数学教育を量子力学の学習に活かすⅡ

石　　信　一*

Introductory Quantum Mechanics through knowledge of mathematical education

Shin－ichi Ishi

要　旨

フーリエ変換とデルタ関数を用いて，量子力学における連続固有値の固有値問題を解説した。デルタ関数の理解の為に，超関数（“Hyperfunction”）の初等的説明を与えた。

Eigen value problems with continuous eigen values in quantun mechanical system are explained in terms of Fourier transformations and delta function. To understand the detla function, a preliminary interpretation of the hyperfunction introduced by M. Sato is shown.

1. は じ め に

前回は，フーリエ級数を基にして，離散固有値をとる量子力学系の固有値問題を解説した。今回は，その続きとして，フーリエ変換(第一章)を基にして，連続固有値をとる系（粒子の運動量及び位置（座標））の固有値問題を取り上げる[1]（第二章)。その際，連続固有値をとる固有関数系の表現には，デルタ関数が登場する。擬関数としてのデルタ関数は，関数概念が拡張された超関数として理解されるものである。そこで，デルタ関数の初歩的解説を，正則関数に基づく方法（佐藤超関数[2]）によって試みる（第四章)。

2. 数 学 的 準 備

まず，フーリエ変換をフーリエ級数展開を通して導入する。周期$2l$の関数$f(x)$の複素フーリエ級数展開は，

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/l}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n u_n \tag{1}$$

$$c_n=\langle f(x) \mid e^{-in\pi x/l}\rangle=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-in\pi x/l}dx \tag{2}$$

と書ける(nは整数，$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位)。ここに，c_nは展開係数である。量子力学では，$|c_n|^2$の方が物理的意味をもつ。(2)を(1)に代入し，$l\rightarrow\infty$の極限をとる。その際，$n\pi/l=t$ の変数変換を行う：

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)e^{-in\pi\xi/l}d\xi\right) e^{-in\pi x/l}$$

*　助教授　一般教科

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-it\xi}d\xi\right) e^{itx}dt \tag{3}$$

(3)をフーリエ積分という。(1)での離散変数nは，$l \to \infty$によって、(3)では連続変数tに変わった。(3)式を見やすくするために，

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ e^{-itx}dx \tag{4}$$

を導入して，

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\ e^{-itx}dt \tag{5}$$

と書き替える。(4)と(5)の積分表示は，フーリエ級数展開の(2)と(1)にそれぞれ対応している。(4)の$F(t)$をフーリエ変換（$F(t)=F(f(x))$と略記する)，(5)をフーリエ逆変換あるいは“反転公式”という。ところで，(5)をフーリエ変換、(4)を逆変換といっても一向に構わない。“反転公式”の名の由来は次式の変形からわかる。(4)を(5)に代入して，積分変数ξとtの積分順序の変更を仮定して，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\ e^{-it\xi}d\xi\right) e^{itx}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(\xi-x)}dt\right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(\xi-x)\ d\xi = f(x) \end{aligned} \tag{6}$$

となることによる。(6)の導出においては，敢えて後述する関係式

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(\xi-x)}dt = \delta(\xi-x) \tag{7}$$

を先取りした（付録１)。

(5)式の内容は，フーリエ級数展開(1)に対照させて考察する。(5)の指数関数e^{itx}は，微分演算子$D=-i\,d/dx$の固有関数である。つまり，yとλを固有関数と固有値とする固有値方程式

$$Dy(x) = \lambda y(x),\ D = -i\frac{d}{dx} \tag{8}$$

において，$\lambda = t$のときの固有関数である。微分演算子Dは，内積の関係式

$$<Dy_m \mid y_n> = <y_m \mid Dy_n> \tag{9}$$

を満たすのでエルミット演算子である。エルミット演算子Dの固有値λは実数である。$\lambda = t$であるから，λは連続固有値である。こうして，フーリエ級数展開が離散固有値の固有関数展開であったように，フーリエ逆変換(5)は，連続固有値の固有関数展開と見なせる。この相違は，境界条件のとり方（有限か無限か）に帰因している。また，(4)と(5)から，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx = \int_{-\infty}^{\infty}|F(t)|^2dt \tag{10}$$

