応用数学の教材作成 I
— ラプラス変換の基礎編 —

石　　信　一*・中　野　　渉**

Studies of teaching materials in Applied Mathematics　I
— Elements of Laplace Transformation —

Shin-ichi ISHI, Wataru NAKANO

要　旨

ラプラス変換の定義及びその性質について解説した。初等的な例題と解を示した。

Abstract

This paper explains the Laplace transformation and its definition and properties. Preliminary examples and their solutions are shown due to practical training.

0．はじめに

平成3年度の高等専門学校教員研究集会（世話校 — 秋田高専）の第一班において，高等専門学校教育の内容及び方法の改善について研究・討議された。その中で，専門基礎系（応用物理学，応用数学，情報処理）が，とりわけ重要視された。換言すれば，専門基礎系と専門科目との有機的結合を強調したものであった。

本論執筆の動機は，その研究集会の主旨に触発されたものである。しかし，本稿の目的とするところは，専門科目との有機的結合をめざすというものでなく，まず，応用数学として必要な教材の選択をめざすものである。

応用数学がどのような分野をカバーすべきかということについては諸説がある。我々は，個々の分野（ラプラス及びフーリエ変換，関数論，ベクトル解析，線型代数等々）についてまとめていくことを方針とした。それらの総合として，専門科目との有機的結合をはかりたいと思う。

＊　助教授　一般教科
＊＊　助教授　一般教科

本論（I，II）はラプラス変換について解説した。Iは，ラプラス変換の定義及びその性質について，IIは，ラプラス変換の応用，特に，微分及び積分方程式の解法について解説した。

1．ラプラス変換 — 定義と一般的性質 —

$[0, \infty>$ で定義された関数 $f(t)$ とパラメーター s を含む e^{-st} の積分

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \tag{1}$$

が存在する場合（パラメーター s の値に対して積分値が決まること）を考えよう。積分(1)が存在することを収束するあるいは可積分であるという。この積分をラプラス積分といい，$L(f(t))$ で表わす。別の言い方をすれば，積分演算子の積分核が e^{-st} の積分変換である。一般には，パラメーター s は複素数 $s = p + iq$ である。このとき，$e^{-st}f(t)$ の絶対値は，

$$|e^{-st}f(t)| = |e^{-(p+iq)}f(t)| \\ \leqq e^{-pt}|f(t)| \tag{2}$$

であるから，積分(1)の収束（可積分）は s の実部

pにだけ関係している。積分(1)が存在する十分条件は$f(t)$がある定数c，p'に対して

$$|e^{-sp'}f(t)| \leqq c \tag{3}$$

を満たすことである。このことは，次の不等式が成り立つことからわかる：

$$\left|\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt\right| \leqq \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\,dt$$
$$\leqq c\int_0^\infty e^{-st}e^{-p't}dt = c\left[\frac{-1}{s+p'}e^{-(s+p')t}\right]_0^\infty$$
$$=\frac{c}{s+p'}$$

$s > p'$ならば，不等式は常に成り立つ。

(3)式の意味は，$f(t)$が$t \to \infty$のとき$e^{-sp'}$より速く大きくならないことである：

$$\lim_{t\to\infty} e^{-sp'}f(t) = 0 \tag{3$'$}$$

不等式(3)が成り立つ関数$f(t)$を型指数関数，実数p'の下限（p_0）を型指数という。あるいは，$p > p_0$ならば，

$$e^{-pt}|f(t)| < e^{-p_0 t}|f(t)| \tag{4}$$

であるから，p_0を収束座標，直線$p = p_0$を収束軸，$p \geqq p_0$の右平面の範囲を収束域ともいう（図1参照）。

積分(1)を$f(t) \to F(s)$の変換

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \tag{5}$$

と考えるとき，$F(s)$を$f(t)$のラプラス変換（Laplace Transform）という。$f(t)$を原関数，$F(s)$を像関数という。

［例題1］ 次の関数$f(t)$のラプラス変換（L変換）を求めよ（aは正定数）。

1）$f(t) = at$ 2）$f(t) = te^{-at}$
3）$f(t) = \sin(at)$ 4）$f(t) = \cos(at)$ 5）t^n

［解］

いずれも定義式に従って積分を計算する。

1）$$a\int_0^\infty e^{-st}t\,dt = a\left[\frac{-e^{-st}}{s}\left(t - \frac{1}{s}\right)\right]_0^\infty$$
$$= a\frac{1}{s^2} \quad \therefore L(at) = aL(t) = a\frac{1}{s^2}$$

2）$$\int_0^\infty e^{-st}te^{at}dt = \int_0^\infty te^{-(s-a)t}dt$$
$$=\left[\frac{-e^{-(s-a)t}}{s-a}\left(t - \frac{1}{s-a}\right)\right]_0^\infty = \frac{1}{(s-a)^2}$$

$\therefore L(te^{at}) = 1/(s-a)^2$，$t = 1$のとき，$L(e^{at}) = 1/(s-a)$.

3）$$\int_0^\infty e^{-st}\sin(at)\,dt$$
$$=\int_0^\infty e^{-st}\left\{\frac{1}{2}(e^{iat} - e^{-iat})\right\}dt$$
$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{a}{s^2+a^2}$$
$$\therefore L(\sin(at)) = a/(s^2 + a^2)$$

4）$$\int_0^\infty e^{-st}\cos(at)\,dt$$
$$=\int_0^\infty e^{-st}\left\{\frac{1}{2}(e^{iat} + e^{-iat})\right\}dt$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right)$$
$$=\frac{s}{s^2+a^2}$$
$$\therefore L(\cos(at)) = s/(s^2 + a^2)$$

5）t^n（nは整数で，$n \geqq 0$とする）のラプラス変換を

$$L(t^n) = \int_0^\infty e^{-st}t^n dt \tag{6}$$

で表わす。まず，$n = 0$，1，2については，

$$n = 0\text{のとき，} L(1) = 1/s \tag{6.1}$$
$$n = 1\text{のとき，} L(t) = 1/s^2 \tag{6.2}$$
$$n = 2\text{のとき，} L(t^2) = 2/s^3 \tag{6.3}$$

