応用数学の教材作成 II
— ラプラス変換の応用編 —

石　信　一*，中　野　渉**

Studies of teaching materials in Applied Mathematics II
— Applications of Laplace Transformation —

Shin-ichi ISHI ,　Wataru NAKANO

要　旨

ラプラス変換の応用として，微分及び積分方程式の解法，Green 関数法による常微分方程式の境界値問題を解説した。

Abstract

Applications of Laplace transformation to differential and intergal equations and boundary values problems of ordinary differential equations in terms of Green functions are explained.

1．一階定数係数線型微分方程式

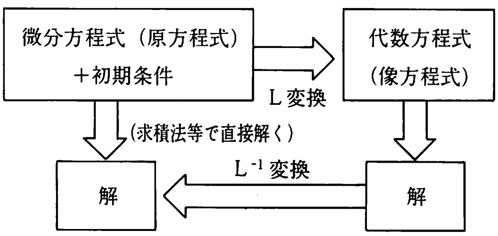
一般に，一階の線型微分方程式は，y (t)，f (t)，g (t)をｔの関数として

$$y'(t)+g(t)y=f(t) \tag{1}$$

と書ける。この方程式の解は，

$$y(t)=e^{-\int^{t} g dx}\left(\int e^{\int^{t} g dx} f(t)\,dt+c\right) \tag{2}$$

で与えられる。ここに，ｃは初期条件から決まる定数である。以下，Ｌ変換を使って微分方程式の解を求める方法を示そう。Ｌ変換による解法の手順の概略は次の通り。



明らかにＬ変換の方法は，遠回りをして解を求めている。それ故，何らかの利点がなければならない。求積法等で直接的に解を求める方法では，一般解を求めた後，初期条件に合うように任意定数を定めて特殊解を決める。Ｌ変換の解法では，始めから初期条件を考慮に入れて特殊解が得られる。また，初期値を任意の値にしておけば，一般解も求まる。Ｌ変換の解法には，こうした利点がある。

以下では，まず，定数係数の線型微分方程式を取り扱う。一般に，Ｌ変換による解法では，微

＊　助教授　一般教科
＊＊　助教授　一般教科

分方程式の係数の多項式の次数（m）は，その方程式の微分の階数（n）に比べて低くなければ（$m \leqq n$）意味がない。（但し，$m=n$のときはcase by caseである。）

(1)式において，$g(t)=a$とすれば，

$$y' + ay = f(t) \tag{3}$$

となる。簡単化して，$f(t)=0$の場合（同次方程式）

$$y' + ay = 0, \tag{4.1}$$

$$y(0)=c \tag{4.2}$$

について解を求めて見よう。(4.2) 式のような初期条件のもとで微分方程式(4.1)を解く問題を初期値問題という。上の図式に従って，

$$L(y') + aL(y) = 0$$

$$sY(s) - y(0) + aY(s) = 0,$$

$$(L(y') = sY(s) - y(0), L(y) = Y(s))$$

$$(s+a)Y(s) = y(0) = c$$

こうして，$Y(s)$についての代数方程式を解く。その解を逆変換すれば，

$$Y(s) = \frac{c}{s+a},\quad L^{-1}(Y(s)) = ce^{-at} \tag{5}$$

を得る。この解は，(2)式からも容易に求まる。

次に，$f(t) \neq 0$の場合を考察する。$f(t)$を具体的に$\delta(t)$，$U(t)$及びtの場合に解を求める。

1）$f(t)=\delta(t)$

$$sY(s) - y(0) + aY(s) = 1,$$

$$(s+a)Y(s) = c+1$$

$$Y(s) = \frac{c}{s+a} + \frac{1}{s},$$

$$L^{-1}(Y) = ce^{-at} + e^{-at}$$

$$= (c+1)e^{-at}$$

2）$f(t)=U(t)$

$$sY(s) - y(0) + aY(s) = 1/s,$$

$$(s+a)Y(s) = c + 1/s$$

$$Y(s) = \frac{c}{s+a} + \frac{1}{s(s+a)},$$

$$L^{-1}(Y) = ce^{-at} + 1 * e^{-at}$$

3）$f(t)=t$

$$sY(S) - y(0) + aY(s) = 1/s^2$$

$$(s+a)Y(s) = c + 1/s^2$$

$$Y(s) = \frac{c}{s+a} + \frac{1}{s^2(s+a)},$$

$$L^{-1}(Y) = ce^{-at} + t * e^{-at}$$

1)，2)，3) の解の関係を調べよう。ここで、初期条件については，

$$y(0) = c = 0, \tag{6}$$

とする。そのことは，非同次項$f(t)$の解への効果のみを考慮することになる。解は，

$$1)\ L^{-1}(Y) = e^{-at}$$

$$2)\ L^{-1}(Y) = 1 * e^{-at} \tag{7}$$

$$3)\ L^{-1}(Y) = t * e^{-at}$$

と書ける。2)，3) の解は，1) の解(e^{-at})と$f(t)$の合成積で書ける。そこで，次のような新しい関数($H(s)$，$W(s)$，$w(t)$) を定義すると，2)，3) は，

$$H(s) = s + a,$$

$$W(s) = 1/H(S),$$

$$w(t) = L^{-1}(W(s)) = e^{-at}$$

$$(2)\ L^{-1}(Y) = 1 * e^{-at} = 1 * w(t)$$

$$(3)\ L^{-1}(Y) = t * e^{-at} = t * w(t) \tag{8}$$

と書ける。ここに，$H(s)$は方程式の形が与えられると決まるものである。$H(s)=0$とおけば，特性方程式に対応するものである。$W(s)$及び$w(t)$は，伝達関数（Transfer function），インパルス応答（Impulse response）という。また，$f(t)=U(t)$の場合（$H_0(s)=0$として），$1/sH(s) = W(s)/s$を，単位応答（unit response），あるいは，インディシャル応答（indicial response）という。こうして，(3)式の解は，初期条件に依存する項を$H_0(s)$($=y(0)$)，非同次項（力学等では外力という）を$L(f(t)) = F(s)$で表わせば，一般に，

$$L^{-1}(Y(s)) = L^{-1}\left(\frac{H_0(S)}{H(s)}\right) + L^{-1}\left(\frac{F(s)}{H(s)}\right) \tag{9}$$

と書ける。$H_0(s)=y(0)$，$H(s)$，$W(s)$及び$w(t)$を用いて書き換える：

$$L^{-1}(Y(s)) = L^{-1}(W(s)H_0(s)) + L^{-1}(W(s)F(s))$$

$$= L^{-1}(W(s)) * L^{-1}(H_0(s)) + L^{-1}(W(s)) * L^{-1}(F(s))$$

$$= w(t) * y(0) + w(t) * f(t) \tag{10}$$

こうして，非同次方程式の解は，$f(t)=\delta(t)$のときの解($w(t)$)がわかれば，形式的にはいつでも書き下せるのである。

［例題］　次の一階微分方程式を解け。初期条件は (4.2) 式に同じ。

1）$y' = \delta(t)$　　2）$y' = t + e^{-t}$

3）$y' + y = \delta(t)$　4）$y' + y = \sin(t)$

［解］

1）$L(y') = sY(s) - y(0)$，$L(\delta) = 1$を用いて，両辺をL変換すれば，

$sY - y(0) = 1$，$Y = (y(0)+1)/s$，

解は，$y(t)=L^{-1}(Y)=(c+1)U(t)$ を得る。ここで，$y(0)=c=0$ とすれば，$y(t)=U(t)$ となる即ち，$U'(t)=\delta(t)$.

