプロッターでの描き方について説明する。使用したプロッターのペン位置が連続的に制御できないために、 $(m \times n)$ 個の振幅 A_{mn} および位相 φ_{mn} を量子化する。振幅については A_{mn} の最大値と 0 の間を M_a (整数) 等分し、各 A_{mn} の値に応じて $0 \sim (M_a - 1)$ の値を割当てこの値を K_{mn} とする。位相については $-\pi \sim \pi$ の間を N_p (整数) 等分し、各 φ_{mn} の値に応じて $0 \sim (N_p -$

1) の値を割当てこの値を L_{mn} とする。このとき図3の W_{mn} , P_{mn} を

$$W_{mn} = \frac{K \cdot K_{mn}}{M_a - 1} \quad (17)$$

$$P_{mn} = \frac{L_{mn}}{M_o (N_p - 1)} - \frac{1}{2 M_o} \quad (18)$$

とした。

図4に数値で表された原関数を計算機に入力してから光学的に原関数を再生するまでの全過程を示す。

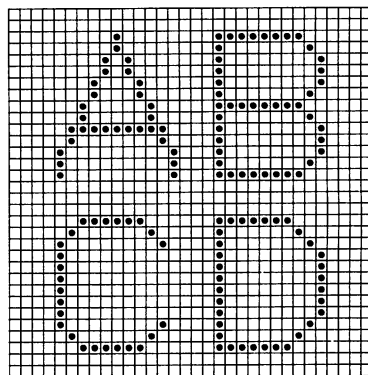


図5 原図形 (I)

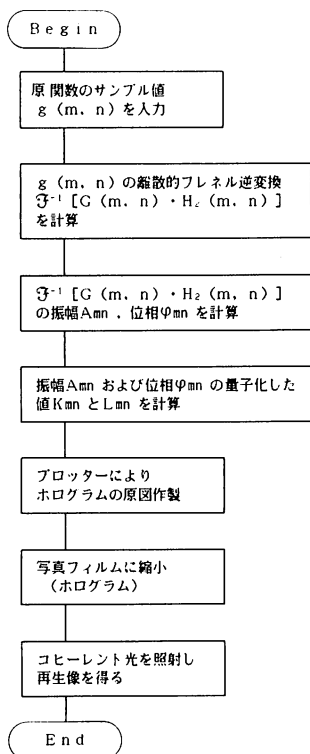


図4 再生像までの過程

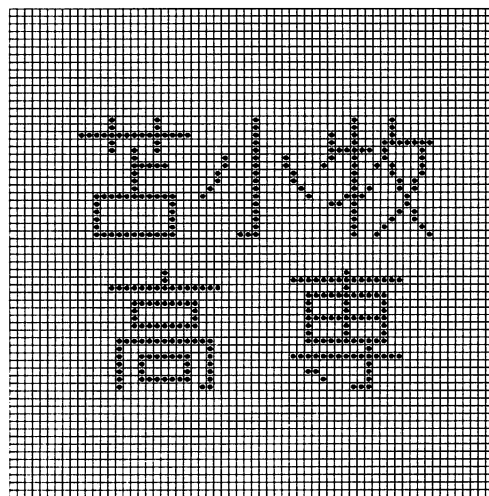


図6 原図形 (II)

図5, 6に実験で使った2次元関数のサンプル値(2値)の例を示す。図5においてはサンプル数は $m=n=32$ (図形I), 図6では $m=n=64$ (図形II)である。図7, 8に作製したホログラム(原版)の例を示す。図7は図形Iに対するものでフーリエ変換時のパラメータ A は32であ

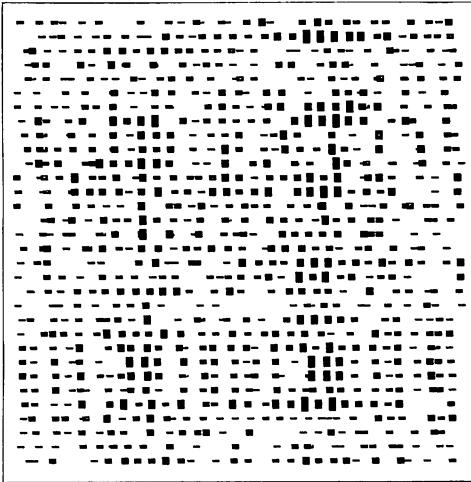


図7 ホログラム (I)