を得る。一般的には，$st = x$と変数変換（$dt = dx/s$）して計算すれば，

$$L(t^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{6.4}$$

である。ここに，

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^n dt = n! \tag{7}$$

(7)式はガンマー（Gamma）関数（Γ関数）である。このように，Γ関数はL変換の特別の場合（式(1)で$s = 1$とおく）として理解できるし，Γ関数の一般化としてL変換を把握できる。

上記ではnは整数としたが，一般に，$n > -1$の実数としても成り立つ。例えば，

$$L(t^{t/2}) = \frac{\Gamma(1/2+1)}{s^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} \tag{8.1}$$

$$L(t^{-1/2}) = \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}} \tag{8.2}$$

である。しかし，$n \leqq -1$の時は収束しない。このことを$n = -2$，$f(t) = t^{-2}$について確かめ

ておこう：

$$\int_0^\infty e^{-st}t^{-2}\,dt=\int_0^1 e^{-st}t^{-2}\,dt+\int_1^\infty e^{-st}t^{-2}\,dt$$

ここに，右辺第二項は，$s>0$のとき積分値は，

$$\int_0^1 e^{-st}t^{-2}\,dt>e^{-s}\int_0^1 t^{-2}\,dt$$

$$=e^{-s}\left[\frac{1}{t}\right]_0^1=\infty$$

発散する。即ち，$f(t)=t^{-2}$のラプラス変換は存在しない。

［例題1］のL(t^n)の結果(6.1)−(6.4)式において，sをパラメータとみなし両辺をsについて微分すると，

$$\frac{dL(1)}{ds}=-\frac{1}{s^2}=\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}\,1\,dt$$

$$=\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial s}(e^{-st})\,dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}(-t)\,dt=-L(t)$$

$$\frac{dL(t)}{ds}=-\frac{2}{s^3}$$

$$=\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}t\,dt=\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial s}(e^{-st}t)\,dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}(-t)\,t\,dt=-L(t^2)$$

一般的には，

$$\frac{dL(t^n)}{ds}=-\frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$=\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}t^n\,dt=\int\frac{\partial}{\partial s}(e^{-st}t^n)\,dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}(-t)\,t^n\,dt=-L(t^{n+1})$$

を得る。これらの結果は，像関数$L(t^n)=F(s)$が$s>0$の収束域（図1参照）において正則関数であることを示す。

Γ関数のL変換，(6.4)式の結果は，巾級数のL変換を可能にする。指数関数e^{-t}の巾級数展開は，

$$e^{-t}=1-t+\frac{1}{2!}t^2-\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{4!}t^4\cdots$$

である。右辺のL変換，つまり，展開の各項のL変換をとれば，

$$L(R.S.)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{2!}{2!s^3}-\frac{3!}{3!s^4}$$

$$+\frac{4!}{4!s^5}\cdots$$

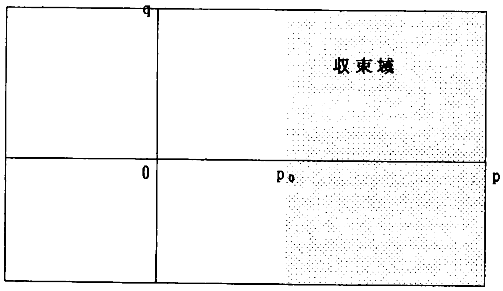

図1　収束座標（p_0）と収束域

$$=\frac{1}{s}\left(1-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^4}\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{s}\left(\frac{1}{1+1/s}\right)=\frac{1}{s+1}$$

他方，e^{-st}のL変換は，

$$L(e^{-t})=\int_0^\infty e^{-st}e^{-t}\,dt=\int e^{-(s+1)t}\,dt$$

$$=\frac{1}{s+1}$$

で，両者の一致が確認できる。多少，手間暇がかかるが，巾級数のL変換によってsin，cos関数等々のL変換を確実に求めることができる。

［例題2］　(1) $\sin(\sqrt{t})$及び(2) $\cos(\sqrt{t})/\sqrt{t}$のL変換を求めよ。

［解］

(1)　$\sin(\sqrt{t})=t^{1/2}-\frac{1}{3!}t^{3/2}+\frac{1}{5!}t^{5/2}$

$$-\ \frac{1}{7!}t^{7/2}\cdots$$

$$L(\sin(\sqrt{t}))=\frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}}-\frac{\Gamma(5/2)}{3!s^{5/2}}$$

$$+\frac{\Gamma(7/2)}{5!s^{7/2}}\cdots$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}\left(1-\left(\frac{1}{2^2s}\right)+\frac{1}{2!}\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{2^2s}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2^2s}\right)^3\cdots\right.$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}e^{-1/4s}$$

(2)　$$\frac{\cos(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}=\frac{1}{t^{1/2}}\left(1-\frac{1}{2!}(t^{1/2})\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4!}(t^{1/2})-\frac{1}{6!}(t^{1/2})^6+\cdots\right)$$

$$= t^{-1/2} - \frac{1}{2!} t^{1/2} + \frac{1}{4!} t^{3/2}$$

$$- \frac{1}{6!} t^{5/2} + \cdots$$

$$L\left(\frac{\cos(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\right) = \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} - \frac{\Gamma(3/2)}{2!\,s^{3/2}}$$

$$+ \frac{\Gamma(5/2)}{4!\,s^{5/2}} \cdots$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}}\left(1 - \left(\frac{1}{2^2 s}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2^2 s}\right)^2\right.$$

$$\left. - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2^2 s}\right)^3 + \cdots\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}} e^{-1/4s}$$

L 変換の活用法にある種の定積分の計算がある。例えば，(5)式において，$s \to 1$ のとき，次の等式が成り立つ：

$$\lim_{s\to 1} F(s) = \lim_{s\to 1} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t} f(t)\,dt \tag{9}$$