の等式を得る。(10)は，フーリエ級数における Parseval の等式の拡張である。この等式の物理的意味は次章で述べる。

最後に，フーリエ変換のある性質が固有値方程式から容易に導びけることを示す。(8)式の両辺をフーリエ変換すると（$\lambda = t$として)，

$F(Dy(x)) = -iF(dy/dx) = F(ty) = tF(y(x))$

ここで，$-i$を最右辺に移項すれば，

$$F(Dy(x)/dx) = itF(y(x)) \tag{11}$$

を得る。即ち，微分した関数$dy(x)/dx$のフーリエ変換は，元の関数$y(x)$のフーリエ変換にitを掛ければよいことになる。

3．固有値問題の例

連続固有値をとる物理量の典型として運動量及び位置（座標）がある。それぞれp及びx'で表すと，対応する演算子は,$p=-i\hbar d/dx, x$と書ける。$\phi(x)$，$\phi(x)$を固有関数とすれば，固有値方程式は，

$$p\phi(x)=p\phi(x) \tag{1}$$

$$x\phi(x)=x'\phi(x) \tag{2}$$

と書ける。演算子pとxには，

$$[p,x]=px-xp=-i\hbar$$

の関数がある。この式を確かめるには，任意の関数　$f(x)$を上式の辺々に左から掛ける：

$$(左辺)=(px-xp)f=-i\hbar\frac{d}{dx}(xf)-x\left(-i\hbar\frac{d}{dx}f\right)$$
$$=-i\hbar f(x)=(右辺)$$

これを正準交換関係という。従って，$\phi(x)$と$\phi(x)$が等しくなることはない（pとxに関して，同時固有関数は存在しない)。まず，(1)

$$p\phi(x)=-i\hbar\frac{d}{dx}\phi(x)=p\phi(x) \tag{1)$'$}$$

について解こう。但し，以下では，簡単化のため定数$\hbar=1$とおく。それ故，(1)$'$式は，前章の固有値方程式(8)に同型になるので，それに関する結果を利用できる。固有関数$\phi(x)$は，(1)$'$を積分して，

$$\phi(x)=ce^{ipx} \tag{3}$$

ここに，cは規格化定数である。しかし，このcを，普通の規格化条件から決めようとすると，

$$c^2\int_{-\infty}^{\infty}|e^{ipx}|^2dx=\infty \tag{4}$$

となり，規格化できない（付録２)。フーリエ級数展開における固有関数の規格直交化は，

$$\langle u_m|u_n\rangle=\delta_{m,n}=\begin{cases}1 & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases} \tag{5}$$

で表現される。ここに，$\delta_{m,n}$は，Kroneker のデルタ記号である。そこで，そのアナロジーとして，(3)の規格直交化を

$$\langle\phi_{p'}|\phi_p\rangle=c^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(p'+p)x}dx=c^2 2\pi\,\delta(p'+p) \tag{6}$$

と表現したのが Dirac (ディラック)である。Dirac は，この$\delta(p'+p)$（δ関数と書き，デルタ関数と読む）を合理化する為に，次のような定義と性質を与えた（付録３)。

δ関数の定義として，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1,\qquad x\neq0\text{に対して}\delta(x)=0 \tag{7}$$

とした。直感的には，δ関数は$x=0$の一点のみで値をとる関数である。質点，あるいは，点電荷の概念の数学的表現と考えられる。無論，Dirac 自身も定義(7)が数学的に完全なものとは考えていない。δ関数は，普通の関数でなく，何らかの極限操作を伴ったものであると考えている。例えば，

$$\lim_{n\to0}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(x)\,dx=1,\qquad x\neq0\text{対して}\lim_{n\to0}\delta_n(x)=0 \tag{7)$'$}$$

しかし,この定義でさえδ関数を一意的に特徴付けないのである(付録１）。δ関数を用いることによって，(6)式の規格化定数cは，

$$c^2 2\pi=1,\quad c=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{8}$$

と書ける。

Dirac は，δ関数の関わる関係式[1]として次のようなものを挙げている：

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)\,dx=f(0)$

“δ関数と普通の関数$f(x)$の積の積分は$x=0$の近傍のみ寄与する。(7)に代わるδ関数の定義”

(2) $\varepsilon(x)=\begin{cases} 0\ (x<0) \\ 1\ (x>0) \end{cases}$ $\therefore \delta(x)=\dfrac{d\varepsilon(x)}{dx}$

“単位段階（Heaviside）関数の微分はδ関数。δ関数の別の定義”

