

数学教育方法の改善の試み(2)

— 重積分 —

小 鹿 正 夫* 上 木 政 美* 藤 島 勝 弘**

A Trial on the Development of Teaching Method in Mathematics —Multiple Integral—

Masao KOSIKA and Masami UEKI and Katsuhiko FUJISHIMA

要 旨

従来、重積分を講義する際、定義および具体的な図形について黒板等に図示することは、かなり困難であった。教育効果を高めるべく、我々はコンピュータグラフィックスを使ったVF（ビデオフロッピーディスク）教材を開発した。本稿ではその内容、講義実践を報告する。

Abstract

In the lecture of multiple Integral, it has long since been quite difficult to present its definition and the concrete figure of it on the blackboard.

In order to present it to the students effectively, the authors devised the teaching material of video floppy discs using computer graphics.

In this paper, the authors report the details of the device and the results of the lectures practised in the classes.

1. は じ め に

本校では教育方法の改善を目的に施設設備の整備が行われてきた。その第一歩はパーソナルユーズであるパソコンを一斉授業の教具に利用する試みである。パソコンの画面を大型プロジェクターで中央のスクリーンに投影し黒板とチョークに代えることであった。このために開発された示範教育システム MIPP¹⁾ は CAI 室に設置され情報処理の授業をはじめいくつかの講義で効果をあげることが出来た。その後、MIPP は LL 室にも設置された。

数学では1年生「関数とグラフ」単元、3年生「偏微分」単元に MIPP の利用を試み、「関数とグラフ」は成果を得た²⁾。しかし、MIPP はパソコンの画面をダイレクトに中央のスクリーン

に投影し、講義の展開をパソコンで管理する方式のため、描画に時間がかかる2変数関数の曲面のような教材の利用には不向きであった。次に完成したグラフのみをビデオ映像として録画しTVで利用することを試みた。TVには大きさに限界があり大型スクリーンに比べると、学生が一斉に見るには小さすぎる。また、ビデオ信号（NTSC）に変換して記憶するため映像の劣化は避けられない等の問題点があったが、グラフ化のソフトを組むにあたって、線を太くする、パソコンの文字は拡大して使う等の工夫を行えば十分TVでも利用できることが確かめられた。ビデオテープより、静止画を記録するビデオフロッピーディスク（以下VFと略記する）に録画した方が操作性の点で優れていることが確かめられた。パソコンのグラフをビデオ化することにより、教室でも手軽に利用できるVF教材が得られた。教育方法改善の次の段階としてこのようなVF教材を含めビデオ教材が教室で利用できるように整備された。

* 一般教科 助教授

** 一般教科 講師

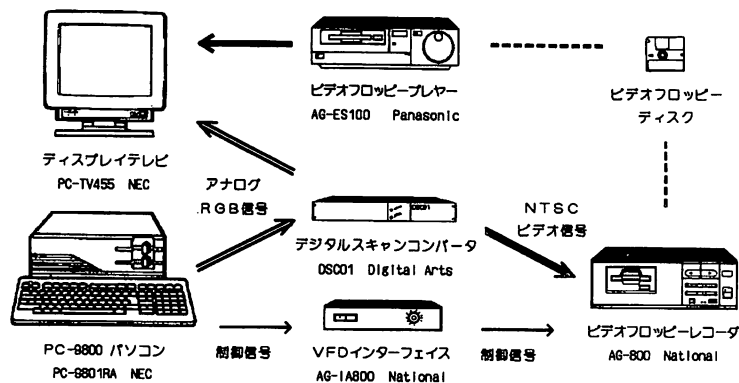


図1：VF教材作成システム構成図

またビデオ教材システムを備えた教材作成室も設置された。

その後、パソコンの高速化、VFの高速再生、変換器の高品質化など機器の進歩に著しいものがあった。教材作成時間の短縮、操作性、画質の向上により、VF教材はより利用し易くなった。今回はこの点を考慮し重積分教材を作成し、これを利用した講義を行ったのでこの結果を報告する。更新された機器による教材作成システムについても報告する。