2）$f(t)=t+e^{-t}$,

$L^{-1}(Y)=U(t)*(t+e^{-t})$
$=U(t)*t+U(t)e^{-t}=t^2/2+(1-e^{-t})$

3）$sY-f(0)+Y=1$,

$Y=\dfrac{c+1}{s+1}$, $L^{-1}(Y)=(c+1)e^{-t}$

4）$f(t)=\sin(t)$, $L^{-1}(Y)=e^{-t}*\sin(t)$
$=\dfrac{1}{2}\{(\sin(t)-\cos(t)+e^{-t}\}$

2．二階定数係数線型微分方程式

二階の定数係数線型微分方程式は，

$$y''+ay'+by=f(t) \tag{1}$$

と書ける。この一般型の解を考察する前に，簡単化した場合（$a=0$, $f(t)=0$）

$$y''+by=0 \tag{2.1}$$

$$y(0)=c,\quad y'(0)=d \tag{2.2}$$

について，まず，解いてみよう。解くべき $Y(s)$ の代数方程式は次の通り。

$$L(y'')+L(y)=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+sY(s)=0 \tag{3}$$

ここで，

$$H(s)=s^2+b \tag{4.1}$$

$$H_0(s)=sy(0)+y'(0)=cs+d \tag{4.2}$$

を用いると，解は，

$$L^{-1}(Y)=L^{-1}\left(\frac{H_0(s)}{H(s)}\right) \tag{5}$$

で与えられる。(5)式を具体的に計算するには，係数bについて，$b=0$, $b>0$, $b<0$ の3つの場合に分ける：

a）$b=0$
$H(s)$　s^2
$L^{-1}(Y)$　$dt+c$

b）$b=-b^2<0$
$H(s)$　s^2-b^2
$L^{-1}(Y)$　$c\cosh(bt)\frac{d}{b}\sinh(bt)$

c）$b=b^2$
$H(s)$　s^2+b^2
$L^{-1}(Y)$　$c\cos(bt)+\frac{d}{b}\sin(bt)$

次に，$f(t)\neq 0$ の場合

$$y''+by=f(t) \tag{6}$$

を考察しよう。(6)式の形式的な解は，$L(f(t))=F(s)$ として，

$$L^{-1}(Y)=L^{-1}\left(\frac{H_0(s)}{H(s)}\right)+L^{-1}\left(\frac{F(s)}{H(s)}\right) \tag{7}$$

で与えられる。(7)式の第一項目は上記で既に求めてあるので，以下，第二項目を問題とする（初期条件(2.2)式において，$y(0)=y'(0)=0$ に取ったことに対応する。）。上記の例から，$f(t)\neq 0$ のときの解の基本型は，$f(t)=\delta(t)$ としたときの解である。従って，まず，$f(t)=\delta(t)$ として(6)式の解を求めて見よう。上記の場合分けに従って（$L^{-1}(\delta(t))=1$ であるから），

a）$b=0$
$1/H(s)$　$1/s^2$
$L^{-1}(1/H(s))=w(t)$　t

b）$b=-b^2<0$
$1/H(s)$　$1/(s^2-b^2)$
$L^{-1}(1/H(s))=w(t)$　$\frac{1}{b}\sinh(bt)$

c）$b=b^2>0$
$1/H(s)$　$1/(s^2+b^2)$
$L^{-1}(1/H(s))=w(t)$　$\frac{1}{b}\sin(bt)$

こうして，$\delta(t)$ のときの解 $w(t)$ が得られれば，(6)式で $f(t)$ の関数型が代わったときにも，解は $w(t)*f(t)$ で与えられる。

(1)式の解を議論しよう。形式的には，解は(7)式で与えられるので，$H(s)$，$H_0(s)$ を書き下せばよい。

$$H(s)=s^2+as+b \tag{8.1}$$

$$H_0(s)=sy(0)+(y(0)+y'(0))=cs+(c+d) \tag{8.2}$$

$H(s)=0$ の根の性質は判別式($D=a^2-4b$)に従って，次の3つの場合にわける必要が生じる：

1）$D=0$ のとき，

$H(s)=(s+a/2)^2$
$w(t)=L^{-1}(1/H(s))=te^{-(a/2)t}$

2）$D>0$ のとき，

$H(s)=(s^2+a/2)^2-D^2/2$
$=(s+(a/2)+e)(s+(a/2)-e)$,
（$D^2/2=e^2$ として）
$w(t)=L^{-1}(1/H(s))=e^{-(a/2)t}\sinh(et)/e$

3）$D<0$ のとき，

$H(s)=(s^2+a/2)^2+D^2/2$
$=(s+(a/2)+ie)(s+(a/2)-ie)$

$w(t)=L^{-1}(1/H(s))=e^{-(a/2)t}\sin(et)/e$
（1），2），3）の $w(t)$ は，$a=0$ とおけば，上記のa），b），c）のそれらに対応している。）

こうして，(1)式の解は，$w(t)$ を用いて，

$$y(t)=w(t)*L^{-1}(H_o(s))+w(t)*f(t)$$

と書ける。1）の場合に具体的な解の表式を書けば，

$$y(t)=te^{-(a/2)t}*L^{-1}(cs+(c+d))+te^{-(a/2)t}*f(t)$$
$$=te^{-(a/2)t}*(A\delta'(t)+B)+te^{-(a/2)t}*f(t)$$

ここで，$L^{-1}(s)=\delta'(t)$，A，Bは任意定数である。

$$=\int_0^t re^{-(a/2)r}(A\delta'(t-r)+B)dr+te^{-(a/2)t}*f(t)$$
$$=(Ct+D)e^{-(a/2)t}+te^{-(a/2)t}*f(t)$$

C，Dは新しい任意定数である。

［例題］　次の二階微分方程式を解け。初期条件は（2.2）に同じ。

1）$y''-y=\delta(t)$　　2）$y''-y=\sin(t)$

3）$y''+3y'+2y=\delta(t)$

4）$y''+3y'+2y=t$

［解］　1）両辺のL変換をとる：

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=sY-sc-d=1,$$
$$(s^2-1)Y=sc+(d+1)$$
$$Y=\frac{sc+(d+1)}{s^2-1}=c\cosh(t)+(d+1)\sinh(t)$$
$$\equiv Ae^{-t}+Be^{t},$$

ここに，$A=(sc-d-1)/2$，$B=(sc+d+1)/2$ である。

2）$y(t)=\sin(t)*\{Ae^{-t}+Be^{t}\}$

3）$s^2Y-sy(0)-y'(0)+3(sY-y(0))+2Y$
$$=s^2Y-sc-d+3(sY-c)+2Y=1,$$
$$(s^2+3s+2)Y=sc+(2c+d+1),$$
$$Y=\frac{sc+(3c+d+1)}{(s+1)(s+2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}=Ce^{-t}+De^{-2t}$$

ここに，$A=(sc+3c+d+1)/2$，$D=(sc-3c-d-1)/2$ である。

4）$y(t)=t*\{Ce^{-t}+De^{t}\}$

3．n階定数係数線型微分方程式

n階の定数係数線型微分方程式は，

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\cdots\cdots+a_ny=f(t) \quad (1)$$

