多重極展開とデルタ関数

加 藤 初 儀*・石 信 一**

Multipole Expansion and Delta Function

Hatsuyoshi KATO, Shin-ichi ISHI

要 旨

ポアッソン方程式を満たす電荷分布を多重極展開するには，既に多くの手法が知られている。本論文では三つの手法を紹介するが，第二，第三の手法は今までになかったものである。第一の手法は一般的なもので，電荷分布から得られるポテンシャルが展開されるのみで，元となっている電荷の展開は明かになっていない。第二の手法では，ポテンシャルのみでなく電荷分布自体の展開をも超関数の理論から導出できることを示した。第三の手法においては，さらに電荷分布およびポテンシャルの展開が，フーリエ変換と演算子法を組み合わせることにより導出可能であることを示し，多重極展開がデルタ関数と密接に関連していることを明らかにした。

Abstract

It is already known that there are many methods to derive the multipole expansion of a charge density which satisfies Poisson's equation. We show three methods in this paper, but the second and third methods are the newest. The first method is common one. It derives only an expansion of the potential from the charge density, but it does not derive the expansion of the charge density. The second method derives expansions of both the potantial and the charge density from a point of view with the theory of distribution. The both expansions can be derived with the third method that contains Fourier transformation and an operational calculus. With this method we can show that the delta funtion plays an important role in the multipole expansion.

1．序

静電場におけるポテンシャルの多重極展開（multipole expansion）を通じて，デルタ関数（δ関数）とその導関数の物理的意味を解説する。電荷分布の広がりに比べ，十分遠方での位置 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ におけるポテンシャルは

$$v(\mathbf{x})=\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\rho(\mathbf{x}')\,d^3x' \quad (1.1)$$

によって完全に決まる。[1]それゆえ，問題は (1.1) の右辺の積分ができるかどうかである。ここにρは，図のような原点付近の電荷分布，d^3x'はその広がり中にある点 $\mathbf{x}'=(x'_1, x'_2, x'_3)$ を含む微小体積（$d^3x'=dx'_1dx'_2dx'_3$）である。

(1.1) における積分は電荷分布が球対称等の特別な場合にはできるが，一般には容易には行えない。そこで，積分できるように次の近似がなされる。

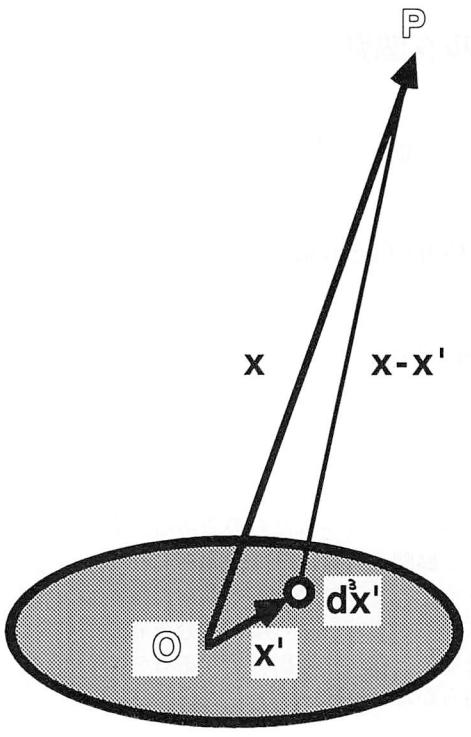
$1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ は，$|\mathbf{x}|\gg|\mathbf{x}'|$ だから，原点Oのまわりでテーラー展開を行う。

$$\frac{1}{4\pi}\int\rho(\mathbf{x}')\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x'$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\rho(\mathbf{x}')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\mathbf{x}'\cdot\nabla)^n\frac{1}{|\mathbf{x}|}d^3x'$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\rho(\mathbf{x}')(-\mathbf{x}'\cdot\nabla)^n d^3x'\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$$

＊ 一般教科講師
＊＊ 一般教科助教授



$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} p^{(n)} o \{-\nabla\}^n g(\mathbf{x})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} v^{(n)}(\mathbf{x}) \qquad (1.2)$$

$$p^{(n)} \equiv \int \rho(\mathbf{x}) \{x\}^n d^3x \qquad (1.3)$$

$$g(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$$

$$v^{(n)}(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{n!} p^{(n)} o \{-\nabla\}^n g(\mathbf{x}) \qquad (1.4)$$

ここに，$p^{(n)}$，$v^{(n)}$はそれぞれ2^n重極子モーメント，2^n重極子によるポテンシャルである。ここで，$\{\ \}^n$は，n階のテンソル積を表し，記号oはテンソルの内積を示しており，その演算結果はスカラーとなる。

2．密度関数の展開による多重極展開

(1.1)はポアッソン方程式

$$\nabla^2 v(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x}) \qquad (2.1)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \qquad (2.2)$$

