応用数学の教材作成 Ⅲ
― 複素関数論の基礎 ―

石　　信　一*・中　野　　渉**

Studies of teaching materials in Applied Mathematics III
— Elements of complex analysis —

Shin-ichi ISHI and Wataru NAKANO

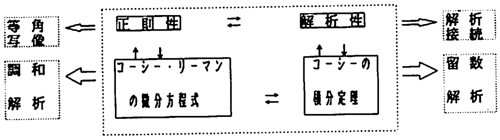
要　旨

一複素変数の複素解析の基礎について解説した。内容は，複素関数の微分・積分と解析接続である。幾つかの問題とそれらの解を載せた。

This paper is an outline of complex analysis of one complex variable. The contents are differential and integral calculus of one complex variable and analytic contination. Some problems and their solutions are added.

§0. 始　め　に

複素関数論あるいは単に関数論は，一変数複素変数の複素関数の微分積分である。応用の立場から言えば，関数論は，線型代数とともに，計算手段と言葉（術語）を与える。関数論の記述は，応用分野が何かによって記述の力点が異なるであろう。本稿は，関数論の基本的概念の概説である。従って，特定の分野を想定していない。以下の内容を図式的に示すと次のようになる：



長方形の大枠が関数論の基礎概念で，その外が基礎概念の発展分野である。

§1. 複素関数の微分

1. 1. 複素関数の正則性

複素変数の関数は，複素（数）平面C上の各点 z に複素数 w を対応させることである。あるいは，複素平面から複素平面への写像という。これを $w=f(z)$ あるいは，$f: z \to w$ と記す。関数 w を定める複素平面上の領域(domain)を定義域，w の値のそれを値域(range)という。簡単化のため，ここでは複素平面上において，閉曲線で囲まれた部分を領域と言っておこう。

複素関数を実関数の言葉に翻訳するために，z を実部と虚部に分けたように（$z = x + iy$），関数 $z = f(z)$ を，

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{1}$$

と分けて記す。これを $z \to w$ の対応で表せば，$(x, y) \to (u(x, y), v(x, y))$ である。また，複素共役 $\bar{z}$ を形式的に独立変数とみなして，$f(z, \bar{z})$ と表記することもある。

複素関数 $f(z)$ において，z がある点 z_0 に限りなく近づくとき，$f(z)$ の値が複素数 α に限りなく近づくとする。このことを，

$$f(z) \to \alpha \quad (z \to z_0), \lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha \tag{2}$$

で表す。例えば，

---

*　助教授　一般教科
**　助教授　一般教科

$f(z)=\frac{1}{z}$　のとき，$\lim_{z\to 1+i}\frac{1}{z}=\frac{1}{1+i}$

$f(z)=\frac{1}{z-i}$ならば，$\lim_{z\to 1+i}\frac{1}{z-i}=1$

等々である。

$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}$の場合には極限値は定まらないが，無限大を表す記号∞を導入して$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}=\infty$と書こう。また，$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z}=0$と書く。複素平面上に∞を加えた平面を拡張された複素平面（$C\cup\infty=\bar{C}$）という。$|z|\to\infty$の点を無限遠点と呼ぶ。このような無限に広がった平面上の点を球面によって表示しよう。今，複素平面の実軸と虚軸をζ，η軸に対応させ，平面に垂直にξ軸を定め，原点での単位球面S（$\zeta^2+\eta^2+\xi^2=1$）をとる（図1参照）。

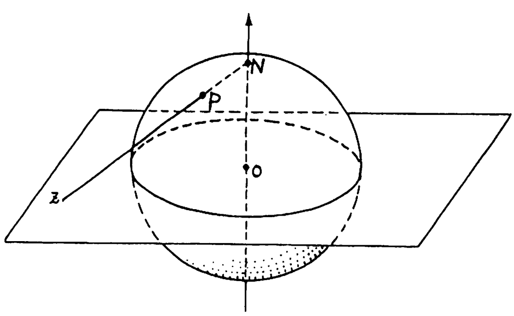


図1　複素（数）球面（リーマン球面）

この球面上の点（0，0，1）を北極Nと呼ぶ。点Nと複素平面上の複素数$z(=x+iy=(x,y,0))$とを結ぶ直線が球面Sと交わる点（ζ，η，ξ）をPとしよう。点Pを複素数zに対応させる。点N，P，zが一直線上にあるという条件から，点zとPの座標の関係式は