(3) $\delta(-x)=\delta(x)$

“δ関数は偶関数”

(4) $x\delta(x)=0$

“x（奇関数）とδ関数(偶関数)の積はゼロ”

(5) $\delta(ax)=\delta(x)/a$

“δ関数の引数をa培すれば，δ関数は$1/a$”

(6) $\delta(x^2-a^2)=\{\delta(x+a)+\delta(x-a)\}/2a \qquad (a>0)$

(7) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\ dx\,\delta\ (x-b)=\delta(a-b)$

(8) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\delta(x-a)\ dx=f(a)\,\delta(x-a)$

(9) $\dfrac{d\ log\ x}{dx}=\dfrac{1}{x}-i\pi\,\delta(x)$

さて，(3)のフーリエ変換は，

$$F\ (p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\ e^{-ipx}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(p'+p)x}dx\,\delta(p'+p) \tag{9}$$

で，逆変換は，

$$\phi\ (x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F\ (p)\ e^{ipx}dp=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(p'+p)\ e^{ipx}dp$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-ip'x} \tag{10}$$

である。これらの表式から，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\ \phi\ (x)\ |^2\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}|\ F\ (p)\ |^2\,dp \tag{11}$$

の関数式（Parsevalの等式）が得られる。ここに，$|\phi(x)|^2dx$は，粒子（電子等）の位置（座標）が区間xと$x+dx$に見いだされる確率に比例し，$|F\ (p)|^2dp$は，運動量が区間pと$p+dp$に見いだされる確率に比例することを示す。$\phi\ (x)$と$F\ (p)$は，フーリエ変換で結び付けられている同じ内容の別の表現である。実は，(9)，(10)の結果は，不確定性原理の特別の場合になっている。運動量の情報は，δ関数によってぴたりと確定するが，位置の情報は，平面波によって全く拡散してしまう。運動量，位置の不確かさを表す量は$\triangle p$と，$\triangle x$とすれば，$\triangle p=0$，$\triangle x=\infty$に相当している。つまり，量子力学における，波動－粒子性という物質の二重性から言えば，波動的描像である。

位置の固有値方程式(2)の解を求める為に，次のように変形する：

$(x-x')\phi(x)=(x-x')\phi(x)=0$

これにより，

$$\phi(x)=\delta(x-x') \tag{12}$$

と書ける（係数は無視した)。固有値x'の固有関数は$\delta(x-x')$ということである。(12)のフーリエ変換は，

$$F\ (p)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x')\ e^{-ipx}dx=\frac{1}{2\pi}\ e^{-ip'x} \tag{13}$$

である。今度は，粒子的描像（$\triangle x=0$，$\triangle p=\infty$）である。

$\phi(x)$は位置（座標）表示の波動関数，$F\ (p)$は運動量表示は波動関数という。上述の議論は，位置表

示についてのものであったが，運動量表示でも同様な議論ができる。その際，運動量表示の波動関$F(p)$に作用する演算子は，

$$p=p\,,\quad x=i\hbar\frac{d}{dp} \tag{14}$$

としなければいけない。

4．δ関数について

δ関数（もっと一般的な超関数）の理論化は今日では幾つかあるが，ここでは，正則関数を用いる方法を述べる。

Diracが挙げたδ関数の定義(1)から始めよう。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx=f(0) \tag{1}$$

より一般的な型としては，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)=f(a) \tag{1$'$}$$

を，Cauchyの積分公式，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{z}\,dz=f(0) \tag{2}$$

より一般的な型としては，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{z-a}\,dz=f(a) \tag{2$'$}$$

に対応させる。関数$1/z$は，複素平面上$z=0$を除いて正則である。記号の$\oint$の示す積分路Γは，図(1－A)の複素平面において，直線を実軸として原点を囲む閉曲線である。しかし，積分路は，Cauchyの積分定理より，（B）あるいは（C）のようにもとれる。