図8 ホログラム (II)

り, $C = 1/2$, $K = 1$, $M_0 = 1$, 振幅の量子化数 $M_a = 11$, 位相の量子化数 $N_p = 11$ で, 図8は図形IIに対するもので, $A = 64$, $C = 1/2$, $K = 0.5$, $M_0 = 1$ がある。いずれも比較的遠方のフレネル回折像に相当するため原図形の面影が全くない。プロッター上での値は図7では $\delta\mu = \delta\nu = 4$ mm, 図8では $\delta\mu = \delta\nu = 2$ mmとした。したがっていずれも全体では (128 mm × 128 mm) の大きさの原版である。これを写真フィルム (ミニコピーフィルム) 上にそれぞれ約 5 mm × 5 mm, 6 mm × 6 mm の大きさに縮小したものをホログラムとした。

4. 光学的像再生

3. で作られたホログラムから得られる再生像の位置について述べておく。(M × N) 個のデータで与えられる入力画像の仮想的寸法を $L \times L$ [m²] とすると, このデータを FFT を用いてフレネル変換 (または逆変換) したときには, その範囲はやはり $L \times L$ [m²] である。フィルムに焼き付けられたホログラムの寸法を $F \times F$ [m²] とするとフィルム上のホログラムは $1/S$ (ただし $S = L/F$) 倍に縮小されたものになる。この縮小されたホログラムを波長 λ [m] のコヒーレントな平面波で照射した場合, ホログラムから再生像間の距離 z は, フレネル変換型ホログラムの理論から

$$z = 1 / (S^2 \lambda A) \quad (19)$$

で与えられる, ただし, A はフレネル変換時の変換パラメータである。また, FFT のアルゴリズムから $L = 1$ である。

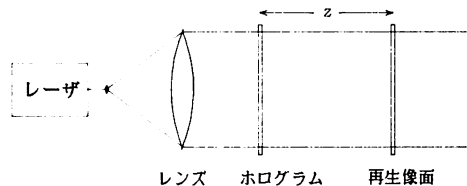


図9 像の再生系

作製されたホログラムを, 図9のように波長 6328 Å の He-Ne レーザ光線をレンズで平行光線にして照射して得られた再生像の拡大写真の例を図10~13に示す。これらはいずれも (19) 式で与えられた z にほぼ等しい位置にフィルムを置き直接露光させたものである。

図10は図7のホログラムからの再生像である。結像距離の理論値 $z \approx 1.23$ [m] とほぼ同じ位置で得られたものである。写真の中央の明るいほぼ正方形の部分は0次の回折光であり, バックグランド光に埋もれて文字“ABCD”が見えない。このバックグランド光を取り除けば左側のような像が見えるはずである。左側の文字“ABCD”は1次の回折像である。その上下に高次の回折像が並んでいる。再生像が多数現れるのは計算機合成ホログラムの特徴である。