2. 教材作成

2.1 VF教材システム

我々は以前に2変数関数のグラフの立体図をパソコンのグラフィックを利用して作成し、これをVF（ビデオフロッピー）に録画して静止画教材を作成した³⁾。このシステムを静止画教材作成システムとして紹介した。その後に機器の進歩はめざましく、新しい機器に順次置き換えてきた。このことにより、改善した点を中心に紹介する。また、このシステムの利用法を述べる。図1はシステムの構成図である。

再生専用のVFP（VFプレーヤー）が市販されVFを高速で連続提示できるようになった。この2変数関数の静止画教材を10コマ/秒の高速再生すると立体図はアニメーションの動きになり、グラフをより立体的に把握できるようになった。

次にPC-9801のアナログRGB信号をビデオ信号（NTSC）に変える変換器である。以前の変換器に比べちらつきが無くなった。VFにフィールドモードで録画出来るようになり、今まで倍の

50枚録画できるようになった。色ズレが少なくなりカラーが使えるようになった。

32bitパソコンの利用により演算速度が向上した。また、Basic以外のプログラム言語でもグラフィック機能を備えたものが開発された。グラフィックの作成時間が大幅に短縮した。

以上のようなハード面の改善により、静止画教材がアニメーション的に利用できるようになった。アニメーションの利用を目的にして作成した静止画教材をVF教材と呼んで単に静止画を並べたものと区別することにした。

VF教材作成の手順を要約すると次のようになる。

パソコンを用い立体図のグラフ化ソフトを作る。



パラメータによりグラフが少しずつ変化するようにする。



ソフトにVFR制御プログラムを組み込み、VFに連続自動録画する。



VFを高速再生し立体感などが得られたことを確かめる。

パソコンのグラフを1枚1枚見るとアニメーション的に見るのではかなりイメージが違う。アニメーション的に見る方がシンプルな映像で表現が可能になる。余分な線、色の使い方など実際に出来上がったものを見て手直しすることが必要である。この作成作業は自動的に進められ、時間は1時間程度で済むようになったので、手直し作業が苦にならなくなった。

このシステムの最大の特徴はVFR(VFレコーダー)をパソコンで制御できる点である。VFDインターフェイスアダプターはセントロ仕様でパソコンからVFRの制御コードを受け取りVFRを制御する。パソコンが1枚のグラフを描き終えたならば録画するという繰り返し作業を自動的に行ってくれる。図2はTurbo Pascalで作成したVFR制御プログラムリストである。

```
Procedure counter(RIND : INTEGER) ;
(* VFR制御手続き *)
var
  i : integer ;
  s1 : string[1] ;
  b_i : string[2] ;
  wr : string[5] ;
  lst : text ;
begin
  Assign(lst, 'Prn') ; Rewrite(lst) ;
  i := Rind + 1 ;
  if i < 10 then begin
    str(i : 1, s1) ;
    b_i := '0' + s1 ;
    end
    else str(i : 2, b_i) ;
  wr := 'W0R' + b_i ; {番地指定}
  writeln(lst, wr) ; {再生指示}
  Delay(3000) ;
  Writeln(lst, wr) ;
  Writeln(lst, 'W0C04') ; {消去指示}
  Delay(5000) ;
  Writeln(lst, 'W0C05') ; {録画指示}
  Delay(3000) ;
  Writeln(lst, 'W0C06') ; {スルー切換}
  Close(lst) ;
end ;
```

