構造安定解析における確率論的一考察

澤 田 知 之*・能 町 純 雄**

A note on stability Analysis of Structural Reliability

Tomoyuki SAWADA and Sumio G. NOMACHI

要 旨

本稿では，構造物の確率論的解析における基本的考察を外力と応力の関係から定式化を行ったものである。

Abstruct

In this paper, the classical theory of structural reliability is discussed. The failure probability is formulated by assuming statistical independence between load and strength.

1. ま え が き

構造解析を行う際，力のつり合い方程式が基本となることは言を待たない。しかしそのつり合い式における各項の値が厳に正確にわかっている又は確定的特性を持つ変数であるということはきわめて少ないと考えられる。ある橋梁における一部材が同質の鋼材から成っているかもと言ってその部材（橋梁構造の一部分）のみの標本による弾性係数をすべてに当てはめるのは“不確かさ”（ランダム性）を解析に取り入れている事である。地震，風荷重又は海上で船体の受ける荷重，飛行機胴体上の一点でのジェットノイズ圧力と翼の振動など一般に外力等，構造解析における不確定量はかなり多いと考えられる。

本稿では，構造物の破壊を確率論的に検討する手はじめとして基本的な考察を試みるものである。

2. 破壊確率の公式化

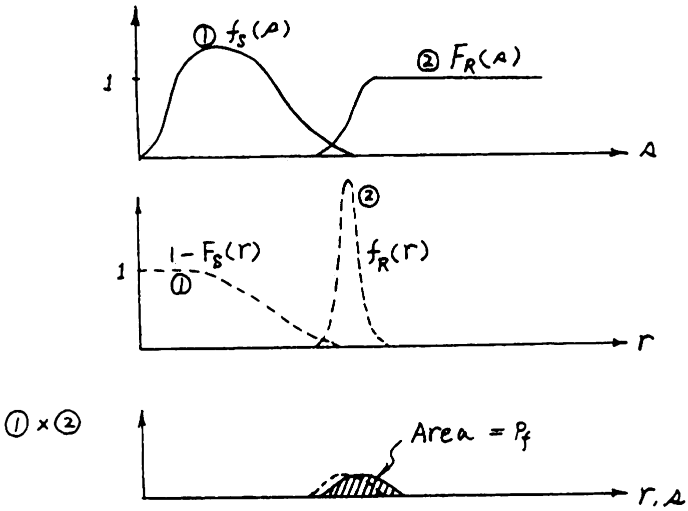
ここで，RとSを各々ランダム変数として抵抗力（反力）と荷重（外力）とすると確率論より破壊の確率は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} P_f = P(R \leqq S) &= \int_0^\infty f_S(s)\,F_R(s)\,ds \\ &= \int_0^\infty [1 - F_S(r)]\,f_R(r)\,dr \qquad (1) \end{aligned}$$

ここで，RとSは負を取らないものとする。(1)式において $f_S(s)$ - $F_R(s)\,ds$ の項は荷重（外力）はSと増分を考えた S + dS との間にあり，構造物の反力はSより小さい，つまり荷重（外力）がSとS + dSの間で構造物は破壊するということになる。よって，(1)式はこのSのすべての確率の和が構造物の破壊確率であるということをになる。

* 土木工学科 助教授
** 北海道大学 名誉教授

同様に(1)式の，$[1-F_S(r)]\,f_R(r)\,dr$ の項は，構造物の反力は r と増分を考えた r + dr の間にあり荷重は，この r より大きく作用する。故に逆から見て構造物の破壊確率はこの r と r + dr の間にあるとも言える。このことは，(1)式の上下の式は互いに同一のことを述べており一方を積分することにより他方も知り得ることとなる。これら $f_S(s)$，$F_R(s)$，$1-F_S(r)$ や $f_R(r)$ を図で示すと図－1のように示される。



図－1

次に破壊確率の解釈として $F_R(r)$ という静的分布をする反力を持つ構造物の数を N とする。

そこに $F_S(s)$ なる静的分布を持つ N 個の荷重を考える各々，勝手にこれら荷重と反力を組み合わせる。するとある N_f 組みにおいてその構造物の耐荷力を上回る荷重が作用したとすると，その破壊確率は