$$x=\frac{\zeta}{1-\xi},\quad y=\frac{\eta}{1-\xi},\quad z=\frac{\zeta+i\eta}{1-\xi}$$

$$\zeta=\frac{x}{x^2+y^2+1},\ \eta=\frac{y}{x^2+y^2+1},\ \xi=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$$

で与えられる。このように，点N以外のS上の点は平面上の複素数に対応する。点Nは無限遠点∞に対応させる。半球面$\xi>0$には円の外部$|z|>1$，半球面$\xi<0$には円の内部$|z|<1$を対応している。この対応を立体射影という。複素数を表すと考えられる球面を複素球面あるいはリーマン球面という。

複素平面上の$|z|\to\infty$での振舞いは，$w=1/z$と変換して，$w=0$での振舞いと解釈することになる。

関数$f(z)$の定義域内の点z_0で，極限値$\lim_{z\to z_0}f(z)$が存在して，$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$となるとき，$f(z)$は点$z_0$で連続であるという。$f(z)$が領域Dの各点で連続であれば，$f(z)$はその領域で連続である。例えば，

$f(z)=z$は全複素平面で連続.

$f(z)=1/z$は$z=0$を除いて全平面で連続である。

複素関数の正則性は，複素関数$f(z)$の微分に関わる事柄によって規定される。関数$f(z)$の微分可能性とは，$f(z)$の定義域Dの点z_0で，極限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{df}{dz}=f'(z)\qquad(3)$$

が存在することである。この極限値は，複素平面上全ての方向からz_0に近づくとき同一でなければならない。実関数の微分の場合には，一方向からの接近で定義された。これと比較すると，複素関数の微分の条件は大変強い制限になっている。しかし，この強い制限が，複素関数の性質を制約（統制）することになる。

zの関数としての$f'(z)$を導関数，$z=z_0$での$f'(z)$の値$f'(z_0)$を微分係数という。

[例] 関数$f(z)=z$と$\bar{z}$の微分可能性について調べる。

$f(z)=z=x+iy$として，定義式に従って計算すれば，

$$\frac{z+\Delta z-z}{\Delta z}=\frac{(x+\Delta x)+i(y+\Delta y)-(x+iy)}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$=\frac{\Delta x+i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=1$$

よって，$f(z)=z$は任意の点で微分可能といえる。

$f(z)=\bar{z}=x-iy$として，定義式に従って，

$$\frac{z+\Delta z-z}{\Delta z}=\frac{(x+\Delta x)-i(y+\Delta y)-(x-iy)}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$$

で，この極限値は，$\Delta z\to 0$の近づき方に依存する。例えば，直線の傾きm（$\Delta y=m\Delta x$）に沿った極限をとれば，

$$\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\Delta x-im\Delta x}{\Delta x+im\Delta x}=\frac{1-im}{1+im}$$

となり，mに依存した値となる。即ち，関数f(z)=$\bar{z}$ は，任意の点では微分可能ではない。

各点で微分可能な関数を正則関数という。よって，関数がある点で正則とは，各点において連続で，微分可能であることをいう。

次に，関数f(z)が微分可能である条件を調べる。関数f(z)=u(x, y)+iv(x, y)において，微分可能とは，

$$f'(z)=\alpha+i\beta \qquad (4)$$

となるαとβを定めることである。定義に従って，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u(x,y)+i\Delta v(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}$$

と書ける。これより，

$$\Delta u(x,y)+i\Delta v(x,y)=(\alpha+i\beta)(\Delta x+i\Delta y)$$
$$=(\alpha\Delta x-\beta\Delta y)+i(\beta\Delta x+\alpha\Delta y) \qquad (5)$$