図2 : VFR 制御プログラムリスト

2. 2 重積分教材ソフトの開発

2重積分は2変数関数の曲面と領域Dから作られる立体の体積を考えることから始まる。立体図は学生がノートに写し易いように座標軸、立体の

VF	内 容	グラフ
1	$\int_a^b \left\{ \int_{g(x)}^{f(x)} F(x,y) dy \right\} dx$ (目的) 累次積分の説明 (動き) 断面がx軸方向に移動	図7
2	$\int_c^d \left\{ \int_{k(y)}^{h(y)} F(x,y) dx \right\} dy$ (目的) 累次積分の説明 (動き) 断面がy軸方向に移動	図4
3	$F(x,y) = xy, D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases}$ (目的) 累次積分に直す例題 (動き) 断面がx軸方向に移動	図8
4	3に同じ (目的) 累次積分に直す例題 (動き) 断面がy軸方向に移動	図9
5	$F(x,y) = xy, D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$ (目的) 累次積分に直す例題 (動き) 断面がx軸方向に移動	図10
6	5に同じ (目的) 累次積分に直す例題 (動き) 断面がy軸方向に移動	図11
7	$\iint_D F(x,y) dxdy$ (目的) 2重積分の定義の説明 (動き) 柱体が小領域上を移動	図13
8	7に同じ (目的) 2重積分の定義の説明 (動き) 柱体が小領域上を積算	図14
9	$\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dxdy$ $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ (目的) 立体の体積例題－極座標 (動き) 断面がz軸中心に回転	図15
10	球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ と 円柱 $x^2 + y^2 = a^2$ で囲まれた立体の体積 (目的) 極座標の2重積分 (動き) 断面がz軸中心に回転	図5

図3 : VF教材一覧表

輪郭, 必要最低限の補助線にとどめ, 教科書と同じような図にした。線の数が少ないが座標計算はしっかり行った。空間座標を求め, 1 次変換で平面座標に変換してグラフを描いた。この変換について詳しくは参考文献⁴⁾を参照いただきたい。陰線処理は時間がかかるためしなかった。線を描く順序に気をつけることで対処した。領域 D は青で統一した。断面, 柱体はいろいろカラーを変えてみた。VF 教材システムを使い, 立体を表す VF 教材を作成した。

プログラム言語は Turbo Pascal ver 5.5 を使用した。理由はグラフィック機能(文字を含めて)が整備されていること, Basic 言語からの移行が簡単なこと, 実行速度が速いことである。

図 3 は重積分の講義のために作成した VF 教材の一覧表である。図 4, 図 5 は VF 教材に納められたグラフの一部である。図 5 は TV に提示したものである。

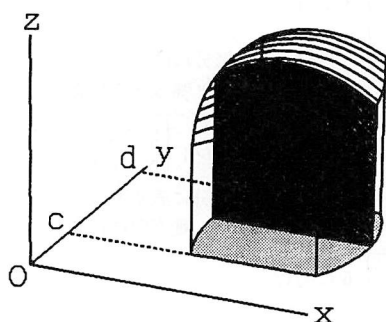


図 4 : 立体の断面の移動 (VF 教材 2)

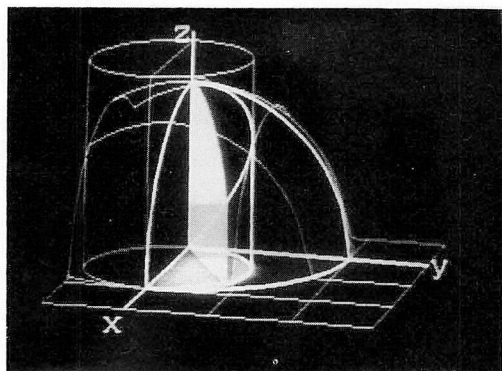


図 5 : 立体の体積例題 (VF 教材 10)

3. 講義展開

2 重積分の講義は土木工学科と電気工学科の 3

年生を対象に LL 室で行った。担当はそれぞれ小鹿と藤島である。LL 室は中央に大型プロジェクター, 学生ブースには 8 インチ TV が設置されビデオ教材を利用できるようになっている。更に, 液晶プロジェクターを持ち込み中央スクリーンと並べてサブスクリーンを追加設置した。

土木工学科の講義を中心にして説明をする。講義は教科書⁵⁾に沿って進め, 用意した VF 教材は教科書の補助教材として利用した。印刷教材は特に用意しなかった。講義は 2 時間続きの講義を 3 回行った。