右辺は $e^{-t} f(t)$ の定積分だから，$F(s)$ が既知ならば定積分の計算に役立つ。

［例題３］　次の定積分をラプラス変換によって確かめよ。

1）$\int_0^\infty e^{-t} dt = 1$,

2）$\int_0^\infty e^{-t} t^n dt = \Gamma(n+1)\ (n > -1)$

3）$\int_0^\infty e^{-t} t^{1/2} dt = \frac{\pi}{2}$,

4）$\int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt = \sqrt{\pi}$

5）$\int_0^\infty e^{-t} \sin(at)\,dt = \frac{a}{a^2+1}$,

6）$\int_0^\infty e^{-t} \cos(at)\,dt = \frac{1}{a^2+1}$

［解］

1）$\lim_{s\to 1} L(1) = \lim_{s\to 1}(1/s) = 1$

2）$\lim_{s\to 1} L(t^n) = \mathrm{Lim}_{s\to 1}(\Gamma(n+1)/s^{n+1})$

$= \Gamma(n+1)$

3）$\lim_{s\to 1} L(t^{1/2}) = \lim_{s\to 1} \Gamma(3/2)/s^{1/2+1}$

$= \sqrt{\pi/2}$,

但し，$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

4）$\lim_{s\to 1} L(t^{-1/2}) = \lim_{s\to 1} \Gamma(1/2)/s^{-1/2+1} = \sqrt{\pi}$

5）$\lim_{s\to 1} L(\sin(at)) = \lim_{s\to 1}(a/(s^2+a^2)) = a/(a^2+1)$

6）$\lim_{s\to 1} L(\cos(at)) = \lim_{s\to 1}(s/(s^2+a^2)) = 1/(a^2+1)$

他方，$F(s) \to f(t)$ の変換を逆ラプラス変換（Inverse Laplace Transform）といい，$L^{-1}(F(s)) = f(t)$ で表わす。(1)式の逆変換の表式は，

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} e^{st} F(s)\,dt \tag{10}$$

で与えられる。この式をラプラス反転公式（Laplace Inversion Formula）という。(10)式は，フーリエ反転公式を用いて示すことができる。

フーリエ反転公式より，

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqt} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip't} f(t)\,dt\right] dq$$

両辺に e^{-pt} をかける（$e^{-pt} f(t)$ の変換と考えて），

$$e^{-pt} f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqt} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iq't}(e^{-pt} f(t))\,dt\right] dq$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqt} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(iq'+p)t} f(t)\,dt\right] dq$$

ここで，$p + iq' = s$，$f(t) = 0\ (t < 0)$ とすれば，

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqt} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt\right] dq$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqt} F(s)\,dq$$

$$\left(\because \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = F(s)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqt} F(s)\,d(iq)$$

（∵分母，分子に i を掛けた）

となる。e^{-pt} を右辺に移項すれば，

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqt} e^{pt} F(s)\,d(iq)$$

新しく $p + iq = s$ とおけば，

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{p-iT}^{p+iT} e^{st} F(s)\,ds$$

を得る。右辺の計算は，実際には，留数の計算に帰着させる（例題４参照）：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{p-iT}^{p+iT} e^{st} F(s)\,ds$$

$$= \sum_i \mathrm{Res}\left[e^{st} F(s),\ a_i\right] \tag{11}$$

ここに，a_i は特異点（極）を表わす。

本稿では，与えられた $F(s)$ を L 変換にもつ

連続関数 f (t)は一意的に定まる，ことを証明なしで認める。連続関数でないと，全ての T に対して，

$$\int_0^T n(t)\,dt = 0$$

が成り立つような n (t)を f (t)に加えても同じ F (s)を与えるのである。即ち，

$$F(s) = L(f(t))$$

ならば，

$$F(s) = L(f(t) + n(t))$$

である。

［例題 4］　次の F (s)の逆変換を求めよ。

1)　$F(s) = 1/s$

2)　$F(s) = 1/s(s+a)$

3)　$F(s) = s/(s^2-1)$

4)　$F(s) = 1/(s-a)^2$

［解］

1) 関数 e^{st}/s は $s=0$ が特異点（極），その他の領域では正則である。従って，図 2 のように閉積分路 C ： A B C D E F G H I をとる。

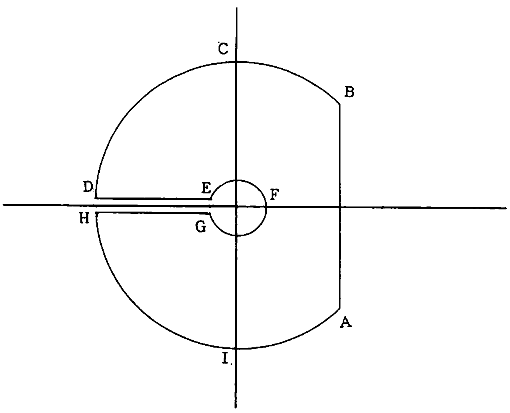

図 2　閉積分路

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{st}}{s}ds = 0$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{AB} + \int_{BCD} + \int_{DE} + \int_{EFG} + \int_{GH} + \int_{HIA}\right]$$

$R \to \infty$ とすれば，

$$\lim_{R\to\infty}\left[\int_{BCD} + \int_{HIA}\right] = 0$$

従って，

$$\therefore \int_{AB} = -\left[\int_{DE} + \int_{GH} + \int_{EFG}\right]$$

線分 DE 上では， $s = xe^{i\pi} = -x$， $ds = -dx$ であるから，

$$\int_{DE}\frac{e^{st}}{s}ds = \int_{-R}^{-r}\frac{e^{-xt}}{-x}(-dx) = \int_{-R}^{-r}\frac{e^{-xt}}{x}dx$$

線分 GH 上では， $s = xe^{-i\pi} = -x$， $ds = -dx$ であるから，

$$\int_{GH} = \int_{-r}^{-R}\frac{e^{st}}{s}ds = \int_{-r}^{-R}\frac{e^{-xt}}{-x}(-dx)$$

$$= \int_{-r}^{-R}\frac{e^{-xt}}{x}dx$$

$$\therefore \int_{-R}^{-r}\frac{e^{-xt}}{x}dx + \int_{-r}^{-R}\frac{e^{-xt}}{x}dx = 0$$

$$\therefore \int_{AB} = -\int_{EFG}$$

円周 EFG 上では， $s = re^{i\theta}$， $ds = ire^{i\theta}d\theta$ であるから，

$$\int_{EFG} = \lim_{r\to 0}\int_{+\pi}^{-\pi}\frac{e^{re^{i\theta}t}}{re^{i\theta}}\,ire^{-i\theta}\,d\theta$$

$$= i\int_{+\pi}^{-\pi}d\theta = -2\pi i,$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i}\int_{AB} = -\frac{1}{2\pi i}(-2\pi i) = 1$$