図11は $A = 20$ としたときのホログラムからの再生像である。 A の値を小さくすると結像距離が大きくなり, 0次と1次の回折光の間隔が大きく

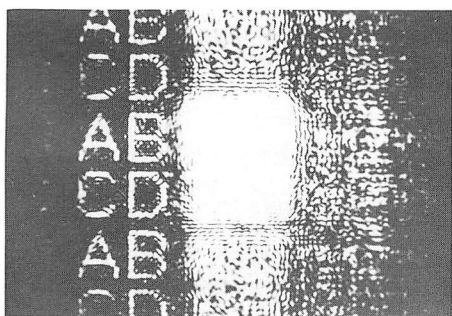


図10 再生像

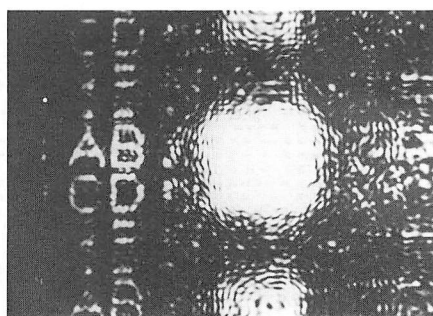


図11 再生像

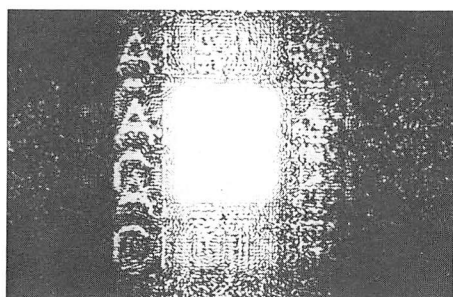


図12 再生像

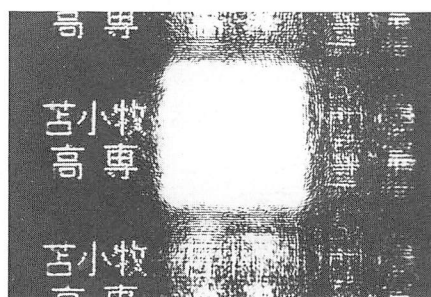


図13 再生像

なってくることがわかる。

図12は $A=50$ の場合の再生像である。この場合は、結像距離が短いために0次と高次回折像が重なっていて、それらが互いに干渉しあって画質が低下している。このことから、変換パラメータ A はあまり大きくできないことがわかる。

図13は図8のホログラムからの再生像である。サンプル数が 64×64 と図10～12の場合の4倍であるため比較的良質の像が得られた。

(14), (17)式の比例定数 K は像の明るさに関係するもので、 K が大きいほど窓が大きくなりホログラムを通過する光が多くなるのでそれだけ再生像が明るくなる。しかし、理論的に予測されるように像の質自体にはほとんど影響を与えないことが実験で確かめられている。

5. あとがき

本報告では従来、フーリエ変換型のホログラムで実現していたバイナリーホログラムの理論を用いてフレネル変換型のバイナリーホログラムを作製する方法を提案し、その理論に従ってホログラムを作製し光学的フレネル変換によって再生像が得られることを確かめたものである。実験結果が

比較的少ないサンプル数から良質の再生像が得られることがわかった。

今回作製したフレネル変換型バイナリーホログラムは仮想的2次元物体の実像を得るものである。この実像は直接目で見ることとはできず、結像位置にスクリーン(紙)などを置いてはじめて観測されるものである。計算機合成バイナリーフレネル変換型ホログラムの実現により任意の架空の物体による回折場を記録できることから、このホログラムの応用として直接目で見ることのできる虚像やホログラムの後方に浮かび上がる実像の再生、3次元物体に対するフレネル変換型ホログラムの作製などが考えられる。これらについては今後検討する予定である。

参考文献

- (1) 大越：ホログラフィ，電子通信学会編
- (2) 辻内，村田：光学情報処理，朝倉書店，
- (3) 青木他：長波長ホログラムからの数値的像再生法，電子通信学会論文誌，75/2 Vol. 58-C, No. 2, p. 71.
- (4) 青木他：フーリエ変換マイクロ波ホログラフィ，電子通信学会論文誌，75/10 Vol. 58-C, No.

- 2, p.481.
- (5) A.W. Lohmann and D.P. Paris; "Binary Fraunhofer Holograms, Generated by computer", October 1967, Vol. 6 No. 10/Applied Optics, p1739-1748.
- (6) J.W. Goodman; "Introduction to Fourier Optics", Mc Graw-Hill, New York (1968).
- (7) 青木他: 数値的二次元フレネル変換法, 電子通信学会論文誌, 74/8 Vol.57-B, No. 8, p.511.

(昭和 62 年 11 月 21 日受理)