第 1 回「累次積分とその計算」

指導の重点: 体積は 2 回の積分で求める。

2 重積分は 2 変数関数 $z = F(x, y)$ と領域 D で作られる図 6 のような立体の体積 V を求めることから始まる。

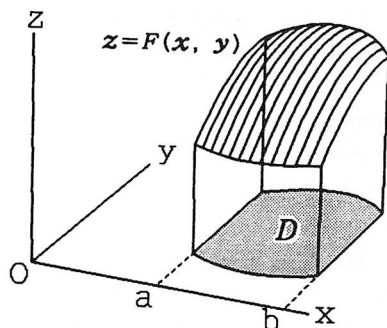


図 6 : 立体図

この体積 V が次の式から求められることを示し, 累次積分を導く。

$$V = \lim \sum_i S(x_i) \Delta x_i \quad (1)$$

$$= \int_a^b S(x) dx \quad (2)$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_{g(x)}^{f(x)} F(x, y) dy \right\} dx \quad (3)$$

ここで $S(x_i)$ は x 軸に垂直な平面 $x = x_i$ で立体を切ったときの切り口の断面積である。

我々はこれらの式の説明に VF 教材 1 を使った。この VF 教材には立体を平面 $x = x_i$ で切ったようすを示す立体図(図 7)が平面 $x = x_i$ の位置 x_i を a から b まで少しずつ変えて 25 枚録画されている。図 7 は VF 教材に納めた立体図の一部である。

この VF 教材を次のように使い, 式の説明を

行った。中央のスクリーンを使い、VFをゆっくり再生し立体を平面で輪切りにしていく様子を説明した。図7の中段の映像とその次の Δx_i だけ移動した映像を交互に表示し、輪切りにした部分の体積が $S(x_i)\Delta x_i$ であることを確かめた。次にVFを高速再生しアニメーション的に立体図を表示し、断面を加えると体積になることを示した。このようにして、式(1)、(2)を説明した。次に式(3)の説明に移り、図をゆっくり移動し、断面の移動にともなう領域 D が y 軸に平行な線分で分けられていくこと。また、この線分の長さが変化

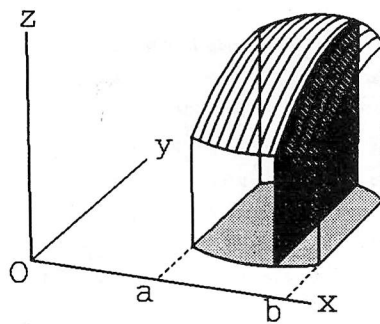
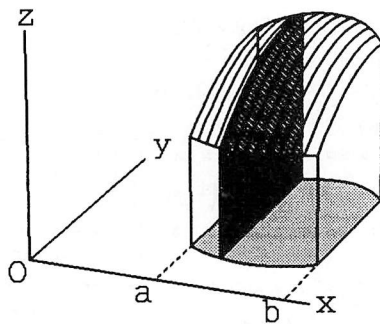
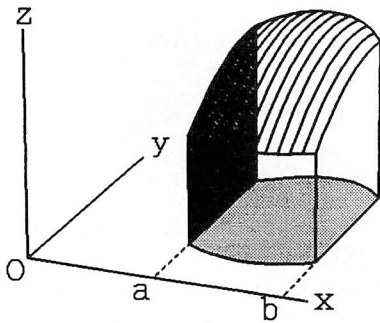


図7：立体の断面移動（VF教材1）

することを確かめた。図を静止し断面 $S(x)$ は y 軸に平行な直線に沿っての定積分になることを復習し、定積分の上端、下端が x の関数になることを説明した。以上のようにして2回の積分で体積が求められことを視覚を通して説明した。

例題を説明したのちVF教材3(図8)、4(図9)、5(図10)、6(図11)を使い累次積分の作り方を確認した。また、 y 軸に垂直な平面で切った場合も同じ結果が得られることを説明し演習に移った。演習では定積分の計算でつまづく学生が多く、累次積分への直し方まで進めなかった。

放送講座⁶⁾のビデオ教材なども参考にして、十分準備をし、講義に挑んだのであるが、このような講義の形態は初めてでありVF教材と黒板とを組み合わせた使い方が思うようできなかった。また、学生にも戸惑いがありノートをとれなかったようである。ただ、教材を見ただけで終わってしまったようだ。