次に， $t = 0$ の場合

$$\int_{p-i\infty}^{p+i\infty}\frac{1}{s}ds = \int_{AB} + \int_{BCD} + \int_{DE}$$

$$\int_{AB} + \int_{DE} = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{-i\infty}^{-r}\frac{1}{s}ds + \int_{+ir}^{+i\infty}\frac{1}{s}ds\right) = 0$$

$$\int_{BCD} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\frac{1}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\pi = \frac{1}{2}$$

2) 特異点は $s = 0$， $-a$ であるから，留数定理（⑾式）によって

$$\lim_{s\to 0}\left[s\frac{e^{st}}{s(s+a)}\right] = \frac{1}{a},$$

$$\lim_{s\to -a}\left[(s+a)\frac{e^{st}}{s(s+a)}\right] = -\frac{e^{-at}}{a}$$

を得る。

$$\therefore L^{-1}(F(s)) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$$

3) 特異点は， $s = \pm 1$。

$$\lim_{s\to -1}\left[(s+1)\frac{se^{st}}{(s+1)(s-1)}\right] = \frac{1}{2}e^{-t},$$

$$\lim_{s\to +1}\left[(s-1)\frac{se^{st}}{(s+1)(s-1)}\right] = \frac{1}{2}e^{t}$$

$$\therefore L^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = \cosh(t)$$

4) 特異点は， $s = a$（重根）。

$$\lim_{s\to a}\frac{d}{ds}\left[(s-a)^2\frac{e^{st}}{(s-a)^2}\right]$$

$$=\lim_{s\to a}(te^{st})=te^{at}$$

$$\therefore L^{-1}(F(s))=te^{at}$$

2．ヘビサイドの単位階段関数・デルタ関数のラプラス変換

b≧0 に対して、

$$U(t-b)=\begin{cases}1 & (t<b)\\ 0 & (t>b)\end{cases} \tag{1}$$

をヘビサイドの単位階段関数（Heaviside's unit step function）という（図3）。t＝b の値は，有限値であれば何でもよい。というのは，一点での値は，積分にはきかないから。

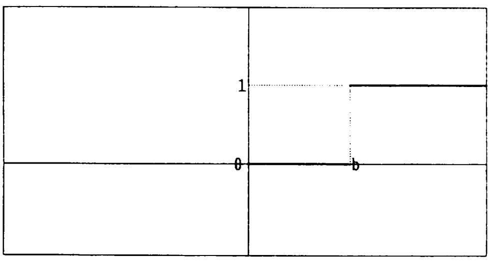

図3　ヘヴィサイド関数 U(t-b)

U(t−b) の L 変換は，

$$L(U(t-b))=\int_0^\infty e^{-st}U(t-b)\,dt=\int_b^\infty e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{s}e^{-bs} \tag{2}$$

となる。ここに，b＝0 とすれば，上式は，

$$L(U(t))=L(1)=\frac{1}{s} \tag{3}$$

である。

単位階段関数の活用として，次のような関数 f(t) と U(t) の積を考える。関数 f(t−b) と U(t−b) の積は，定義式(1)より，

$$f(t-b)U(t-b)=\begin{cases}f(t-b) & t>b\\ 0 & t<b\end{cases} \tag{4}$$

と定める。

その L 変換は，

$$L(f(t-b)U(t-b))$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}f(t-b)U(t-b)\,dt$$

$$=\int_0^b e^{-st}0\,dt+\int_b^\infty e^{-st}f(t-b)\,dt$$

ここで，t−b＝x と変数変換（dt＝dx）とすれば，

$$L(f(t-b)U(t-b))$$

$$=\int_0^\infty e^{-s(b+x)}f(x)\,dx$$

$$=e^{-bs}\int_b^\infty e^{-sx}f(x)\,dx=e^{-bs}F(s) \tag{5}$$

となる。一方，関数

$$f(t+b)U(t+b)=\begin{cases}f(t+b) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases} \tag{6}$$

の L 変換は，

$$L(f(t+b)U(t+b))=\int_0^\infty e^{-st}f(t+b)\,dt$$

$$=e^{bs}\left[f(s)-\int_0^b e^{-st}F(t)\,dt\right]$$

である。

[例題]　$f(t)=\begin{cases}1 & (a<t<b)\\ 0 & (t<a,\ t>b)\end{cases}$ について，

(1) f(t) の L 変換，L(f) を求めよ。

(2) b＝a＋h として，$\lim_{h\to 0}\{L(f)/h\}$ を求めよ。

[解]

f(t)＝U(t−a)−U(t−b) と表せるので，その L 変換は，

$$L(f)=(e^{-as}-e^{-bs})/s,$$

である。次に，b＝a＋h として，

$$L(f)=(e^{-as}-e^{-s(a+h)})/s$$

$$=e^{-as}\{1-e^{-hs}\}/s$$

$$\sim e^{-as}\{1-(1-hs+\cdots)\}/s$$

最後の項は，指数関数 e^{-hs} を展開した。こうして，極限（h→0）をとれば，

$$\lim_{h\to 0}\frac{L(f)}{h}=\frac{1}{hs}e^{-as}\{1-(1-hs+\cdots)\}=e^{-as}$$

を得る。

上の例題において，a＝0 とすれば，関数 f(t) は U(t)−U(t−h) と書け，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{U(t)-U(t-h)}{h} \tag{8}$$

は，U(t) の微分 U′(t) を与えるものとして，

$$U'(t)=\delta(t) \tag{9}$$

で表わす。(8)式は，ステップ関数の微分がデルタ関数 δ(t) という。(9)式の L 変換をとれば，

$$\int_0^\infty e^{-st}U'(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-st}\,\delta(t)\,dt$$

$$=\left[e^{-st}U(t)\right]_0^\infty+s\int_0^\infty e^{-st}dt=s\cdot\frac{1}{s}=1 \tag{10}$$