と書ける。解の表式を得るには，$H(s)$，$H_o(s)$ の表式が必要である。L変換の微分公式に従って(1)式における各次数を書けば，

$$L(y^{(n)})=s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-s^{n-3}y''(0)-\cdots\cdots-y^{(n-1)}$$
$$L(y^{(n-1)})=s^{n-1}Y(s)-s^{n-2}y(0)-s^{n-3}y'(0)-s^{n-4}y''(0)-\cdots\cdots-y^{(n-2)}\cdots\cdots$$
$$L(y')=sY(s)-y(0)$$
$$L(y)=Y(s)$$

で，これらを(1)式に加入して整理すると，

$$H(s)=s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots\cdots+a_n \quad (2)$$
$$H_o(s)=s^{n-1}y(0)+s^{n-2}(a_1y'(0)+y(0))+s^{n-3}(y''(0)+a_1y(0)+a_2y(0))+\cdots\cdots+s(y^{(n-1)}+a_1y^{(n-2)}+\cdots\cdots)+y^{(n-1)}(0)+y^{(n-2)}(0)+\cdots\cdots+y(0) \quad (3)$$

を得る。このように，$H_o(s)$ の多項式の次数が，$H(s)$ のそれより低いならば，$L^{-1}(H_0(s)/H(s))$ を計算することができる（実際に，$H(s)=0$ の解をみつけるのは，多項式が因数分解ができる場合を除いて困難である。）二つの特別な場合について，それらの表式を与えておこう。

{1} $H(s)$ の因数が全て一次式で相異なるとき，部分分数分解ができる場合。

このことは，

$$\frac{H_o(s)}{H(s)}=\frac{A_1}{s-r_1}+\frac{A_2}{s-r_2}+\frac{A_3}{s-r_3}+\cdots\cdots+\frac{A_n}{s-r_n} \quad (4)$$

が成り立つような定数 A_1，A_2，$A_3\cdots\cdots A_n$ が存在することである。ここに，係数 A_1 を次のように決める。(4)式の両辺に（$s-r_i$）をかけて，$s\to r_i$ の極限をとれば，

$$\lim_{s\to r_i}\left[\frac{H_o(s)}{H(s)}(s-r_i)\right]=A_i \quad (5)$$

を得る。あるいは，(5)式を‘ロピタルの定理’を用いて，

$$\lim_{s\to r_i}\frac{s-r_i}{H(s)}=\lim_{s\to r_i}\frac{1}{H'(s)}=\frac{1}{H'(r_i)}$$
$$\therefore\quad A_i=\frac{Ho(r_i)}{H'(r_i)} \quad (6)$$

を得る。(6)式を(5)式の右辺に代入してすれば，

$$\frac{H_o(s)}{H(s)}=\sum_i\frac{H_o(r_i)}{H'(r_i)}\frac{1}{s-r_i} \quad (7)$$

と書ける。(7)式を逆変換すれば，

$$L^{-1}\left(\frac{H_o(s)}{H(s)}\right)=\sum_i\frac{H_o(r_i)}{H'(r_i)}e^{r_it} \quad (8)$$

を得る。この式は，Heavisideの展開定理と呼ばれている。

{2} $H(s)$ が重根をもつ場合

$H(s)$ はk重根をもち，残りの項は{1}のように部分分数分解できるものとする。$H_o(s)/H(s)$ が次のように展開できたとする。

$$\frac{H_o(s)}{H(s)}=\frac{q(s)}{(s-r)^k}=\frac{A_1}{s-r}+\frac{A_2}{(s-r)^2}+\frac{A_3}{(s-r)^3}$$

$$+\cdots\cdots+\frac{A_k}{(s-r)^k}+h(s) \qquad (9)$$

ここで，$q(s)$は最初の等式によって定義された関数である。(9)式を逆変換すれば解は得られるが，結果の表式を見やすくするために，係数 A_i を次のように書き換える。(9)式の両辺に$(s-r)^k$をかけると

$$q(s)=A_1(s-r)^{k-1}+A_2(s-r)^{k-2}+A_3(s-r)^{k-3}+\cdots\cdots+A_k+(s-r)^k h(s) \qquad (10)$$

(10)式で，$s\to r$とすれば，

$$q(r)=A_k \qquad (11)$$

を得る。また，(9)式の両辺を$(k-i)$回微分して，$s\to r$とすると，

$$q^{(k-i)}(r)=(k-i)!\,A_i \quad \therefore A_i=\frac{q^{(k-i)}(r)}{(k-i)!} \qquad (12)$$

を得る。こうして，(9)式の係数 A_i の表式が決まった。(12)式を(9)式に代入して逆変換すれば，

$$L^{-1}\left(\frac{q(s)}{(s-r)^k}\right)=L^{-1}\left(\frac{q^{k-1}(r)}{(k-1)!}\,\frac{1}{s-r}+\frac{q^{k-2}(r)}{(k-2)!}\,\frac{1}{(s-r)^2}+\cdots\cdots\right)+L^{-1}(h(s))$$

$$=e^{rt}\left(\frac{q^{k-1}(r)}{(k-1)!}+\frac{q^{k-2}(r)}{(k-2)!}t+\cdots\cdots+\frac{q(r)}{(r-1)!}t^{r-1}\right)+L^{-1}(h(s)) \qquad (13)$$

を得る。

4．変数係数をもつ線型微分方程式

今までは，n階線型微分方程式の係数が定数の場合を取り扱った。ここでは，係数が多項式で与えられる場合を考察しよう。しかし，L変換を使って微分方程式を解くことを目的にしているので，係数の多項式の次数に制限が付く。像空間の微分公式

$$L(t^m f(t))=(-1)^m\frac{d^mF(s)}{ds^m}$$

からわかるように，多項式の次数（m）は，原微分方程式の階数（n）より低くなくては像空間に変換した微分方程式の微分の階数が，原方程式のそれより低くならない。つまり，多項式の次数は，$m\leqq n$でなければ変換して解く利点がない。このことを，二階の微分方程式を例をして説明しよう。二階線型微分方程式を

$$(a_1t+b_1)y''+(a_2t+b_2)y'+(a_3t+b_3)y=f(t)$$

とする。多項式の次数は一次である。上記の方程式をL変換すれば（$L(y)=Y(s)$, $L(f)=F(s)$），

$$\left(-a_1\frac{d}{ds}+b_1\right)(s^2Y-sy(0)-y'(0))+\left(-a_2\frac{d}{ds}+b_2\right)(sY-y(0))+\left(-a_3\frac{d}{ds}+b_3\right)Y=F(s)$$

と書ける。整理すれば，

$$-(a_1s^2+a_2s+a_3)Y'+\{b_1s^2-(2a_1-b_2)s-a_2+b_3\}Y+(b_1y(0)s+a_1y(0)-b_1y'(0)+b_2y(0))=F(s)$$

となる。Yに関しては一階微分方程式になった。従って，この像微分方程式は，例えば，1．の(2)式を使って解ける。その解を逆変換すれば求める原方程式の解が得られる。

1）Laguerreの微分方程式

Laguerreの多項式は，

$$L_n(t)=\frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^ne^{-t}),\ n=0,1,2,\cdots\cdots \qquad (1)$$