演習でビューアー(教材提示装置)を使い、紙に鉛筆で手書きしたヒント、解答をスクリーンと学生のブースTVに表示したがスクリーンの映りが良くなり不評であった。

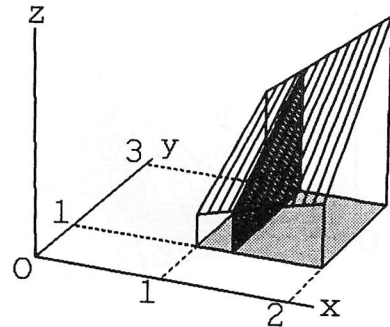


図8：累次積分例題（VF教材3）

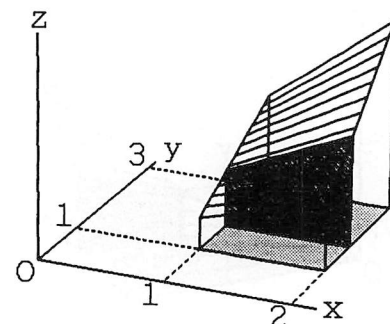


図9：累次積分例題（VF教材4）

第2回 その1「積分順序の変更」

指導の重点：領域のとり方，累次積分の作り方
 前回積み残した問題を解き累次積分の作り方の復習をした。例題の VF 教材 5 (図10)，6 (図11) を使い，断面と領域 D の交わった部分に着目し，そのような調べさせた。そして， xy 平面上の領域 D で考えれば良いことを示した。領域 D を次の不等式で表現すれば，累次積分が作れることを説明した。

$$D: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases} \quad \text{ならば}$$

$$V = \int_a^b \left\{ \int_{g(x)}^{f(x)} F(x, y) dy \right\} dx \quad (4)$$

$$D: \begin{cases} c \leq y \leq d \\ k(y) \leq x \leq h(y) \end{cases} \quad \text{ならば}$$

$$V = \int_c^d \left\{ \int_{k(y)}^{h(y)} F(x, y) dx \right\} dy \quad (5)$$

また，積分順序の変更は領域 D の表現を変えることと同じであることを導いた。

例題を説明したのち演習に移った。考え方は理解できているようであるが，領域を直せなく苦労していた。予め用意しておいた静止画教材(図12)

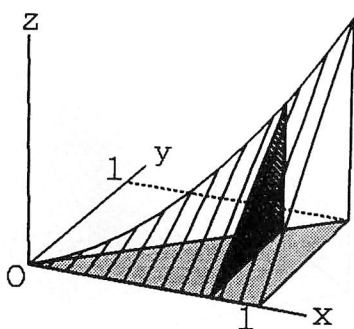


図10：累次積分例題 (VF 教材 5)

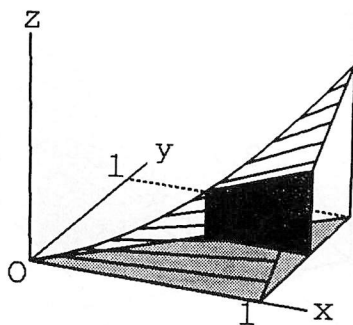


図11：累次積分例題 (VF 教材 6)

の略解をブース TV を通して見せた。このようなヒントを提示しながら演習を進めた。この静止画教材は TeX⁷⁾ を使い作成し，MIPP で利用できるようにしたものである。

第2回 その2「2重積分の定義」

指導重点：定義と累次積分の関係

2重積分の値は累次積分で求める。そこで，2重積分の定義と累次積分とを混同してしまうことが多い。2重積分の定義は次の式である。式で表せば違いは明白であるが，これを説明するのは簡単なことでない。毎回説明に苦慮していた。

$$V = \lim \sum_i F(x_i, y_i) \Delta S_i \quad (6)$$

$$= \int_D F(x, y) dS \quad (7)$$

$$= \iint_D F(x, y) dx dy \quad (8)$$

ここで， S_i は領域 D を分割して得られた小領域 D_i の面積である。

定義の説明は，VF 教材 7 (図13) を使い， D を分割した小領域 D_i 上に柱体を考え，この柱体が D 上を移動することを示し，VF 教材 8 (図14) を使い，この柱体で立体を埋めつくすようすを示した。これにより式(6)を説明した。次に VF 教材