ここに，[　] の下限の値が0とするには，0への左極限（$t \to -0$）をとらなければならない。即ち，(10)式の第二式は，

$$\int_0^\infty e^{-st}\delta(t)\,dt = \int_{-0}^\infty e^{-st}\delta(t)\,dt = 1$$

の意味である。上式は，デルタ関数のL変換は1である，という。

原点からaだけ平行移動させた$\delta(t-a)$のL変換は，

$$\int_0^\infty e^{-st}\delta(t-a)\,dt = e^{-sa} \tag{11}$$

となる。

更に，デルタ関数の微分$\delta^{(n)}(t)(n=1,2,3,\cdots)$のL変換は，

$$\int_0^\infty e^{-st}\delta^{(n)}(t)\,dt = s^n \tag{12}$$

と書ける。これは，(10)式の計算にあるように，部分積分を繰り返せば得られる。(12)式の一般化，つまり，(11)式に対応する式は，

$$\int_0^\infty e^{-st}\delta^{(n)}(t-a)\,dt = s^n e^{-sa} \tag{13}$$

である。

3．合成積（たたみこみ）のL変換

関数$f(t)$，$g(t)$の合成積は，

$$\int_0^t f(t-x)g(x)\,dx = f(t)*g(t) = f*g \tag{1}$$

で定義する。記号$*$によって合成積を示す。他方，普通の積（乗法積）はfgあるいは$f\cdot g$で表わす。

合成積の計算として，$(t)=g(t)=t$のとき，定義式により，

$$t*t = \int_0^1 (t-x)x\,dx = \frac{1}{2}\left[tx^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^t = \frac{t^3}{6}$$

と計算する。

［例題1］　次の関数の合成積を計算せよ。

1）$f(t)=t$，$g(t)=\sin(at)$

2）$f(t)=\sin(at)$，$g(t)=\sin(bt)$

3）$f(t)=e^{-at}$，$g(t)=\sin(bt)$

4）$f(t)=t^{p-1}$，$g(t)=t^{q-1}$

［解］

1）$\int_0^t (t-x)\sin(ax)\,dx$

$$=\int_0^t (t\sin(ax) - x\sin(ax))\,dx$$

$$=\frac{1}{a}\left(t - \frac{1}{a}\sin(at)\right)$$

2）$\int_0^t \sin(a(t-x))\sin(bx)\,dx$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}(a\sin(bt) - b\sin(at))$$

3）$\int_0^t e^{-a(t-x)}\sin(bx)\,dx$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}(a\sin(bt) - b\cos(bt) + be^{-at})$$

4）$t^{p-1}*t^{q-1} = \int_0^t (t-x)^{p-1}t^{q-1}\,dx$

$$= t^{p+q-1}\int_0^1 (1-X)^{p-1}X^{q-1}\,dX = t^{p+q-1}B(p,q)$$

第二式から第三式への移行では，変数変換$(x = x/t,\ dx = tdx)$を行った。最右辺の

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-t)^{p-1}t^{q-1}\,dt$$

はベータ関数（Beta function）である。

合成積において，特に，$f=1$（定数と区別する為に定数関数を$\{1\}$で表わす）のとき，

$$\{1\}*g = \int_0^t g(x)\,dx = \int_0^t g(t-x)\,dx \tag{2}$$

であるから，$\{1\}$の働きは積分演算子とみなせる。

［例題2］　次の等式を確かめよ。

1）$\{1\}^2 = 1*1 = t$，

2）$\{1\}^3 = 1*x = x*1 = t^2/2$

3）$\{1\}^n = t^{n-1}/(n-1)!$

［解］

1）$\{1\}^2 = \int_0^t dx = t$

2）$\{1\}^3 = \int_0^t (t-x)\,dx = t^2/2$

3）1），2）のようにnについて計算すればよい。一般的には数学的帰納法による。

演算子的に積分演算子が定義されたが，微分演算子はどうなるか？。積分演算子$\{1\}$の逆元$s = I/\{1\}$，即ち，$s\{1\}=\{1\}s=I$となるsを微分演算子という。

今，関数$f(t)$及びその微分df/dtをf'で表わせば，

$$\{1\}*f' = \int_0^t f'dt = f(t) - \{f(0)\}$$

$$= f(t) - \{1\}f(0)$$

と書ける。両辺にsを掛ければ，$s\{1\}=I$から，

$$f' = sf - f(0),\quad \therefore sf = f' + f(0) \tag{3}$$

となる。ここに，$f(0)$は，$t=0$の$f(t)$の値，初期値である。これが，sを微分演算子と呼ぶ理

由である。$f(0)=0$ ならば，$sf=f'$ である。

合成積の主な性質を挙げておこう。

(1) $f*g=g*f$ (可換則)
(2) $f*(g+h)=f*g+f*h$ (分配則)
(3) $f*(g*h)=(f*g)*h$ (結合則)
(4) $f*g=0$ ならば，$f=0$ あるいは $g=0$ である。
(この関数を零関数という。)

(1), (2), (3)式の性質は，定義式より容易に証明できる。例えば，(1)式は，

$$f*g=\int_0^t f(t-x)\,g(x)\,dx$$

ここで，$t-x=y$ の変数変換を施せば，

$$=\int_t^0 f(y)\,g(t-y)(-dy)$$

$$=\int_0^t f(y)\,g(t-y)\,dy=g*f$$

を得る。同様にして，(2)と(3)式も得ることができる。(4)式は自明にみえる関係であるが，Tischmarsh の定理と呼ばれているもので証明は単純でないのでここでは省略する。

合成積のラプラス変換及び逆変換の公式

$$L(f*g)=L(f)L(g) \tag{4}$$
$$L^{-1}(F(s)G(s))=f*g \tag{5}$$

を次に証明しよう。まず，前者の場合から，

$$(f*g)=\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(t-x)\,g(x)\,dx\right)dt$$

上式の左辺に $U(t-x)$ を代入して，積分区間を $0\rightarrow\infty$ に広げて，積分の順序を換える：

$$=\int_0^\infty g(x)\left(\int_0^\infty e^{-st}f(t-x)\,U(t-x)\,dt\right)dx$$

$$=\int_0^\infty g(x)\,e^{-sx}F(s)\,dx$$

$$=F(s)\int_0^\infty e^{-sx}g(x)\,dx=F(s)G(s)$$

$$=L(f)L(g)$$

[例題3]　例題1の合成積のL変換を二通りの方法（一つは例題1の結果を直接L変換する。もう一つは，合成積の公式）で求めよ。

[解]