によって与えられる。(1)式は次の二階微分方程式の解である（$y=L_n(t)$等とした）。

$$ty''+(1-t)y'+ny=0 \qquad (2)$$

ここに，$L_n(t)=y(t)$等で表わした。このことをL変換の立場から確かめよう。その為に，まず，$L(L_n(t))$を求めておこう。

$$L(L_n(t))=\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-st}e^x\frac{d^n}{dt^n}(t^ne^{-t})\,dt$$

$$=\frac{1}{n!}\int_\infty^0 e^{-(s-1)t}\frac{d^n}{dt^n}(t^ne^{-t})\,dt$$

部分積分を繰り返せば，

$$=\frac{1}{n!}(s-1)^n\int_0^\infty e^{-(s-1)t}t^ne^{-t}dt$$

$$=\frac{1}{n!}(s-1)^n\int_0^\infty e^{-st}t^ndt$$

$$=\frac{1}{n!}(s-1)^n\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}=\left(1-\frac{1}{s}\right)^n\frac{1}{s} \qquad (3)$$

を得る。次に微分方程式を解く。

$$L(ty'')=-\frac{d}{ds}(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0))$$

等を使って(2)式を書き換えると，

$$-(s^2-s)Y'+(-s+1+n)Y=0 \qquad (4)$$

これを解けば，

$$Y=\frac{(1-s)^n}{s^{n+1}}=\left(1-\frac{1}{s}\right)^n\frac{1}{s} \qquad (5)$$

となり，(3)式に一致する。

2）Bessel 微分方程式

n 次の第一種の Bessel 関数は,

$$J_n(t)=\sum_{m=0}\frac{(-1)^m}{\Gamma(n+m+1)\Gamma(m+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2m} \quad (1)$$

で与えられ，次の微分方程式を満たす：

$$t^2y''+ty'+(t^2-n^2)y=0 \quad (2)$$

ここに，$n=0$ とすれば，(1)及び(2)式は,

$$J_0(t)=\sum_m\frac{(-1)^m}{(\Gamma(m+1))^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m}$$

$$=\sum_m\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m} \quad (3)$$

$$ty''+y'+ty=0 \quad (4)$$

と書ける。(3)と(4)式は 0 次の Bessel 関数とそれを満たす方程式である。まず，$L(J_0(t))$を求めよう。

$$L(J_0(t))=\sum_m\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$$

$$\int_0^\infty e^{-st}t^{2m}dt$$

$$=\sum_m\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\frac{(2m)!}{s^{2m+1}}$$

$$=\sum_m\frac{1\cdot2\cdot3\cdots(2m+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2m}\ \frac{(-1)^m}{s^{2m+1}}$$

$$=\sum_m\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-m+1\right)}{m!}\ \frac{1}{s^{2m+1}} \quad (5)$$

この級数は $|s|<1$ のとき収束し,

$$=\frac{1}{s}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{s^{2+1}}} \quad (6)$$

となる。微分方程式(4)式を，L 変換し整理すれば,

$$-(s^2+1)Y'-sY=0 \quad (7)$$

と書ける。これを解けば,

$$Y=\frac{c}{\sqrt{s^2+1}} \quad (8)$$

を得る。ここに，c は任意定数で，$J_0(0)=1$ から $C=1$ が決まり，(6)式に一致することが分かる。

5．偏微分方程式への応用

偏微分方程式に関して，ここでは，独立変数の数は二変数（t,x）の線型偏微分方程式である。二変数関数を $y(t,x)$ で表わす。今，x をパラメーターとみなし，$y(t,x)$ の t についての L 変換を,

$$L_t(y(t,x))=Y(s,x)=\int_0^\infty e^{-st}y(t,x)\,dt \quad (1)$$

で表わす。逆変換（$L_t^{-1}(Y(s,x))$も存在しうるものとする（$L_tL_t^{-1}=1$）。また,

$$L_t\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)=sY(s,x)-y(0,x) \quad (2)$$

等々が成り立つ。偏微分の場合にも，一般に変換には初期条件 $y(0,x)$, $y'(0,x)$ 等の値が必要である。これらを含むことが解法の利点になることは常微分方程式の場合に同じである。

x についての偏導関数に L 変換を行う時には，x についての偏微分と L 積分は交換可能であることが仮定されている：

$$L_t\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(L_t(y)) \quad (3)$$

以下，解法の手順を例題によって示そう。

［例題］ 次の偏微分方程式を解け。

(A) $\dfrac{\partial y(t,x)}{\partial t}=10xt+2\sin(x)$, $y(0,x)=x^2$

［解］ 上式を辺々 L_t 変換する：

$$L_t\left(\frac{\partial y(t,x)}{\partial t}\right)=sY(s,x)-y(0,x)$$

$$=sF(s,x)-x^2 \quad (A-1)$$

$$L_t(10xt+\sin(x))=10x/s^2+2\sin(x)/s \quad (A-2)$$

（A－1）＝（A－2）より,

$$F(s,x)=\frac{x^2}{s}+10x\frac{1}{s^3}+2\sin(x)\frac{1}{s^2}$$

この解を逆変換すれば求める解を得る。

$$L^{-1}(F(s,x))=x^2+10xt^2+2t\sin(x)$$

(B) $\dfrac{\partial^2y(t,x)}{\partial x\partial t}=8xt$, $y(0,x)=x^2$, $y(x,0)=2t$

［解］ (B)式を L 変換すれば,

$$L_t\left(\frac{\partial^2y(t,x)}{\partial x\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(L_t\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(sF(s,x)-y(0,x))$$

$$=s\frac{\partial F(s,x)}{\partial x}-2x=8x/s^2$$

を得る。上式を整理すれば，次のような x についての常微分方程式に書ける：

$$\frac{\partial F(s,x)}{\partial x}=\frac{2x}{s}+\frac{8x}{s^3}$$

この解は容易に書き下せる：

$$F(s,x)=\frac{x^2}{s}+\frac{4x}{s^3}+G(X)$$

これを逆変換し，問の条件を満たすように $G(x)$

を決めれば，

$L^{-1}(F(s,x)) = x^2 + 2xt^2 + 2t$

を得る。

(C) $4\dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{\partial y}{\partial x} = 0,\ y(0,x) = 0,\ y(t,0) = 3t^2$

［解］ 上式を辺々 L_t 変換する：

$$L_t\left(4\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x}\right) = 4(sF(s,x) - y(0,x)) + \frac{\partial}{\partial x}F(s,x) = 0$$

$$4sF(s,x) = -\frac{\partial}{\partial x}F(s,x)$$

xについての一階常微分方程式と見なせば，解は

$F(s,x) = C(s)e^{-4sx}$

と書ける。但し，$C(s)$は定数で，問の条件から決まる。

$$C(s) = \frac{6}{s^3},\quad F(s,x) = e^{-4sx}\frac{6}{s^3}$$

従って，$L_t(F(s,x))$を求めれば，

$$L_t(F(s,x)) = y(t,x) = 0\ (t < 4x)$$
$$= 3(t-4x)^2\ (t > 4x)$$

を得る。

6．積分方程式への応用

L変換は，関数 $f(t)$ を $F(s)$ に変換するものであった。逆に，$F(s)$ を既知として $f(t)$ を求める問題は積分方程式を解く問題になる。一般に，被積分関数に未知関数を含む方程式を積分方程式という。ここでは，積分が合成積（畳み込み）で与えられる特別の二つの型の積分方程式