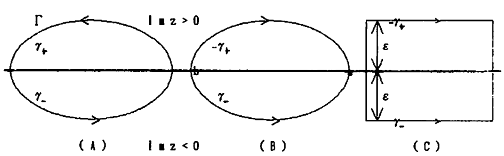

図1．(3)式のCauchyの積分公式における積分路
（矢印は積分路の向き）

但し，（C）の場合には，極限操作（$\varepsilon\to 0$）をとることにって，虚軸に平行な成分の寄与は消える。以下，積分路の向きは図の（B）と（C）のようにとる（$\Gamma=-\gamma_{+}+\gamma_{-}$。添字の±は，積分路が実軸の上半分（$Imz>0$），下半面（$Imz<0$）であることを示す)。このΓを用いて，(2)は次のように変形できる：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{z}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\left(-\int_{\gamma_+}\frac{f(z)}{z}\,dx+-\int_{\gamma_-}\frac{f(z)}{z}\,dx\right)\\ &=\frac{-1}{2\pi i}\left(\int_b^a\frac{f(x+i\varepsilon)}{x+i\varepsilon}\,dx-\int_b^a\frac{f(x-i\varepsilon)}{x-i\varepsilon}\,dx\right)\\ &=\frac{-1}{2\pi i}\left\{\int_b^a\left(\frac{1}{x+i0}-\frac{1}{x-i0}\right)f(x)dx\right\}\end{aligned} \tag{3}$$

ここに，$\varepsilon\to 0$の極限操作において，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x+i\varepsilon}=\frac{1}{x+i0} \tag{4.1}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{x-i\varepsilon} = \frac{1}{x-i0} \tag{4.2}$$

と書いた。(4．1)は，1／zという正則関数が上半面から実軸に近付くときの原点における境界値，(4．2)は，下半面からのその境界値を象徴的に表したものである。こうして，$\delta(x)$は，(3)と(1)の対応から，

$$\delta(x) = \frac{-1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right) \tag{5}$$

と書ける（付録4．5）。このように，δ関数(一般に超関数)を実軸上の正則関数の境界値の差としてとらえることができる。(5)式の右辺の二つの成分は，結果として，$\delta(x)$を上半面へ解析接続できる部分と下半面へ解析接続できる部分に分解したものとみることができる。

(5)の表式が，Diracのδ関数の定義を満たしていることを直接示そう。即ち$x \neq 0$のとき，

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right) = 0$$

で，積分値は，$z=0$を避けたことによる半円からの寄与を計算して，

$$\frac{-1}{2\pi i}\int_b^a \left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right) dx = \frac{-1}{2\pi i}(-\pi i - \pi i) = 1$$

を得る。

(5)の表式を便宜的に

$$\delta(z) = \left[\frac{-1}{2\pi i}\ \frac{1}{z}\right] \tag{6}$$

と書き，(6)をδ関数の定義関数という。（4．1），（4．2)をそれぞれ$\delta_+(z)$，$\delta_-(z)$として，(6)を書き替える。

$$\begin{aligned}\delta(z) &= \delta_+(z) - \delta_-(z)\\ &= \delta_+(x+i0) - \delta_-(x-i0)\end{aligned} \tag{7}$$

更に，特殊な記号δの代わりに，より一般的に超関数の定義関数を，

$$\begin{aligned}F(z) &= F_+(z) - F_-(z)\\ &= F_+(x+i0) - F_-(x-i0)\end{aligned} \tag{8}$$

と表わせる。

(5)のδ関数の表式は，フーリエ変換からも確認できる。定数(関数)1のフーリエ変換(前章(4)式)は，

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} dt \tag{9}$$

であった。そこで次のように二つの積分区間に分ける：

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-itx} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-itx} dt\right) \tag{10}$$

ここに，$\lim_{\varepsilon \to 0} |e^{-itx}| = 1$だから，上式からは積分値は定まらない。そこで，$x$はパラメーターとして複素化（$z = x + iy$）する。指数部を陽に書くと，

$-itz = it\ (x + iy) = -itx + ty$

である。そうすると，(10)の第一項目は複素平面の上半面（$y = Imz > 0$）において，第二項目は下半面（$y = Imz < 0$）において，被積分関数は収束するので積分値が得られる：

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-itz} dt = \frac{-1}{iz}\left[e^{-itz}\right]_{-\infty}^{0} \to \frac{1}{i(x-i0)} \tag{11. 1}$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-itz} dt = \frac{-1}{iz}\left[e^{-itz}\right]_{0}^{\infty} \to \frac{-1}{i(x+i0)} \tag{11. 2}$$

(11)を(10)に代入すれば，

$$\delta(x) = \frac{-1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right) \tag{5}$$

を得る。(5)のフーリェ変換を行えば，再び，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, e^{-itx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0} \right) dx = 1$$