1) $L\left(\dfrac{1}{a}\left(t-\dfrac{1}{a}\sin(at)\right)\right)$

$$=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{a}{a(s^2+a^2)}\right)=\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}$$

$$L(t)L(\sin(at))=\frac{1}{s^2}\,\frac{a}{(s^2+a^2)}$$

$$=\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}$$

2) $L\dfrac{1}{a^2-b^2}(a\sin(bt)-b\sin(at))$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\left(a\frac{b}{s^2+b^2}-b\frac{a}{s^2+a^2}\right)$$

$$=\frac{ab}{(s^2+b^2)(s^2+a^2)}$$

$$L(\sin(at))L(\sin(bt))=\frac{a}{(s^2+b^2)}\,\frac{b}{(s^2+a^2)}$$

3) $L\left(\dfrac{1}{a^2+b^2}(a\sin(bt)-b\cos(bt)+be^{-at})\right)$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\left(a\frac{b}{s^2+b^2}-b\frac{s}{s^2+b^2}+b\frac{1}{s+a}\right)$$

$$=\frac{b}{(s^2+b^2)(s+a)}$$

$$L(e^{-at})L(\sin(bt))=\frac{b}{(s+a)(s^2+b^2)}$$

4) 両辺のL変換をΓ関数を用いて表す。

4) (左辺) $=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{s^{p+q}}$,

(右辺) $=\dfrac{\Gamma(p+q)}{s^{p+q}}B(p,\ q)$,

$$\therefore\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}=B(p,\ q)$$

この関係式は，Γ関数とB関数の関係を示す。

逆変換の公式

$$L^{-1}(F(s)G(s))=f*g$$

を証明する。(4)式の結果を用いて，次のように変形する。

$$\begin{aligned} f*g&=L^{-1}(F(s))*L^{-1}(G(s))\\ &=L^{-1}L\{L^{-1}(F(s))*L^{-1}(G(s))\}\\ &=L^{-1}\{LL^{-1}(F(s))\cdot LL^{-1}(G(s)\}\\ &=L^{-1}((F(s)\cdot G(s)) \end{aligned} \tag{5}$$

[例題4]　次の逆変換を求めよ。

1) $1/(s-a)^2$　2) $1/s(s+a)$　3) $1/(s^2-1)$

[解]

1) $L^{-1}\left(\dfrac{1}{(s-a)^a}\right)=L^{-1}\left(\dfrac{1}{s-a}\right)L^{-1}\left(\dfrac{1}{s-a}\right)$

$$=e^{at}*e^{at}=\int_0^t e^{a(t-x)}e^{ax}dx$$

$$=e^{at}\int_0^t dx=te^{at}$$

2) $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s(s+a)}\right)=L^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\right)L^{-1}\left(\dfrac{1}{s+a}\right)=$

$1*e^{-at}$

$=\int_0^t e^{-ax}dx=\frac{1}{a}(1-e^{-at})$

3) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-1}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)$

$=e^{-1}*e^t=\frac{1}{2}(e^{at}-e^{-at})=\sinh(t)$

4．ラプラス変換及び逆変換の演算規則

ここでは主にL変換の演算規則について述べる。任意の関数$f(t)$，$g(t)$のL変換$L(f)=F(s)$，$L(g)=G(s)$とする。a，bは，正の実数とする。逆変換の演算公式に関して，本稿では，$L^{-1}(F(s))=f(t)$，$L^{-1}(G(s))=g(t)$のように，像関数と原関数の対応は一意であることを仮定する。

1）線型性

$$L(af+bg)=aL(f)+bL(g)$$
$$=aF(s)+bG(s) \qquad (1)$$

従って，L変換は，線型変換である。

［例題1］ 次の関数のL変換及びL^{-1}変換を求めよ。

1) $(2t-1)^2$ 2) $a\sin(t)+b\cos(2t)$

3) $\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$ 4) $\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^4}$

5) $\frac{1}{s-3}+\frac{1}{(s-3)^3}+\frac{1}{(s-3)^5}$

6) $\frac{4s+3}{s^2+s}$

［解］

1) $L((2t-1)^2)=L(4t^2-4t+1)$

$=4L(t^2)-4L(t)+L(1)$

$=4\frac{2}{s^3}-4\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}$

2) $L(a\sin(t)+b\cos(2t))$

$=a\frac{1}{s^2+1}+b\frac{s}{s+4}$

3) $L\left(\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}\right)$

$=\frac{1}{(a-b)}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right)$

$=\frac{1}{(s-a)(s-b)}$

4) $L^{-1}\left(\frac{a}{s}+\frac{b}{s^2}+\frac{c}{s^4}\right)$

$=L^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)+L^{-1}\left(\frac{b}{s^2}\right)+L^{-1}\left(\frac{c}{s^4}\right)$

$=a+bt+c\frac{t^3}{3!}$

5) $L^{-1}\left(\frac{1}{s-3}+\frac{1}{(s-3)^3}+\frac{1}{(s-3)^5}\right)$

$=e^{3t}\left(1+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4\right)$

6) $L^{-1}\left(\frac{4s+3}{s^2+4}\right)$

$=4L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)+\frac{3}{2}L^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)$

$=4\cos(2t)+\frac{3}{2}\sin(2t)$

2）相似及び移動性

$$f(at-b)U(at-b)$$
$$=f(at-b),\quad at-b>0$$
$$=0,\quad at-b<0 \qquad (2)$$

のラプラス変換は，

$$L(f(at-b)U(at-b))=\frac{1}{a}e^{-(b/a)s}$$
$$=F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad (3)$$