問 4. (2) $\int_2^3 \int_{2x}^{3x} F(x, y) dy dx$ の順序変更

(略解)

$$i) D: 2 \leq x \leq 3, 2x \leq y \leq 3x$$

$$ii) D_1: 4 \leq y \leq 6, 2 \leq x \leq \frac{1}{2}y$$

$$D_2: 6 \leq y \leq 9, \frac{1}{3}y \leq x \leq 3$$

$$iii) = \int_4^6 \int_{\frac{1}{2}y}^2 F(x, y) dx dy + \int_6^9 \int_{\frac{1}{3}y}^3 F(x, y) dx dy$$

(方針)

i) から ii) を導く
 領域 D を図にして
 みる
 $x = 2 \rightarrow$ 直線
 $x = 3 \rightarrow$ 直線
 $y = 2x \rightarrow$ 直線
 $y = 3x \rightarrow$ 直線

問 4. (2) $\int_2^3 \int_{2x}^{3x} F(x, y) dy dx$ の順序変更

(略解)

$$i) D: 2 \leq x \leq 3, 2x \leq y \leq 3x$$

$$ii) D_1: 4 \leq y \leq 6, 2 \leq x \leq \frac{1}{2}y$$

$$D_2: 6 \leq y \leq 9, \frac{1}{3}y \leq x \leq 3$$

$$iii) = \int_4^6 \int_{\frac{1}{2}y}^2 F(x, y) dx dy + \int_6^9 \int_{\frac{1}{3}y}^3 F(x, y) dx dy$$

領域 D の図

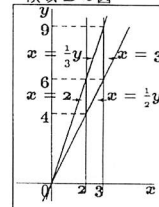


図12：例題のヒント，略解 (静止画教材)

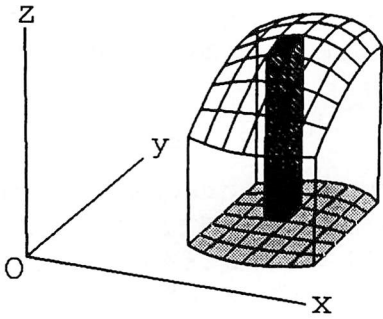


図13：小領域上の柱体の移動（VF 教材 7）

1 (図 7) と VF 教材 8 (図14) を並べてスクリーンに表示し、その違いを目で確かめた。

前回の反省から、プロジェクターを使うときは、暗くし、白板を使うときはカーテンを開けさせ明るくし、説明の区切りを明確にした。この教室に設置してある示範教育システム MIPP を利用し演習時間を有効に使うことを心かけた。

教材の扱い方もなれ、2重積分の定義ではかなりの時間をかけ、思うとおりの説明ができた。学生も真剣に聴いてくれたようであるか。しかし、説明後直ちに2重積分の定義と累次積分の関係を書かせたところ、2重積分と累次積分を取り違えたもの、断面と柱体の違いを強調したものなども多くいた。これは視覚に訴える場合に、想像する余地が少なくなり、正確に伝わることは確かであるが、不適切なものも修正が効かず不適切なまま伝わった為と考えられる。このような教材には一層の正確さが必要であり、また、文字を使いまめをすることが必要であることを痛感した。

第3回「極座標と2重積分」

指導の重点：領域 D を半直線で切る。

2重積分の定義を復習し、領域 D を x 軸、 y 軸に平行な直線で小領域 D_i に分けるとその面積は

$$\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i \quad (9)$$

で表され、2重積分の定義の式(8)の $dx dy$ 型の累次積分になることを確認した。次にこの領域 D を極座標で切る方法を説明し、

$$\Delta S_i = \Delta r_i \cdot (r_i \Delta \theta_i) \quad (10)$$

を導いた。VF 教材 9 (図15) を使い、極座標の累次積分は平面 $\theta = \theta_i$ が回転しながら立体を切っていくことを示し、領域 D は扇型に分割されることを確かめた。