$$P_f=\lim_{N\to\infty} N_f/N \tag{2}$$

と示される。

構造確率論では構造物の安全率 ν は以下の(3)式のように設計力（応力）r_0 と設計荷重 S_q との比で表わされる。

$$\nu=r_p/s_q \tag{3}$$

これは確率論的に設計するには都合のよい式となっている。すなわち，

$$P=P\{R\leqq r_p\} \quad (4) \qquad q=p\{S>s_q\} \quad (5)$$ とおく。

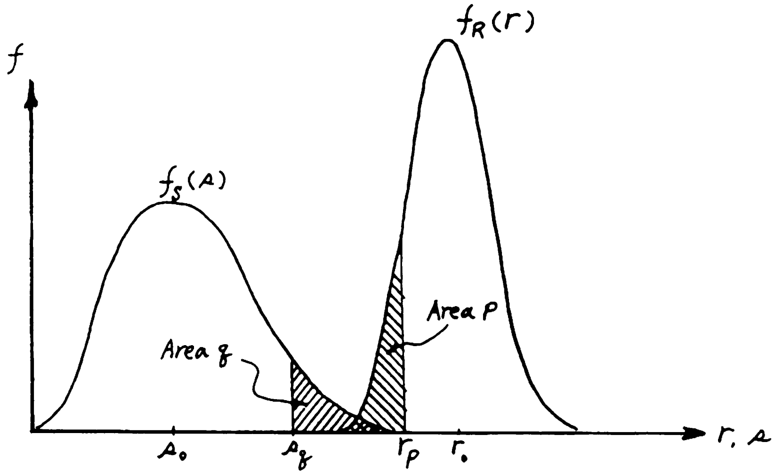
次に，R_0 と S_0 を各々 R と S との中央値（又は平均値）とし，以下の(6)(7)のように置くと，

$$r_p=\alpha\, r_0 \quad (6) \qquad s_q=\beta\, s_0 \quad (7)$$

安全率の中央値 ν_0 は次のように示される。

$$\nu_0=r_0/s_0 \tag{8}$$

設計計算においては，通常 $\alpha<1$ 及び $\beta>1$ つまり $\nu<\nu_0$ である。これらの値を図に示すと図－2のよ



図－2

うに示される。

もしRとSの分布が与えられれば，破壊確率は安全率の中央値ν_0の関数として計算できることになる。確率変数pとqを基に設計変数r_pとs_qを決めることによって破壊確率P_fと設計安全率νが求め得る訳である。今例として，反力（R）と荷重（S）と各々の平均値$U_R = r_0$と$U_S = S_0$及び各々の標準偏差値Γ_RとΓ_Sを仮定すると構造物のモーメント値は各々RとSの関数として次の様に求められる。

$$M_R(\theta) = \exp(r_0\theta + \sigma_R{}^2\theta^2/2) \tag{9}$$
$$M_S(\theta) = \exp(u_S\theta + \sigma^2{}_S\theta^2/2) \tag{10}$$

以下のような差をZとおくと統計学上から$Z = R + S'$

$$Z = R - S \tag{11}$$

（$S' = -S$）と置き直すことができる。ここでS'はガウスの分布より決定される。つまり平均値$E\{S'\} = -E\{S\} = -U_S$であり標準偏差は$\sqrt{E\{S' + U_S\}^2} = \sqrt{E\{S - U_S)\}^2} = \sigma_s$となる。

従って，$M_{S'}(\theta) = \exp(-\mu_S\theta + \sigma^2{}_S\theta^2/2)$ (12)
となり，故に，

$$M_Z(\theta) = M_R(\theta)\cdot M_{S'}(\theta) = \exp[(\mu_R - \mu_s)\theta + (\sigma_R{}^2 + \sigma_S{}^2)\theta^2/2] \tag{13}$$

となる。(12)式はZも又，ガウス分布を呈し(14)式と表わされる。

$$F_Z(Z) = \Phi((Z - \mu_Z)/\sigma_2) \tag{14}$$

ここで，$\mu_Z = \mu_R - \mu_S$ (15) $\sigma_Z = \sqrt{\sigma_R{}^2 + \sigma_S{}^2}$ (16) である。

関数Φは，正規ガウス分布であるので破壊確率P_fは次のように定義される。

$$P_f = P\{R \leqq S\} = P\{R - S \leqq 0\} = P\{Z \leqq 0\}\ F_Z(0) \tag{17}$$
$$P_f = \Phi(-\gamma)$$

ここでγは安全指標とも呼ばれ以下のように示される。

$$\gamma=\mu_Z/\sigma_Z=(\mu_R-\mu_S)/\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2} \tag{18}$$

上記(18)は静的安全率の逆数を示しこの安全指標の定義はRzhanitsynにより次の様に表わされた。

$$\gamma=\mu_Z/\sigma_S=(\mu_R-\mu_S)/\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2-2\,\mathrm{Cov}\{R,S\}} \tag{19}$$

(19)式は，一般にRとSが非ガウス分布か，静的変数によって決定される場合に用いられる。

参考文献

(1) Y・Kリン，構造動力学の確率論的方法，培風館，1974.

(2) Comittee on Structural Safety of the Administrative Comitlee on Analysis and Design of the Structural Division, "Structural Safety-A Literature Review", ST4, April, ASCE, pp.845–884, 1972.

（平成4年11月27日受理）