となるが，次の順序で求める。まず，$a\neq 0$，$b=0$として，$at=x$の変数変換を行って計算すると，

$$L(f(at))=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad (3.1)$$

を得る。次に，$a=1$，$b\neq 0$として，$t-b=x$の変数変換を行って計算すると，

$$L(f(t-b))=e^{-bs}F(s) \qquad (3.2)$$

を得る。(3)式は，(3.1)と(3.2)式を合わせれば($at-b=x$の変数変換を行う)，

$$\int_{b/a}^{\infty}e^{-st}f(at-b)\,dt$$
$$=\int_0^{\infty}e^{-s(x+b)/a}f(x)\,dx/a$$
$$=(e^{-s(b/a)}/a)\int_0^{\infty}e^{-(s/a)t}f(x)\,dx$$
$$=\frac{1}{a}e^{-(b/a)s}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

を得る。$f(at+b)$のL変換は，$at+b=x$の変数変換をすれば，

$$L(f(at+b))$$
$$=\frac{1}{a}e^{(b/a)s}\left[F\left(\frac{s}{a}\right)-\int_0^b e^{-sx/a}f(x)\,dx\right]$$

を得る。

[例題2.1] 次の関数のL変換を求めよ。

1) $U(t-a)t$ 2) $U(t-a)(t-a)$

3) $\dfrac{e^{-2s}}{s^2+4}$ 4) $\dfrac{e^{-3a}(s-1)}{(s-1)^2+4}$

5) $\dfrac{e^{-\pi s}}{s^4}$

[解]

1) $L(U(t-a)t)=\int_a^\infty e^{-st}tdt=\dfrac{ae^{-at}}{s}+\dfrac{e^{-at}}{s^2}$

2) $L(U(t-a)(t-a))=\int_a^\infty e^{-st}(t-a)dt$
$=\dfrac{e^{-at}}{s^2}$

3) $L^{-1}\left(\dfrac{e^{-2s}}{s^2+4}\right)=U(t-2)\sin(2(t-2))$

4) $L^{-1}\left(\dfrac{e^{-3s(s-1)}}{(s-1)^2+4}\right)$

$=U(t-3)e^t\cos 2(t-3)$

5) $L^{-1}\left(\dfrac{e^{-\pi s}}{s^4}\right)=\dfrac{1}{3!}U(t-\pi)(t-\pi)^3$

[例題2.2] 差分方程式 $y(t)+ay(t-1)+by(t-2)=f(t)$ において，$L(y(t))=Y(s)$ を求めよ。

[解]

両辺をL変換する：$L(y(t))+aL(y(t-1))+b$

$L(y(t-2))=L(f(t))$

$Y(s)+ae^{-s}Y(s)+be^{-2s}Y(s)=F(s)$，従って，

$Y(s)=F(s)/(1+ae^{-s}+be^{-2s})$．この逆変換が求まれば，方程式が解けたことになる。

3) $e^{\pm at}f(t)$ のL変換

$L(e^{\pm at}f(t))=\int_0^\infty e^{-st}(e^{\pm at}f(t))dt$

$=\int_0^\infty e^{-(s+a)t}f(t)dt=F(s+a)$

[例題3] 次の関数のL変換及び逆変換を求めよ。

1) $e^{at}(a+bt)$ 2) $e^{at}\sin(bt)$

3) $e^{-at}\cos(bt)$ 4) $e^{-at}\sinh(bt)$

5) $e^{at}\cosh(bt)$ 6) $\dfrac{2}{(s-a)^3}$

7) $\dfrac{2s-4}{(s-2)^2+b^2}$ 8) $\dfrac{3}{(s-a)^2-9}$

[解]

1) $L(e^{at}(a+bt))=aL(e^{at})+bL(te^{at})$
$=a\dfrac{1}{s-a}+b\dfrac{1}{(s-a)^2}$

2) $L(e^{at}\sin(bt))=\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$

3) $L(e^{-at}\cos(bt))=\dfrac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$

4) $L(e^{-at}\sinh(bt))=\dfrac{b}{(s-a)^2-b^2}$

5) $e^{at}\cosh(bt)=\dfrac{s+a}{(s+a)^2-b^2}$

6) $L^{-1}\left(\dfrac{2}{(s-a)^3}\right)=t^2e^{at}$

7) $L^{-1}\left(\dfrac{2s-4}{(s-2)^2+b^2}\right)=2e^{2t}\cos(bt)$

8) $L^{-1}\left(\dfrac{3}{(s-a)^2-9}\right)=e^{at}\sinh(3t)$

4) $f(t)$ の微分と積分のL変換

4. 1) 微分：$L(f'(t))=sF(s)-f(0)$

左辺の定義式を部分積分すれば，

$\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt=\left[e^{-st}f(t)\right]_0^\infty-s\int_0^\infty e^{-st}f(t)$

$=-f(0)+sF(s)$

となる。

[例題4.1] 差分微分方程式 $y'-ay(y-1)=b(t>0)$ を解け。但し，$b=y(t)=0(t<0)$.

[解]

両辺をL変換する：$y'=sF(s)-f(0)=sF(s)$

$sY(s)-ae^{-s}Y(s)=\dfrac{b}{s}$，$(s-ae^{-s})Y(s)=\dfrac{b}{s}$

$Y(s)=\dfrac{b}{s}\left(\dfrac{1}{s-ae^{-s}}\right)=\dfrac{b}{s^2}\left(\dfrac{1}{1-(a/s)e^{-s}}\right)$

$=b\left(\dfrac{1}{s^2}+\sum_n\dfrac{a^n}{s^{n+2}}e^{-ns}\right)$

$L^{-1}(Y(s))$

$=y(t)=b\left(t+\sum_n\dfrac{a^n}{(n+1)!}(t-n)^{n+1}\right)$

但し，$(t-n)^{n+1}=0$ $t-n<0(n=0,1,2,\cdots)$.