を得る（$e^{-it0}=1$）。

最後に，第二章で Dirac が挙げた δ 関数に関する式（(2)−(9)）を，上記の表示で解釈し直そう。(2)−(9)式に関する Dirac 説明は，いずれも(1)式の積分表示を通して行っているが，以下では δ 関数の定義式(5)あるいは定義関数(6)のみの変形によって説明される（但し，(7), (8)は除く）。

(2) 単位階段関数（$Y(x)$）の定義関数は[2]，

$$Y(x) = \frac{-1}{2\pi i}\,[Log\,(-z)]\ (Log\text{ は主値})$$

である。これを直接微分すれば，

$$\frac{dY(x)}{dx} = \left[\frac{-1}{2\pi i}\ \frac{1}{z} \right] = \delta(x)$$

(3)
$$\delta(-x) = \frac{-1}{2\pi i} \left(\frac{1}{-x+i0} - \frac{1}{-x-i0} \right)$$
$$= \frac{-1}{2\pi i} \left(\frac{-1}{x-i0} + \frac{1}{x+i0} \right) = \delta(x)$$

δ 関数が偶関数であることは，δ 関数のグラフから自明とされることが多い。本来は，超関数の偶・奇関数の定義なしには論じられないことである。

(4)
$$x\delta(x) = \left[z\,\frac{-1}{2\pi i}\ \frac{1}{z} \right] = \left[\frac{-1}{2\pi i} \right] = 0$$

定数（関数）は超関数として0とみなす。定義関数より，$F(x+i0) - F(x-i0) = 0$，即ち，境界値の差はでてこない。正則関数は境界値の差が生じないので，超関数としては0とみなす。

(5)
$$a\delta(x) = \left[\frac{-1}{2\pi i}\ \frac{1}{az} \right] = \frac{1}{a} \left[\frac{-1}{2\pi i}\ \frac{1}{z} \right] = \frac{1}{a}\,\delta(x)$$

(6) 次のように，$(z^2 - a^2)^{-1}$）を部分分数分解し，(2)を使う。

$$\delta(x^2-a^2) = \left[\frac{-1}{2\pi i}\ \frac{1}{z^2-a^2} \right]$$
$$= \left[\frac{-1}{2\pi i}\ \frac{1}{az} \left(\frac{-1}{z+a} + \frac{1}{z-a} \right) \right] = \frac{1}{2a} \left[\frac{-1}{2\pi i} \left(\frac{-1}{z+a} + \frac{1}{z-a} \right) \right]$$
$$= \frac{1}{2a}\,\{\delta(-(z+a)) + \delta(z-a)\} = \frac{1}{2a}\,\{\delta(z+a) + \delta(z-a)\} \qquad (9)$$

(9)
$$\frac{d(log\ x)}{dx} = \frac{d[log\ z]}{dx} = \frac{1}{z}$$
$$= \frac{1}{x+i0} = p.v. \left(\frac{1}{z} \right) - i\pi\,\delta(x)$$

（最後の等式について付録4参照）

5．結　語

固有値問題のフーリエ解析による解法は，量子力学の固有値問題のそれに繋がる。連続固有値の固有関数であるデルタ関数の説明を正則関数による方法で述べた。その記述はデルタ関数の諸性質を説明するのにより初等的，シュワルツ（L. Schwartz）流の汎関数法に比べて，である。

付録1．(7)式の導出とδ近似列

(7)式は言わば定義式であるから，ここでは(7)式を本論とは別の方法で示す。(7)式を引数の $\xi - x$ を新しく x とおく。

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}dt = \frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} e^{-itx}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2sinnx}{x}\right) = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{sinnx}{x}\right) \to \delta(x)$$

最後の矢印には，次の積分の結果が暗に含まれている。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{sinnx}{x}\right)dx = \pi, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx = 1$$

こうして，

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{sinnx}{x}$$

と書く。上記の他にも，$n\to\infty$のときδ関数に収束する関数（δ近似列）として，

$$\frac{n}{\pi}\left(\frac{sinnx}{x}\right)^2, \quad \sqrt{\frac{n}{\pi}}\,e^{-nx^2}$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2x^2}, \quad \begin{cases} \dfrac{n}{2} & |x| < \dfrac{1}{n} \\ 0 & |x| < \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