極座標の累次積分を2重積分の定義から次の式

にしたがって導いた。

$$V = \lim \sum_i F(x_i, y_i) \Delta S_i \quad (1)$$

$$= \iint_D F(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad (12)$$

$$= \int_a^b \int_{g(\theta)}^{r(\theta)} F(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad (13)$$

講義も3回目になり、教える側も教わる側もなれてきてスムーズに講義が進むようになった。演習はヒント、略解を提示しただけで、ブース TV を見ながらどんどん問題を解くようになった。

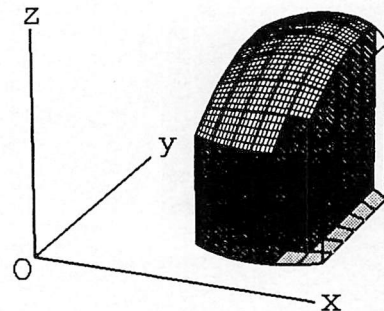
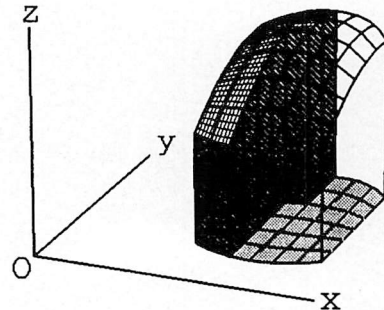
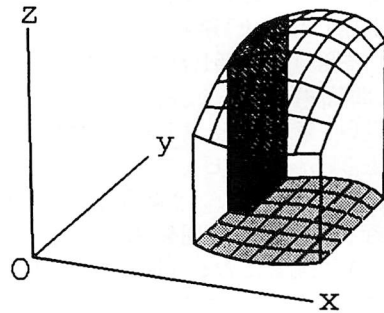


図14：柱体の積算移動（VF 教材 8）

遅い学生にあわせて進めたが予定時間内に終わることができた。速い学生はこの後の演習問題に挑戦していた。

電気工学科では、全部で6回の重積分の講義の中から、2回目と4回目の2度をLL室で行った。1度目は、始めに重積分の計算方法をビューアとVF教材を用いて説明した。まず準備として、説明用の図を紙に書いておいた。色をつけたりしながら、黒板に書くよりも理解しやすいように心がけた。講義では、この図をビューアを用いて大型プロジェクターで写しながら、黒板に計算式を書いて説明した。また、途中でVF教材1(図7)、2(図4)を用いて、説明したことを確かめさせた。その後、問題演習を行った。例題を説明したあと、各自に問いを解かせた。数名の学生に答えを紙に書いてもらい、それをビューアを用いてブースTVに映して解答とした。2度目は、問題演習を中心に行った。各自が問題を解いて、その解答をブースTVで確認しながら進んでいった。解答を映している時間以外には、ヒントを映すなどし

てできるだけ全員が正解にたどり着けるように工夫をした。また、途中でVF教材9(図15)を見せて、極座標系による重積分の計算を説明した。

4. ま と め

我々は、はじめ、このVF教材を教室のTVを使い、チョークと黒板で表現できない部分の補助教材として利用することを考えていた。パソコンのグラフィックソフトの開発にあたり、グラフの内容、断面の移動のしかたなどに注意を払い作成した。その結果、この教材を公式の説明などに積極的に利用できる自信を得た。また、VF教材システムにより効率よくVFを作成でき、重積分単元に必要な教材をそろえることができた。ビデオ関係の設備が整ったLL室を使い、このVF教材を積極的に利用した講義を行った。

VF教材の動きのある映像によって、重積分の定義及び Σ 計算の考え方など、チョークと黒板や印刷物では表現できなかった部分を、目で確かめながら時間をかけて説明できた。また、領域と累次積分の関係を立体的に捕らえながら導くことができた。この意義は大きかった。

2重積分の定義と累次積分の関係を2つのスクリーンを使い比較して、その動きから説明した後、この関係を書かせて提出させた。結果は次の通りであった。

- 理解できている。…………… 11%
- 理解できているようであるが、適切に表現できない。…………… 28%
- 理解できていないが、イメージは捕らえられているようである。…………… 33%
- その他 …………… 28%