(A) $\int_0^t g(x-r)y(r)\,dr = f(t)$

(B) $f(t) + \int_0^t g(t-r)y(r)\,dr = y(t)$

をL変換を用いて解くことにしよう。

(A)の場合 — 第一種ヴォルテラ型積分方程式 —

$L(y(t)) = Y(s)$等が存在するとして，(A)の両辺をL変換すれば，

$L(g*y) = G\cdot Y = F,\quad Y = F/G$

となる。従って，形式的な解は，

$y(t) = L^{-1}(Y) = L^{-1}(F/G)$

で与えられる。

［例題1］ $\int_0^t J_0(t-r)y(r)\,dr = \sin(t)$を解け。

［解］ $L(J_0(t)) = \dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}},\quad L(\sin(t)) = \dfrac{1}{s^2+1}$

を使って，両辺をL変換すれば，

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}Y(s) = \frac{1}{s^2+1},\quad Y(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

これを逆変換すれば，

$L^{-1}(Y) = L^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right) = J_0(t)$を得る。

［例題2］ $\int_0^t (t-r)^{-1/2}y(r)\,dr = t^n$ を解け。

［解］

$$L(t^{-1/2}) = \sqrt{\frac{\pi}{s}},\quad L(t^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

両辺をL変換する：

$$\frac{\sqrt{\pi}}{s}Y = \frac{n!}{s^{n+1}},\quad Y = \frac{n!}{\sqrt{\pi}}\ \frac{1}{s^{n-1/2}},$$

これを逆変換すれば，

$$y(t) = L^{-1}(Y) = \frac{n!}{\sqrt{\pi}}\ \frac{t^{n-1/2}}{\Gamma(n+1/2)},$$

$$\left(\Gamma(n+1/2) = \frac{2n-1}{2}\ \frac{2n-3}{2}\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)$$

(B)の場合 — 第二種ヴォルテラ型積分方程式 —

両辺をL変換すれば，

$$F(s) + G(s)*Y(s) = Y(s),$$

$$Y = \frac{F}{1-G},$$

となる。よって，Yの逆変換から$y(t)$が求まる。

［例題3］ $t^2 + \int_0^t \sin(t-r)y(r)\,dr = y(t)$

［解］ 両辺のL変換をとれば，

$$\frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2+1}\cdot Y(s) = Y(s),\quad Y = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^5}$$

$$y(t) = L^{-1}(Y) = t^2 + \frac{1}{12}t^4$$

微積分方程式

積分方程式において，未知関数として導関数が含まれる方程式を微積分方程式という。例えば，次のような組合わせである：

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny + \int_0^t g(t-r)y(r)\,dr = f(t)$$

n階定数係数線型微分方程式の解法での記号を用いれば容易に解は書き下せる。

両辺をL変換して整理すれば次式を得る：

$$\{H(s) + G(s)\}Y(s) = H_0(s) + F(s),$$

$$Y(s) = \frac{H_0(s)+F(s)}{H(s)+G(s)}$$

7．Green関数による境界値問題

7．1．Green関数の導入

二階非同次微分方程式において，二つの積分定数を決める条件が境界値で与えられる場合，例えば，

$$D^2y(x) = y''(x) = -\psi(x) \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{2}$$

について解を求めよう。$\psi(x)$は既知関数とする。(1)の解を求める為に，まず，

$$D^2 g(x,\xi) = -\delta(x-\xi) \tag{3}$$

を満たす関数$g(x,\xi)$を求める。ステップ関数の微分がδ関数であることから，一度積分すると，

$$Dg(x,\xi) = -U(x-\xi) + c$$

もう一度積分すると，

$$\begin{aligned} g(x,\xi) &= -\int_0^1 U(x-\xi)\,dx + cx + d \\ &= -(x-\xi)U(x-\xi) + cx + d \quad (4) \end{aligned}$$

を得る。ここに，$c=c(\xi)$と$d=d(\xi)$は任意関数である。関数$g(x,\xi)$を用いると，(1)の解は，

$$y(x) = -\int_0^1 g(x,\xi)\psi(\xi)\,d\xi \tag{5}$$

と書ける。上式に二階微分演算子D^2を作用させれば(1)式を得る：

$$\begin{aligned} D^2 y &= -\int_0^1 D^2 g(x,\xi)\psi(\xi)\,d\xi \\ &= -\int_0^1 \delta(x-\xi)\psi(\xi)\,d\xi = -\psi(x) \end{aligned}$$

任意関数c, dを求めるには(2)式から，

$$y(0) = d = 0 \tag{6}$$
$$y(1) = -\int_0^1 (1-\xi)\psi(\xi)\,d\xi + c = 0,$$
$$\therefore c = \int_0^1 (1-\xi)\psi(\xi)\,d\xi \tag{7}$$

(6), (7)式を(5)式に代入すれば，

$$\begin{aligned} y(x) &= -\int_0^x (x-\xi)\psi(\xi)\,d\xi + x\int_0^1 (1-\xi)\psi(\xi)\,d\xi \\ &= \int_0^x (x-\xi)\psi(\xi)\,d\xi \\ &\quad + x\int_0^x (1-\xi)\psi(\xi)\,d\xi + \int_x^1 (1-\xi)\psi(\xi)\,d\xi \\ &= \int_0^x \xi(x-1)\psi(\xi)\,d\xi + \int_x^1 (\xi-1)\psi(\xi)\,d\xi \end{aligned} \tag{8}$$

となる。ここに，関数gは，(8)式から，

$$g(x,\xi) = \begin{cases} \xi(1-x), & \xi < x \\ x(1-\xi), & \xi > x \end{cases} \tag{9}$$

である。関数gは，方程式(1)の境界条件(2)に対するグリーン関数（Green function）という。(8)はステップ関数を用いて，

$$g(x,\xi) = \xi(1-x)U(x-\xi) + x(1-\xi)U(\xi-x) \tag{9$'$}$$

と書ける。

(1)式の$\psi(x)$に具体的な関数型を与えて解を求めよう：

$y'' = -x$, $y(0) = y(1)$

解は，(5)式で$\psi(\xi)=\xi$とすれば，

$$\begin{aligned} y(x) &= -\int_0^1 g(x,\xi)(\xi)\,d\xi \\ &= \int_0^x \xi(x-1)(\xi)\,d\xi + \int_x^1 x(\xi-1)(\xi)\,d\xi \\ &= -\frac{1}{6}(x^3 - x) \end{aligned}$$

を得る。この解は，確かに，境界条件$y(0)=y(1)=0$を満たす。

［例題1］　$y'' = -x^2$, $y(0) = y(1) = 0$ を解け。

［解］

$$y(x) = -\frac{1}{12}(x^4 - x).$$

7．2．〝定数変化法〟に基づくGreen関数の求め方

前節でのGreen関数(8)式を別の方法から導こう。

（1－1）式の同次方程式

$$y'' = 0 \tag{1}$$

の二つの解$y_1(x)$, $y_2(x)$が得られているとして，

$$y'' = -\psi(x) \tag{1$'$}$$

の特解を求める。特解をy_1, y_2の一次結合で，

$$y = c(x)y_1(x) + d(x)y_2(x) \tag{2}$$

と書く。$y'' = -\psi(x)$を満たすように係数$c(x)$, $d(x)$を決めればよい：

$$\begin{aligned} y &= c'y_1 + cy_1' + d'y_2 + dy_2' \\ &= cy_1' + dy_2' \end{aligned}$$