として，$\Delta z\to 0$としてα, βを決める。まず，$\Delta z=\Delta x$（実軸に平行に近づく）の場合，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}=u_x,\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{\partial v}{\partial x}=v_x$$

こうして，

$$f'(z)=\alpha+i\beta=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=u_x+iv_x \qquad (a)$$

と書ける。次に，$\Delta z=i\Delta y$（虚軸に平行に近づく）の場合，同様にして，

$$f'(z)=\alpha+i\beta=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=v_y-iu_y \qquad (b)$$

従って，(a), (b)式よりα, βを等値すれば，u, vの満たすべき関係式は，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}\quad (u_x=v_y), \qquad (6.a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\quad (u_y=-v_x) \qquad (6.b)$$

でなければならない。この関係式をCauchy-Riemannの微分方程式という。以下，単にC－Rと記す。

(6)式の物理的内容は，例えば，二次元ベクトル場V=(u, −v)に対応させることでわかる：

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{div}V=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{rot}V=0$$

C－Rは，無源無渦の場を記述するといえる。

［問1］ C－Rを極座標（r, θ）で表せ。

［解］ $x+iy=re^{i\theta}$より，

$$dx+idy=dre^{i\theta}+ire^{i\theta}d\theta.$$

$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta},\quad \frac{\partial u}{\partial\theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$$

［問2］ (6)$\Leftrightarrow\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}}\Leftrightarrow\dfrac{\partial\bar{f}}{\partial z}$ であることを示せ。

［解］ $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$として，x, yについて解いて，

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad y=\frac{z-\bar{z}}{2i}.$$ zと$\bar{z}$は独立でないけれど，形式的に独立とみなす。

$$\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{\partial x}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\partial y}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2i}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad (A)$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{\partial x}{\partial\bar{z}}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial\bar{z}}\frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad (B)$$

$f=u+iv$, $\bar{f}=u-iv$を(A), (B)に代入し，＝0とおけば，

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)=\frac{1}{2}\{(u_x-v_y)+i(u_y+v_x)\}$$

$$\frac{\partial\bar{f}}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u-iv)=\frac{1}{2}\{(u_x-v_y)-i(u_y+v_x)\}$$

C－R関係式を得る。従って，f(z, $\bar{z}$)が正則関数であればzのみ，$\bar{f}$(z, $\bar{z}$)は$\bar{z}$のみの関数であることを示す。

［問3］ ｜f(z)｜＝const. であれば，f(z)＝const. であることを示せ。

［解］ f(z)=u(x, y)+iv(x, y), $|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$であるから，$u^2+v^2=c^2$（c=0ならばf(z)=0は明らかだからc≠0）とする。両辺をx(y)で微分すれば，

$$uu_x+vv_x=0 \qquad (a)$$

$uu_y+vv_y=0\to vu_x-uv_x=0$（C－R関係式より） (b)

u_x, v_xの係数が，$\begin{vmatrix} u & v\\ v & -u\end{vmatrix}=-(u^2+v^2)=-c^2\neq 0$だから，

$u_x=v_x=0\to u_y=v_y=0$。よって，f(z)＝const. である。

（6.a）式の両辺をx,（6.b）式の両辺をyについて微分して二式を加えると，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (7.a)$$

となる。同様にして，vについても，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \qquad (7.b)$$

を得る。ここに，微分演算子の記号（ラプラシアンという）

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\Delta \tag{8}$$

を導入すれば，上式は，簡単に，

$$\Delta u=\Delta v=0 \tag{7}$$

と書ける。(7)式を(二次元) ラプラス(Laplace)方程式といい，解 u , v を調和関数という。

［問 4 ］ (7) $\Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}=0$　であることを示せ。

［解］ 上問(A), (B)を用いて，

$$\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)=\frac{1}{4}\Delta$$

1．2．逆関数

$w=f(z)$ で $f(z)$ が正則で $f'(z)\neq 0$ のとき，z と w を入れ替えた $z=f(w)$ が w について解けるとき， $w=g(z)=f^{-1}(z)$ を $f(z)$ の逆関数という。 $f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}(\Delta w/\Delta z)\neq 0$ であれば，逆関数も正則である：

$$\frac{dg(z)}{dz}=\frac{df^{-1}(z)}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta w}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta w}{\Delta z}}=\frac{1}{\dfrac{df(z)}{dz}}$$