の解である。(2.1)の解を求める手続きは，$\rho(\mathbf{x})$をデルタ関数に置き換える。

$$\nabla^2 g(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}) \qquad (2.3)$$

外力$\delta(\mathbf{x})$に対する応答関数（グリーン関数）を求める。

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \qquad (2.4)$$

こうして，ポアッソンの方程式の解は

$$v(\mathbf{x}) = g * \rho(\mathbf{x}) = \rho * g(\mathbf{x}) \qquad (2.5)$$

と書ける。ここに，記号＊は合成積（たたみ込み）で，上式の第二と第三式は，合成積が可換であることによる。

積分形で表せば，

$$v(\mathbf{x}) = \int \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \rho(\mathbf{x}')\, d^3x' \qquad (1.1)$$

$$= \int \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}'|} \rho(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, d^3x' \qquad (2.6)$$

である。(1.1)と(2.6)は同値であるから，(2.6)の$\rho(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$を展開しても多重極展開が得られることを示す。そのために，デルタ関数（超関数）に関する次のふたつの定理を利用する。[2]簡単のため，座標は一次元としている。

(1) 超関数fの台が1点$\{a\}$（aは定数）ならば，fは一意的に

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{d}{dx}\right)^n \delta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, \delta^{(n)}(x) \qquad (2.7)$$

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int x^n f(x)\, dx \qquad (2.8)$$

と表される。

(2)

$$\int f(x')\, \delta^{(n)}(x-x')\, dx' = f^{(n)}(x) \qquad (2.9)$$

これらの定理により，(2.6)は次のように展開できる。

$$\int \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}'|} \rho(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, d^3x'$$

$$= \int \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}'|} \sum_{n=0}^{\infty} c_n o \{\nabla\}^n \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, d^3x'$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n o \int \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}'|} \{\nabla\}^n \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, d^3x'$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n o \{\nabla\}^n \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} p^{(n)} o \{-\nabla\}^n g(\mathbf{x}) \qquad (2.10)$$

ただし，この式中のc_nは，(2.8)を三次元に拡張したn階のテンソルである。

3．フーリエ変換と演算子法による多重極展開

フーリエ変換を行った電荷分布の関数形に演算子法を組み合わせても多重極展開が導出可能である。この導出法は一般的に用いられていないが，電荷分布の多重極展開以外にも応用できる利点がある。数学的裏付けは十分に得られていないが，物理的意味と密接に対応づけられるため，以下にこれを示す。

まず，フーリエ変換の公式を示せば次のようになる。

$$f(\mathbf{x})=\int F(i\mathbf{k})\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{3.1}$$

$$F(i\mathbf{k})=\int f(\mathbf{x})\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d^3x \tag{3.2}$$

ここで，(3.1) の被積分関数が次の性質をもつことに着目する。

$$F(i\mathbf{k})\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}=F(\nabla)\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{3.3}$$

つまり，フーリエ変換 F の変数 ik を演算子∇に置き換えることが可能である。これより，(3.1) は次に示すようにデルタ関数に演算子を作用させて表現できる。

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x})&=\int F(\nabla)\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\\ &=F(\nabla)\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\\ &=F(\nabla)\,\delta(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{3.4}$$

一方，(3.2)の被積分関数中の指数関数をテーラー展開して書き換える。

$$\begin{aligned} F(i\mathbf{k})&=\int f(\mathbf{x})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})^n d^3x\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}p^{(n)}\circ\{-i\mathbf{k}\}^n \end{aligned} \tag{3.5}$$

ここで $\{\ \}^n$ は n 階のテンソル積を表し

$$p^{(n)}=\int f(\mathbf{x})\{\mathbf{x}\}^n d^3x \tag{3.6}$$

であって，これも n 階のテンソルとなる。物理的には，与えられた関数 f の n 次のモーメントである。(3.5) 中の記号 o はテンソルの内積を示し，演算結果はスカラーとなる。(3.3) の性質に基づいて (3.5) を書き換えると

$$F(\nabla)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}p^{(n)}\circ\{-\nabla\}^n \tag{3.7}$$

となり，これを (3.4) に代入して次の式を得る。

$$f(\mathbf{x})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}p^{(n)}\circ\{-\nabla\}^n\delta(\mathbf{x}) \tag{3.8}$$

(3.4) は演算子 F の逆演算子 $L=F^{-1}$ が存在すれば，

$$L(\nabla)f(\mathbf{x})=\delta(\mathbf{x}) \tag{3.9}$$

と書き換えれる。この式は演算子 L に対するグリーン関数が f(x) であるかのような表現になっている。通常，グリーン関数は何回かの微分演算を行うと不連続点が現れる性質をもつ。しかし，ここでの f(x) は正則である場合をも含んでいるため，(3.9) は通常の意味での演算子 L に対するグリーン関数を定義するものではないことに注意すべきである。