ここに，

$$c'y_1 + d'y_2 = 0 \tag{3}$$

とおく。特解

$$y'' = c'y_1' + cy_1'' + d'y_2' + dy_2'' = -\psi$$

であるには，

$$c'y_1' + d'y_2' = -\psi \tag{4}$$

解y_1, y_2のロンスキャンについて，

$$R(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \tag{5}$$

を仮定すれば，係数c', d'は(3), (4)の連立方程式から決まる：

$$c' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \psi & y_2' \end{vmatrix}}{R(y_1, y_2)} = \frac{-y_2\psi}{R(y_1, y_2)},$$

$$d' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \psi \end{vmatrix}}{R(y_1, y_2)} = \frac{y_1\psi}{R(y_1, y_2)} \tag{6}$$

(6)を積分して，(2)に代入すれば，

$$y(x)=y_1(x)\int^x\frac{-y_2(\xi)\psi(\xi)}{R(y_1,y_2)}d\xi$$

$$+y_2(x)\int^x\frac{y_1(\xi)\psi(\xi)}{R(y_1,y_2)}d\xi \tag{7}$$

(7)を境界値を満たす Green 関数

$$=-\int_0^1 g(x,\xi)\psi(\xi)d\xi$$

$$=\int_0^x g(x,\xi)d\xi+\int_x^1 g(x,\xi)d\xi$$

に対応させると，関数 g は，

$$g(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{y_1(x)y_2(\xi)}{R(y_1,y_2)}, & \xi<x\\[2mm] \dfrac{y_1(\xi)y_2(x)}{R(y_1,y_2)}, & \xi>x\end{cases} \tag{8}$$

と書ける。

$y_1=x$，$y_2=1-x$ とすれば，$R(y_1,y_2)=-1$ で，前節(8)式を得る。

$$g(x,\xi)=\begin{cases}\xi(1-x), & \xi<x\\ x(1-\xi), & \xi>x\end{cases} \tag{1-8}$$

上の例からわかるように，境界値を伴う微分方程式の解は，Green 関数 g を求めればよいことになる。そこで，関数 g の性質を(8)式を参考にして考察しておこう。

(1) t を固定した時，x の連続関数で境界条件を満たしている：

$$g(0,1)=g(1,t)=0 \tag{9}$$

(2)変数 x，ξ について，区間 [0，1] で連続かつ対称である：

$$g(x,\xi)=g(\xi,x) \tag{10}$$

しかし，g の導関数は，$x=\xi$ で不連続になる：

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]_{x=\xi+0}-\left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]_{x=\xi-0}=(\xi-1)-\xi=-1 \tag{11}$$

上式は，ステップ関数の微分が δ 関数であることから，

$$g''=-\delta(x-\xi) \tag{12}$$

と書ける。δ 関数の定義に従って，$x=\xi$ を除いて，

(3)　$g''=0$　(12)′

である。境界条件を考慮しない解を主要解ということから，関数 g は $y''=0$ の主要解でもある。同じ方程式を解いても境界条件が異なれば，当然，異なる Green 関数を得るのである。

上述の性質を使って，

$$y''=0,\quad y(0)=y(1)=0$$

のグリーン関数 g を求めよう。まず，$x<\xi$ では，$y''=0$，$y(0)=0$ を満たす解は x に比例し，$x>\xi$ では，$y''=0$，$y(1)=0$ を満たす解は $1-x$ に比例する。x，$1-x$ と $y_1(x)$，$y_2(x)$ で表せば，ロンスキャン

$$R(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & 1-x\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1$$

は 0 でないので，y_1，y_2は一次独立である。それらの一次結合

$$y(x)=c(\xi)y_1(x)+d(\xi)y_2(x)$$

を作る。ここに，係数 $c(\xi)$，$d(\xi)$は，$x=\xi$ において，連続と(11)式の条件から決める：

$$\left.\begin{array}{l}c(\xi)x=d(\xi)(1-x),\ c(\xi)x-d(\xi)(1-x)=0\\ -d(\xi)-c(\xi)=-1,\ c(\xi)+d(\xi)=1\end{array}\right\}$$

上式の係数の行列式は，

$$\Delta=\begin{vmatrix}x & -(1-x)\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$$

である。これより，

$$c(\xi)=1-\xi,\quad d(\xi)=\xi$$

を得る。こうして，Green 関数は，

$$g(x,\xi)=\begin{cases}\xi(1-x), & \xi<x\\ x(1-\xi), & x<\xi\end{cases}$$

と書ける。

［例題 2］　次の微分方程式における Green 関数を求めよ。

(a)　$y''=0,\ y(0)=y'(1)=0$,　(b)　$y''=0,\ y(0)=y'(0)=0$

［解］

(a)		(b)	
$y_1=x$,	$x<\xi$	$y_1=0$,	$x<\xi$
$y_2=\mathrm{const.}=d$,	$x>\xi$	$y_2=ax+b$,	$x>\xi$

連続と導関数の不連続から，

(a)	(b)
$c\xi=d$,	$a\xi+b=0$
$-c=-1$	$a-0=1$

これより，

(a)	(b)
$c=1,\ d=\xi$	$a=-1,\ b=\xi$

求める Green 関数は，

$$g(x,\xi)=\begin{cases}\xi, & \xi<x\\ x, & \xi>x\end{cases}\qquad\Bigg|\qquad g(x,\xi)=\begin{cases}\xi-x, & \xi<x\\ 0 & \xi>x\end{cases}$$

7．3．固有関数行列による Green 関数の表示

$$D^2y(x)=-\psi(x),\quad y(0)=y(1)=0 \tag{1}$$

に加えて，固有値方程式

$$D^2y_n(x)=\lambda_n y_n(x),\ \lambda_n\neq 0,\ n=0,1,2,\ \ldots\ldots \tag{2}$$

が成り立っているとする。固有関数列$\{y_n(x)\}$

については，

$$< y_n(x) \mid y_m(x) > = \delta_{nm} \tag{3}$$

とする。こうして，(1)の解は，

$$y(x) = \sum_{n=0} c_n y_n(x),\ c_n = < y \mid y_n > \tag{4}$$

と表せる。以下，固有関数を用いたGreen関数の表式を作ろう。

今，(1)× $y_n(x)$ −(2)× $y(x)$ を作る：

$$y_n D^2 y - y D^2 y_n = -\psi(x) y(x) - \lambda_n y_n(x) y(x) \tag{5}$$

両辺を区間［0，1］で積分すると，左辺は部分積分を二回行って，境界条件を考慮すれば零である。右辺は，$c_n = < y \mid y_n >$ だから，

$$c_n = -\frac{1}{\lambda_n}\int_0^1 \psi(x) y(x)\,dx \tag{6}$$

と書ける。(6)を(4)に代入すれば，

$$y(x) = -\sum_{n=0}\left(\frac{1}{\lambda_n}\int_0^1 \psi(\xi) y_n(\xi)\,d\xi\right) y_n(x)$$

$$= -\int_0^1\left(\sum_{n=0}\frac{1}{\lambda_n} y_n(\xi) y_n(x)\right)\psi(\xi)\,d\xi$$

$$= -\int_0^1 g(x,\xi)\psi(\xi)\,d\xi \tag{7}$$

で，ここに，関数 $g(x,\xi)$ は，

$$g(x,\xi) = \sum_{n=0}\frac{y_n(\xi) y_n(x)}{\lambda_n} \tag{8}$$

とおいた。(7)式から，$D^2 y(x) = -\psi(x)$ となるには，

$$D^2 y = -\int_0^1\left(\sum_{n=0}\frac{1}{\lambda_n} y_n(\xi) D^2 y_n(x)\right)\psi(\xi)\,d\xi$$