$m<t<m+1$,

$y(t)=b\left[t+\dfrac{a}{2}(t-1)^2+\dfrac{a^2}{3!}(t-2)^3+\cdots\right.$
$\left.+\dfrac{a^m}{(m+1)!}(t-m)^{m+1}\right]$

同様にして，二階の微分についても，

$$L(f''(t))=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

を得る。一般に，n階の微分に対して，

$$L(f^{(n)})=S^nF(s)-S^{n-1}f(0)-S^{n-2}f'(0)\cdots -f^{n-1}(0)$$

を得る。

［例題4．2］　次の等式を証明せよ（極限値は存在するものとする）。

1）$\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$

2）$\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$

3）$F(s)=\frac{1}{s(s+a)}$ のとき $\lim_{t\to\infty} f(t)$，$\lim_{t\to\infty} f(t)$ を求めよ。

［解］

1）$L(f')=\int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt=sF(s)-f(0)$。このとき，左辺は $s\to\infty$ のとき，零である。

$\lim_{s\to\infty}(sF(s)-f(0))=0$,

$\therefore \lim_{s\to\infty} sF(s)=f(0)=\lim_{t\to 0} f(t)$

2）$L(f')=\int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt=sF(s)-f(0)$

$\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}f'(t)\,dt=\int_0^\infty f'(t)\,dt=sF(s))-f(0)$,

$\therefore \lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{t\to\infty} f(t)$

3）$\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{s\to\infty}\left(\frac{1}{s+a}\right)=0$,

$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{s+a}\right)=\frac{1}{a}$

4．2）積分：$L\left(\int_0^t f(x)\,dx\right)=\frac{1}{s}F(s)$

（左辺）$=\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(x)\,dx\right)dt$

$$=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\int_0^t f(x)\,dx\right]+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\frac{1}{s}F(s)$$

合成積の性質を使うと，もっと直接的に示せる：

$$L(1*f(1))=L(1)L(f(t))=\frac{1}{s}F(s)$$

一般型としては，

$$L\left(\int_0^t\int_0^{x_{n-1}}\cdots\int_0^{x_1} f(x)\,dx\,dx_1\,dx_2\cdots dx_{n-1}\right)=\frac{1}{s^n}F(s)$$

と表せる。

［例題4．3］　次の関数のL変換を求めよ。

1）$\int_0^t e^{ax}dx$　　2）$\int_0^t \sin(ax)\,dx$

3）$\int_0^t \cos(ax)\,dx$　　4）$\int_0^t xe^{ax}dx$

［解］

1）$L^{-1}\left(\int_0^t e^{ax}dx\right)$

$$=L^{-1}(1)*L^{-1}\left(\int_0^\infty e^{ax}dx\right)$$

$$=\frac{1}{s}\ \frac{1}{s-a}$$

2）$L^{-1}\left(\int_0^t \sin(ax)\,dx\right)=\frac{a}{s(s^2+a^2)}$

3）$L^{-1}\left(\int_0^t \cos(ax)\,dx\right)=\frac{1}{s^2+a^2}$

4）$L^{-1}\int_0^t xe^{ax}dx\,)\frac{1}{s(s-a)^2}$

5）$tf(t)$，$f(t)/t$ のL変換

5．1）$L(tf(t))=-F'(s)$

$$L(tf(t))=\int_0^\infty e^{-st}tf(t)\,dt$$

$$=\int_0^\infty(-te^{-st})f(t)\,dt=\int\left(\frac{\partial}{\partial s}e^{-st}\right)f(t)\,dt$$

$$=\frac{d}{ds}\int e^{-st}f(t)\,dt=F'(s)$$

一般型としては，

$$L((-t)^n f(t))=F^{(n)}(s)$$

と表せる。

［例題5．1］　次の関数のL変換を求めよ。

1）$t\sin(at)$　2）$t^2\sin(at)$　3）t^3e^{-t}

［解］

1）$L(t\sin(at))=-L(\sin(at))'$

$$=-\frac{a}{(s^2+a^2)'}=\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

2）$L(t^2\sin(at))=\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)''$

$$=\frac{-2a}{(s^2+a^2)^2}+\frac{4as^2}{(s^2+a^2)^3}$$

3）$L(t^3e^{-t})=\left(-\frac{1}{(s+1)}\right)'''$

$$=\frac{3!}{(s+1)^4}$$

5．2）　$L(f(t)/t)=\int_0^\infty F(x)\,dx$

（左辺）$=\int_0^\infty e^{-st}(f(t)/t))\,dt$

$$=\int_0^\infty(e^{-st}/t)f(t)\,dt$$

$$=\int_0^\infty\left(\int_s^\infty e^{-xt}dx\right)f(t)\,dt$$
$$=\int_s^\infty\int_0^\infty(e^{-xt}f(t)\,dt)\,dx$$
$$=\int_s^\infty F(x)\,dx$$

一般型としては，

$$L(f(t)/t^n)$$
$$=\int_s^\infty\int_{s_{n-1}}^\infty\cdots\int_{s_1}^\infty F(x)\,dx\,dx_1\,dx_2\cdots dx_{n-1}$$

と表せる。

［例題５．２］　次の関数のＬ変換を求めよ。

1）$\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$　　2）$\dfrac{1-\cos(at)}{t}$

3）$\dfrac{\sin(at)}{t}$

［解］

1）$L\left(\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right)=\int_0^\infty\left(\dfrac{1}{s+a}-\dfrac{1}{s+b}\right)ds$

$$=\ln\frac{s+a}{s+b}$$

2）$L\left(\dfrac{1-\cos(at)}{t}\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{a^2}{s^2}\right)$

3）$L\left(\dfrac{\sin(at)}{t}\right)=\int_s^\infty\dfrac{a}{s^2+a^2}ds$

$$=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{s}{a}$$

6）周期（Ｔ）：

$$L(f)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$$

ここに，関数 $f(t)$ は周期（Ｔ）を持つ：$f(t)=f(t+T)$．$L(f)=F(s)$．

$$L(f)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$
$$=\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt+\int_T^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

右辺第二項において，$t-T=x$ の変数変換をする：

$$\int_T^\infty e^{-(s+T)}f(x)\,dx=e^{-sT}\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx$$
$$=e^{-st}F(s)$$

$$(1-e^{-sT})F(s)=\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$$

$$\therefore F(s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$$

［例題６］

$$f(t)=f(t+T)=\begin{cases}c & (0<t<T</2)\\ -c & (T/2<t<T)\end{cases}$$

のＬ変換を求めよ。

［解］

$$L(f)=\frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^{T/2}e^{-st}c\,dt+\int_{T/2}^\infty e^{-st}(-c)\,dt$$
$$=(c/s)\tanh(Ts/4)$$

（平成４年11月25日受理）