以上の議論を電荷分布とこれにより生じるポテンシャルに適用すれば，多重極展開が導出可能であることを以下に示す。ポテンシャル v(x) と電荷分布 ρ(x) には次のポアッソン方程式が成立している。

$$\nabla^2 v(\mathbf{x})=-\rho(\mathbf{x}) \tag{3.10}$$

この問題に対するグリーン関数は次式で定義される。

$$\nabla^2 g(\mathbf{x})=-\delta(\mathbf{x}) \tag{3.11}$$

これより，グリーン関数は

$$g(\mathbf{x})=\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \tag{3.12}$$

となる。ポテンシャル v(x) は ρ(x) と g(x) のたたみ込みで

$$v(\mathbf{x})=\int\rho(\mathbf{x}')\,g(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,d^3x' \tag{3.13}$$

と表現できる。ρ(x) を (3.8) にしたがって，演算子とデルタ関数で表せば次のようになる。

$$\rho(\mathbf{x})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}p^{(n)}\circ\{-\nabla\}^n\delta(\mathbf{x})=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{(n)}(\mathbf{x}) \tag{3.14}$$

$$p^{(n)}\equiv\int\rho(\mathbf{x})\,\{\mathbf{x}\}^n d^3x \tag{3.15}$$

$$\rho^{(n)}(\mathbf{x})\equiv\frac{1}{n!}p^{(n)}\circ\{-\nabla\}^n\delta(\mathbf{x}) \tag{3.16}$$

(3.14) を (3.13) に代入して整理すれば次のようになる。

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x})&=\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}p^{(n)}\circ\{-\nabla'\}^n\delta(\mathbf{x}')g(\mathbf{x}-\mathbf{x}')d^3x'\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}p^{(n)}\circ\int g(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\{-\nabla'\}^n\delta(\mathbf{x}')d^3x'\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}p^{(n)}\circ\{-\nabla\}^n g(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{3.17}$$

このようにして得られた (3.15) と (3.17) は1節で示した電荷の多重極展開とその各項から得られるポテンシャルと一致するものである。また，(3.16)

は電荷分布が原点のみで非零となるデルタ関数で表現でき，原点に多重極が存在することを明確に表している。

n＝0，1，2を示すと，次表のようになる。これは，単極子（一重極子），二重極子，四重極子のモーメントと，それらによる電荷分布およびポテンシャルである。参考として，導出に用いたベクトル演算の公式も示す。

4 結　　語

静電場におけるポテンシャル導出での一般的手法を1節と2節で示し，多重極展開の概念を説明した。3節で示した，フーリエ変換と演算子法を用いて多重極展開を導出したものは今までになかったものである。ただし，電荷分布の多重極展開を行う通常の手法では，系の対称性や等方性を考慮して，四重極のトレースを零にしたり，球関数を用いたりして多重極展開を表現する。[3)]これらを，3節に示した手法では考慮しなかったが，細部にとらわれずに多重極展開とデルタ関数およびその導関数との関連を明確に示すことができた。

文　　献

1）理論電磁気学〈第二版〉，砂川重信，紀伊国屋書店，1973

2）代数解析学の基礎，柏原正樹，河合隆裕，木村達雄，紀伊国屋書店，1980，p. 162

応用偏微分方程式Ⅰ，B. C. ウラジミロフ（飯野理一他訳），文一総合出版，1977，p. 131

3）電磁気学，スレータ・フランク（柿内賢信訳），丸善株式会社，1961，p 38，p 230

（平成4年11月30日受理）

$p^{(0)}=\int \rho(x)\,d^3x$	$\rho^{(0)}(x)=p^{(0)}\,\delta(x)$	$v^{(0)}(x)=\dfrac{p^{(0)}}{4\pi\lvert x\rvert}$
$p^{(1)}=\int \rho(x)\,x\,d^3x$	$\rho^{(1)}(x)=-\,p^{(1)}\cdot\nabla\,\delta(x)$	$v^{(1)}(x)=\dfrac{p^{(1)}\cdot e}{4\pi\lvert x\rvert^2}$
$p^{(2)}=\int \rho(x)\,x\,x\,d^3x$	$\rho^{(2)}(x)=\dfrac{1}{2}\,p^{(2)}:\nabla\nabla\,\delta(x)$	$v^{(2)}(x)=\dfrac{p^{(2)}:(3\,e\,e-1)}{8\pi\lvert x\rvert^3}$

$$e\equiv\frac{x}{|x|}=\nabla|x| \qquad 1\equiv\nabla\,x$$

$$\nabla\frac{1}{|x|}=-\frac{e}{|x|^2}$$

$$\nabla\nabla\frac{1}{|x|}=-\frac{1-3\,e\,e}{|x|^3}$$

$$\nabla e=\frac{1-e\,e}{|x|}$$