$w=f(z)$ が正則で，その逆関数も正則であるとき， $f(z)$ を双正則という。

［例］ $w=z^2$ の逆関数は $\pm z^{1/2}$ である。 z の値に対して， w の値は 2 つ決まるので 2 価関数である。しかし， $0\leqq\theta<2\pi\ (z=re^{i\theta})$ に限れば $z^{1/2}$ が唯一の逆関数である。このとき， $z^{1/2}$ の導関数は，

$$\frac{dz^{1/2}}{dz}=\frac{1}{\dfrac{dw^2}{dz}}=\frac{1}{2w}=\frac{1}{2z^{1/2}}$$

である。 $z=re^{i\theta}$ で表せば， $\pm z^{1/2}$ は，

$$z^{1/2}=r^{1/2}e^{i\theta/2}=w_0$$

$$-z^{1/2}=r^{1/2}e^{-i\theta/2}=w_1$$

と書ける。偏角を一般角 $\theta+2n\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2$, ……) を用いて表せば， w_0 , w_1 は，

$$w_0=r^{1/2}e^{i(\theta+2n\pi)/2} \qquad (\text{n は偶数})$$

$$w_1=r^{1/2}e^{-i(\theta+2n\pi)/2}=w_0e^{-in\pi} \qquad (\text{n は奇数})$$

と書ける。つまり，偏角 θ から出発して原点の周りを一周して $\theta+2\pi$ になったとき $w_0\rightarrow w_1$ に移り，もう，一周すれば $w_1\rightarrow w_0$ に戻る。そこで， w_0 , w_1 に対応する二枚に複素平面 σ_0, σ_1 を用意して，それらを重ねて原点 0 と∞を結ぶ正の実軸に切り口をつけ， σ_0 の切り口の上側と σ_1 の切り口の下側を貼り付け， σ_0 の下側と σ_1 の上側を貼り付けた一枚の面を考える。 $\theta\rightarrow\theta+2\pi$ のとき，つまり，正に実軸を横切るとき $\sigma_0\rightarrow\sigma_1$ に移り， $\theta+2\pi\rightarrow\theta+4\pi$ に対して， $\sigma_1\rightarrow\sigma_0$ に戻る。こうして， z と w の対応が 1 対 1 となる。このような面を $w=z^{1/2}$ のリーマン面という。リーマン面は，領域を広げて多価関数を一価関数にすることである。 $w=z^{1/2}$ において， w_0 , w_1 を二つの枝， $z=0$ を分岐点という。

1．3．等角写像

実関数の導関数の意味付けとして，接線の傾きという幾何学意味があった。ここに，複素関数のそれについて考察しよう。

$w=f(z)=u+iv$ が $z=z_0$ で微分可能で， $f'(z_0)\neq 0$ とする。今， z 平面上の点 z_0 が w 平面上の点 w_0 に写像されるとする($z_0\rightarrow w_0$)。点 z_0 からでる二つの曲線を C_1 , C_2 とすれば，それらの上の点は w 平面上の w_0 から出る二曲線 C_1' , C_2' に写像される。 z 及び w 平面上の二曲線のなす角をそれぞれ θ , θ' する。角 θ , θ' は，点 z_0 , w_0 での二曲線に対する接線のなす角に等しいので，接線を辺とする微小三角形 $\Delta\, z_0z_1z_2$ ， $\Delta\, w_0w_1w_2$ について以下考察する（図 2 ）。