$$= -\int_0^1\left(\sum_{n=0}\frac{1}{\lambda_n} y_n(\xi)\lambda_n y_n(x)\right)\psi(\xi)\,d\xi$$

$$= \int_0^1\left(\sum_{n=0} y_n(\xi) y_n(x)\right)\psi(\xi)\,d\xi = -\psi(x)$$

ここに，

$$\sum_{n=0} y_n(\xi) y_n(x) = \delta(x-\xi) \tag{9}$$

と書ける。上式は，(4)式から，

$$y(x) = \sum_{n=0} c_n y_n = \left(\int_0^1 \sum_{n=0} y_n(\xi) y(\xi)\,d\xi\right) y_n(x)$$

$$= \int_0^1\left(\sum_{n=0} y_n(\xi) y_n(x)\right) y(\xi)\,d\xi$$

$$= \int_0^1 \delta(x-\xi) y(\xi)\,d\xi = y(x)$$

と確認できる。

(2)式（境界条件 $y(0) = y(1) = 0$）から得られる固有値及び固者関数は，

$$\lambda_n = (n\pi)^2$$

$$y_n(x) = \sin(n\pi x)$$

であるから，Green関数(8)式は，

$$G(x,\xi) = \sum_{n=1}\frac{\sin(n\pi\xi)\sin(n\pi x)}{(n\pi)^2}$$

と書ける。この式は，勿論

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \xi(1-x) & x > \xi \\ x(1-\xi) & x < \xi \end{cases}$$

に等価である。区間［0，1］で，このGreen関数

$$G(x,\xi) = \sum_{n=1} a_n(\xi)\sin(n\pi x)$$

をフーリエ展開したときの係数 a_n は

$$a_n = \sum_{n=1}\frac{\sin(n\pi\xi)}{(n\pi)^2}$$

である。

以上は固有値が零でない（$\lambda_n \neq 0$）としたが，固有値が零（例えば，$\lambda_n = 0$）をとる場合にはどのようにすればよいか。

$$g(x,\xi) = \sum_{n=1}\frac{1}{\lambda_n} y_n(\xi) y_n(x)$$

$$= \sum_{n=0}\frac{1}{\lambda_n} y_n(\xi) y_n(x) - y_0(x) y_0(x)$$

と書けるので，

$$D^2 g(x,\xi) = -\delta(x-\xi) + y_0(\xi) y_0(x) \tag{10}$$

を解くことになる。このときの関数 g を拡張されたGreen関数という。

7．4．ラプラス・フーリエ変換によってGreen関数を求める

Green関数は，境界条件つきの微分方程式

$$D^2 g(x,\xi) = -\delta(x-\xi),\ g(0,\xi) = g(1,\xi) = 0 \tag{1}$$

の解である。それ故，微分方程式を解く有力な方法であるラプラスあるいはフーリエ変換が利用できる。

（6．4．1）ラプラス変換による解法

(1)式の両辺のラプラス変換（L変換）をとる：

$$L(D^2 g(x,\xi)) = -L(\delta(x-\xi))$$

ここに，L変換は，

$$L(g(x,\xi)) = \int_0^\infty g(x,\xi) e^{-ax}dx = G(s,\xi) \equiv G$$

$$L(\delta(x-\xi)) = \int_0^\infty \delta(x-\xi) e^{-sx}dx = e^{-s\xi}$$

とする。解くべき代数方程式は次式になる：

$$s^2 G - y(0)s - y'(0) - e^{\xi s}$$

$$G = \frac{1}{s^2}(c' - e^{-\xi e}),\quad c' = y'(0)$$

逆L変換を求めれば，解 $g(x,\xi)$ は，

$$L^{-1}(G) = g(x,\xi) = c'x - U(x-\xi)(x-\xi)$$

(A)

$x-\xi<0$ のとき，　$g(x,\xi)=c'x$

$x-\xi<0$ のとき，　$g(x,\xi)=c'x-(x-\xi)$

で，境界条件を満たすように定数 c' は，

$c'=1-\xi$

と決められる。こうして，求める Green 関数は

$$g(x,\xi)=\begin{cases}(1-\xi)x & (x<\xi)\\ (1-x)\xi & (x>\xi)\end{cases}$$

である。

[例題]　L 変換によって次の微分方程式の Green 関数を求めよ。

(a)　$y''\ 0,\ y(0)=y'(1)=0$

(b)　$y''=0,\ y(0)=y'(0)=0$

[解]

(A)式より，

$$g(x,\xi)=c'x-H(x-\xi)(x-\xi)$$

$x-\xi>0,\ g'(1,\xi)=0$ のとき，

$c'=1$　　　　$c'=0$

$$g(x,\xi)=\begin{cases}x\ (x<\xi)\\ \xi\ (x>\xi)\end{cases}\quad\Bigg|\quad g(x,\xi)=\begin{cases}0 & (x<\xi)\\ \xi-x\ (x>\xi)\end{cases}$$

(6.4.2) フーリエ変換による解法

(1)式の両辺のフーリエ変換(F 変換)をとる：

$$F(D^2g(x,\xi))=-F(\delta\, x-\xi))$$

ここに，F 変換は，

$$F(g(x,\xi))=\int_{-\infty}^{\infty}g(x,\xi)e^{-ikx}dx=G(k,\xi)\equiv G$$

$$F(\delta(x-\xi))=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\xi)e^{-ikx}dx=\frac{1}{2\pi}e^{-ik\xi}$$

と書く。解くべき代数方程式は次式になる：

$$(ik)^2G=-\frac{1}{2\pi}e^{-ik\xi}$$

$$G=\frac{1}{2\pi}\ \frac{e^{-ik\xi}}{(ik)^2}=\frac{1}{2\pi}\ \frac{e^{-ik\xi}}{-k^2}$$

逆 F 変換を求めれば，

$$F^{-1}(G)=g(x,\xi)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty}\frac{1}{-k^2}e^{-ik(\xi-x)}dk$$

$$=\frac{1}{2\pi}2\pi i\times \mathrm{Res}\,[f(x-\xi)]$$

ここに，

$$f(x-\xi)=\frac{1}{-k^2}e^{-ik(\xi-x)}$$

として，留数を計算すれば，

$$\mathrm{Res}\,[f(x-\xi)]=\lim_{k=0}\frac{d}{dk}\{k^2\frac{1}{-k^2}e^{-ik(\xi-x)}\}$$

$$=i(\xi-x)$$

を得る。こうして，

$$g(x,\xi)=\frac{1}{2\pi}\times 2\pi i\{i(\xi-x)\}$$

$=|x-\xi|$ を得る。

以上は，境界条件を用いていないので，この $g(x,\xi)$ は Green 関数ではなく，主要解である。Green 関数を作るには $y''=0$ の一般解 $cx+d$ を加えて境界条件を満たすように係数 c，d を決める。

$$g(x,\xi)=|x-\xi|+cx+d$$

$x-\xi<0$	$x-\xi<0$
$g(x,\xi)=-(x-\xi)+cx+d$	$g(x,\xi)=(x-\xi)+cx+d$
$g(0,\xi)=\xi+d=0$	$g(1,\xi)=(1-\xi)+c+d=0$