VF教材はイメージ作りに良いが、これだけでの説明では定着が難しいことがわかった。また、視覚に直接訴える教材は効果が大きいのでより正確さが要求されることもわかった。VF教材の使用にあたっては、この点に注意しなければならない。

VF教材は教室を暗くして利用する。このとき、黒板は利用できない。しかし、この2つを同時に使うよりは、VF教材はイメージ作りに、黒板はイメージの定着にと、分けて利用した方が学生の混乱も少なく効果的であることがわかった。

演習はブースTVに提示されたヒントを見ながらまず自分で解くことをさせた。黒板をノートに写すことになれている学生にとって、はじめは戸惑いもあり解答を写す時間が少ないと不満の声

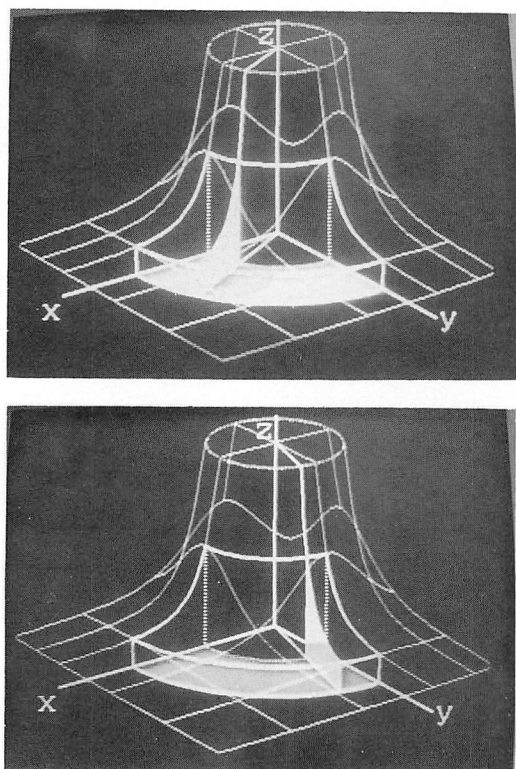


図15：立体的断面の回転移動(VF教材9)

もあったが、段々慣れてきて自分で問題を解くようになった。

VF教材の利用は、式とことばによる説明に動きのある映像が加わった分、興味を持って説明に耳を傾けてくれたようである。「まず物があって、次に説明がある。」という感覚が工学系の学生の特徴だとすれば、VF教材はうってつけの教材である。映像を通して視覚に訴え、直感的に把握させることは、学生が興味をもって問題に取り組む第一歩であり、この後、必ず文字を使いまとめを行う必要がある。曖昧な部分を整理し、問題を解けるようになったとき、はじめて学生は満足する。また、問題を解くことが出来なければ急速に興味を失っていく。重積分の講義を通して、視覚に訴えるようなVF教材と、正確さを記述できる黒板を有効に結び付けて使う大切さを痛感した。

AV機器を取り入れた今回の講義で、日頃、黒板をノートに写すだけで満足している学生が多い中で、興味を示し、演習問題に積極的に取り組む学生が明らかに増えた。このことだけでもこの講義が有効だったことが伺える。VF教材は、教える側がチョークと黒板で説明しきれない部分を補う為だけの補助教材以上の効果があげられた。

参考文献

- 1) 中津正志・高橋達男：パーソナルコンピュータを用いた示範システム，精密機械，第51巻10号（1985）
- 2) 上木政美：パーソナル・コンピュータによる示範数学教育の試み(1)，苫小牧高専紀要第22号（1987）
- 3) 伊藤治男・小鹿正夫：教育方法の改善の試み（教材作成システムの開発），苫小牧工業高等専門学校紀要第23号（1988）
- 4) 伊藤直基・伊藤貢司：3Dスーパーグラフィックス，秀和システムトレーディング(1986)
- 5) 矢野健太郎・石原繁編：微分積分，裳華房（1984）
- 6) 前原昭二：基礎数学I（ビデオ教材），放送教育開発センター・放送大学学園（1988）
- 7) L. Lamport, *LaTeX: A document Preparation System* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1985

（平成3年11月30日受理）