等，多数存在する。

付録2．規格化について

(4)において積分値が定まらないのは，積分区間を｛$-\infty$，$+\infty$｝に取っているからである。区間を有限におさえれば，発散は起こらない。e^{-itx}は周期関数であるから，次の周期的境界条件を課す：

$$\phi(x-1) = \phi(x+1)$$

即ち，

$$e^{-ip(x-l)} = e^{-ip(x+l)}$$

$$e^{ipl} = e^{-ipl} = 1, \quad \therefore pl = 2\pi n$$

積分区間として｛$-\infty$，$+\infty$｝の代わりに，$2l$の周期で積分すれば，(4)の規格化定数cとして，

$$c^2\int_{-l}^{l} dx = c^2 2l = 1, \quad c = \frac{1}{\sqrt{2l}}$$

を得る。三次元空間ならば，定数cは，

$$c = \frac{1}{\sqrt{(2l)^3}} = \frac{1}{\sqrt{V}}$$

と規格化される。ここに，Vは一辺$2l$の立体積である。

付録3．Diracのδ関数について

Diracは，奇抜な発想によって画期的な業績を数多く挙げている。それで，デルタ関数もDiracが初めて導入したかのように記述されていることがある。本文にあるように，δ関数の定義が不備であったことから色々と議論を呼んだ。そのことが，今日の超関数理論化の一つの動機になったことも確かなことである。明瞭なことは，本文で述べた連続固有値の固有関数の規格直交化に対してδ関数及びその記号を使用したのは，Diracが最初である。この導入は，離散固有値の固有関数の規格直交化に使うKronekerのデルタ記号との類推であろう。

電気工学者ヘヴィサイド（Heaviside）は，彼の名の付いた演算子法において，単位段階関数の微分がデルタ関数になる演算を行っていた。Dirac は，学生時代，電気工学を専攻していたので，その計算法に親しんでいたと思われる。しかし，その性質と規格化の問題とは直接結びつく訳ではない。そこを繋げたのは、やはり，Dirac の非凡さであろう。

付録4．δ関数の別の導出

（4．1），（4．2)式に関して，量子力学（特に，散乱理論や場の量子論）では，次の公式は既知である。

$$\frac{1}{x+i\,0} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{x+i\,\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{x}{x^2+\varepsilon^2} - i\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \right)$$

$$= p.v. \left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\,\delta(x) \tag{1}$$

$p.v.$ は，Cauchy の主値（principal value）である。同様にして，

$$\frac{1}{x-i\,0} = p.v. \left(\frac{1}{x}\right) + i\pi\,\delta(x) \tag{2}$$

を得る。これにより，(1)－(2)を作れば，

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x+i\,0} - \frac{1}{x-i\,0} \right) = \delta(x) \tag{3}$$

(1)と(2)を作れば，

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+i\,0} + \frac{1}{x-i\,0} \right) = p.v.\ \frac{1}{x} \tag{4}$$

を得る。このように，δ関数の理論化に正則関数を用いる方法は既知であって佐藤が初めてという訳ではない。しかし，超関数の一般論まで含まれているその方法で定式化に成功したのは佐藤が最初である。

付録5．一変数佐藤超関数の定義

記号の説明

Ω	実数R（実軸）上の開集合
U	複素平面C上の開集合（R⊆C）
U－Ω	開集合Uから実軸Ωを除いた集合
O(U)	U上の正則関数の空間
O(U－Ω)	U－Ω上の正則関数の空間

［定義］Ω上の佐藤超関数の空間B(Ω)は，商空間 B(Ω)＝O(U－Ω)／O(U) である。その空間の元（要素）を超関数という。

関数1／z を例にとると，$z=0$（実軸上の原点）を除いて正則，1／z　O(U－Ω)，である。定義式において，O(U)で割ってあるのは，O(U)の元(正則関数)対して，その実軸上での境界値の差はゼロとなるからである。例えば，正則関数 $f(z)$，$g(z)$ として，

$$F = \frac{1}{z} + f(z),\quad G = \frac{1}{z} + g(z)$$

を作っても，結局，正則関数は超関数としてはゼロだから，

$$F = G$$

である。こうして，1／z がδ関数の定義関数(代表元)と見なせる。

文　献

1) P. A. M. Dirac, "The Principles of Quantum Mechanics", 4-th edition, 1958, Oxford Univ. Press, in particular, §15, 16
2) 金子　晃, "超関数入門上" 1980, 東京大学出版会

(平成3年9月11受理)