これより，

$$\therefore d=-\xi,\qquad c=-(1-2\xi)$$

$g(x,\xi)=-2x(1-\xi)\ |\ g(x,\xi)=-2\xi(1-x)$

7．5．Sturm-Liouvill 型の Green 関数

Green 関数をより一般な二階の微分方程式で考察する。区間 [a，b] において，二階微分演算子を Ω で表わす。微分方程式

$$\Omega(x)y(x)=-\psi(x) \tag{1}$$

を境界条件

$$c_1y(a)+c_2y'(a)=\alpha \tag{1.1}$$

$$d_1y(b)+d_2y'(b)=\beta \tag{1.2}$$

あるいは，

$$y(a)=y(b),\qquad y'(a)=y'(b) \tag{1.3}$$

で解くことである。ここに，y は未知関数，ψ は既知の関数(たとえば，外力として関数型は既知)，α，β は定数，係数 c_i，d_i ($i=1,2$) は同時には零にはならない。以下では，

$$\Omega\Omega^{-1}=\Omega^{-1}\Omega=I \tag{2}$$

を満たす逆演算子も存在することを仮定する。I は単位演算子，Ω^{-1} を微分演算子 Ω の逆ということで積分演算子という。

今，Ω^{-1} を核 $g(x,\xi)$ をもつ積分演算子とすれば，

$$\Omega^{-1}y(x)=-\int_a^b g(x,\xi)y(\xi)d\xi \tag{3}$$

と書く。この積分演算子の核を元の微分演算子の Green 関数ともいう。(2)と(3)式から，

$$y(x)=\Omega\Omega^{-1}y=-\Omega\int_a^b g(x,\xi)yd\xi$$

$$=-\int_a^b\Omega g(x,\xi)yd\xi \tag{4}$$

と書ける。この等式が成り立つには，核 $\Omega g(x,\xi)$ の振る舞いが δ 関数的でなければならない。

即ち，

$$\Omega g(x,\xi)=-\delta(x-\xi) \tag{5}$$

実際，δ関数の性質から，(5)式を(4)式の最右辺に代入すれば，

$$\int_a^b \Omega g(x,\xi) y d\xi=-\int_a^b \delta(x-\xi) y d\xi=-y(x)$$

となる。こうして，(1)式の解は，形式的に

$$y(x)=-\int_a^b g(x,\xi)\psi(\xi)d\xi \tag{6}$$

と書ける。何故なら，(6)式の両辺にΩを作用させ，(5)式を用いれば，

$$\Omega y=\int_a^b \Omega g(x,\xi)\psi d\xi=-\int_a^b \delta(x-\xi)\psi d\xi =-\psi(x) \tag{7}$$

となる。こうして，(1)式の解をみつけることは，(5)式の$g(x,\xi)$を見つけることになる。(5)式から分かるように，$x=\xi$を除いて，$g(x,\xi)$は同次方程式

$$\Omega g=0 \tag{8}$$

の解でもある。

Ωの一般型は，

$$\Omega=p(x)D^2+q(x)D+r(x) \tag{9}$$

と表せるが，ここでは，Ωが対称性

$$(\Omega y,z)=(y,\Omega z) \tag{10}$$

をもつ場合を考える。その条件は次のようにして決まる：

$$(\Omega y,z)=\int_a^b(py''+qy'+ry)zdx$$
$$=[p(y'z-yz')+(p'-q)yz]_a^b-\int_a^b y\{pz''+(2p'-q)z'+(p''-q'+r)z\}dx \tag{11}$$

右辺が$(y,\Omega z)$に等しくなるには，

$$p'=q \tag{12}$$

$$[p(y'z-yz')]_a^b=0 \tag{13}$$

でなければならない。(13)式は境界条件から0にする。以下，微分演算子は，

$$\Omega=p(x)D^2+p(x)'D+r(x)$$
$$=D(p(x)D)+r(x) \tag{14}$$

の型とし，(1)式を解く。(14)のΩをSturm-Liouville型の微分演算子という。まず，Green関数を満たす微分方程式を

$$\Omega g(x,\xi)=-\delta(x-\xi) \tag{15}$$

と書こう。このgは前節のGreen関数の性質を持つことを示そう。

1）対称性$g(x,\xi)=g(\xi,x)$

Green関数$g(x,\xi_i)(i=1,2)$は，

$$\{D(p(x)D)+r(x)\}g(x,\xi_1)=-\delta(x-\xi_1) \tag{16.1}$$

$$\{D(p(x)D)+r(x)\}g(x,\xi_2)=-\delta(x-\xi_2) \tag{16.2}$$

を満たす。$(16.1)\times g(x,\xi_2)-(16.2)\times g(x,\xi_1)$を作ると，

$$g(x,\xi_2)\{D(p(x)D)\}g(x,\xi_1)-g(x,\xi_1)\{D(p(x)D)\}g(x,\xi_2)$$
$$=-g(x,\xi_2)\delta(x-\xi_1)+g(x,\xi_1)\delta(x-\xi_2)$$

である。この両辺をaからbまで積分する：

$$(L.S.)=[g(x,\xi_2)p(x)g'(x,\xi_1)-g(x,\xi_1)p(x)g'(x,\xi_2)]_a^b$$
$$=[p(x)\{g(x,\xi_2)g'(x,\xi_1)-g(x,\xi_1)g'(x,\xi_2)\}]_a^b$$

$$(R.S.)=\int_a^b\{-g(x,\xi_2)\delta(x-\xi_1)+g(x,\xi_1)\delta(x-\xi_2)\}dx$$
$$=-g(\xi_1,\xi_2)+g(\xi_2,\xi_1)$$

(L.S.)が境界条件を考慮して0にできれば，(R.S.)から，

$$g(\xi_1,\xi_2)=g(\xi_2,\xi_1)$$

を得る。

δ関数の性質を使って，不連続点の近傍（$\xi-0,\xi+0$）で(15)式を積分すれば，

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]_{x=\xi-0}-\left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]_{x=\xi+0}=-\frac{1}{p(x)}$$

を得る。

(1)式の解をGreen関数を用いて求めよう。境界条件の具体的な値は後まわしとする。まず，(1)$\times g(x,\xi)-$(15)$\times y(x)$を作ると，

$$g(x,\xi)\Omega y(x)-y(x)\Omega g(x,\xi)$$
$$=-g(x,\xi)y(x)+y(x)\delta(x-\xi)$$

両辺をaからbまで積分する：

$$(L.S.)=\int_a^b\frac{d}{dx}\{g(x,\xi)p(x)y'(x)-y(x)p(x)g'(x,\xi)\}dx$$
$$=[g(x,\xi)p(x)y'(x)-y(x)p(x)g'(x,\xi)]_a^b$$

$$(R.S.)=\int_a^b\{g(x,\xi)y(x)-y(x)\delta(x-\xi)\}dx$$
$$=\int_a^b g(x,\xi)y(x)dx+y(\xi)$$

ここで，変数をxからξに代えて，解$y(x)$は，

$$y(x)=\int_a^b g(x,\xi)y(\xi)d\xi+[g(x,\xi)p(\xi)y'(\xi)-y(\xi)p(\xi)g'(x,\xi)]_a^b$$

と書ける。上式の特別な境界条件の場合には，次のように簡単になる：

(1) 境界条件が$y(a)=y(b)=0$.

$$y(x)=\int_a^b g(x,\xi)y(\xi)d\xi+[g(x,\xi)p(\xi)y'(\xi)]_a^b$$

(2) 境界条件が $y'(a)=y'(b)=0$.

$y(x)=\int_a^b g(x,\xi)y(\xi)d\xi$

$+[-y(\xi)p(\xi)g'(x,\xi)]_a^b$

(平成4年11月25日受理)