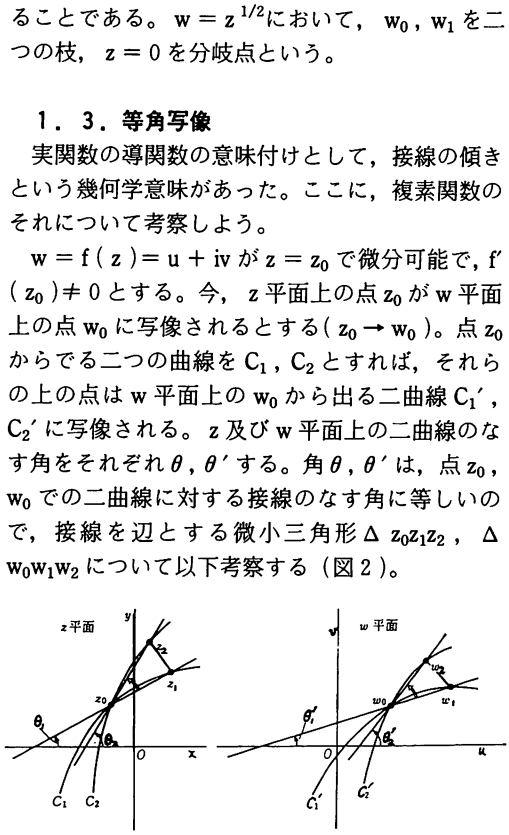


図2　等角写像

図にあるように，接線と x 軸のなす角を θ_1, θ_2 とすれば，

$$z_1-z_0=r_1e^{i\theta}$$

$$z_2-z_0=r_2e^{i\theta}$$

とかけるので， $\Delta\, z_0z_1z_2$ における辺の比は，

$$\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}=\frac{\Delta z_2}{\Delta z_1}=\frac{r_2}{r_1}e^{i(\theta_2-\theta_1)}=\frac{r_2}{r_1}e^{i\theta} \tag{1}$$

となる。 $\Delta\, w_0w_1w_2$ に対しても，同様に，

$$\frac{w_2-w_0}{w_1-w_0}=\frac{\Delta w_2}{\Delta w_1}=\frac{r_2'}{\Delta w_1'}e^{i(\theta_2'-\theta_1')}=\frac{r_2'}{r_1'}e^{i\theta'} \tag{2}$$

と書ける。よって，それらの比(2)／(1)をとると，

$$\frac{\dfrac{\Delta w_2}{\Delta w_1}}{\dfrac{\Delta z_2}{\Delta z_1}}=\frac{\dfrac{r_2'}{r_1'}e^{i(\theta_2'-\theta_1')}}{\dfrac{r_2}{r_1}e^{i(\theta_2-\theta_1)}}=\frac{\dfrac{r_2'}{r_1'}}{\dfrac{r_2}{r_1}}e^{i(\theta'-\theta)} \quad (3)$$

となる。ここに，複素関数の点 z_0 での導関数は，任意の方向から z_0 に近づいても同一

$$\lim_{\Delta z_1\to 0}\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1}=\lim_{\Delta z_2\to 0}\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2}$$

で，よって，(3)式の左辺は1となる：

$$1=\frac{\dfrac{r_2'}{r_1'}}{\dfrac{r_2}{r_1}}e^{i(\theta'-\theta)},$$

こうして，

$$\left.\begin{aligned}\frac{r_2'}{r_1'}&=\frac{r_2}{r_1}\\ \theta&=\theta'\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

を得る。上の関係式は，辺の線分比の不変性及び角の不変性を示すもので，三角形$\Delta\ z_0z_1z_2$ と$\Delta\ w_0w_1w_2$ が相似であることを意味している。この性質（(4)式）をもつ写像を等角写像という。

$f(z)$, $g(z)(\neq 0)$ が多項式のとき，$f(z)/g(z)$を有理関数という。ここでは，f，g はともに一次関数として$(\alpha,\gamma\neq 0)$

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \qquad (\alpha\gamma-\beta\delta\neq 0) \quad (5)$$

の関数（写像）について考察する。w を一次分数関数あるいは単に一次関数という。写像を強調するときには，一次分数写像（変換）あるいはメービス写像（変換）と呼ばれる。

上式は，

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\alpha\gamma-\beta\delta}{(\gamma z+\delta)^2}\neq 0 \quad (z=-\delta/\gamma\text{を除く})$$

で，正則であるから，$z\to w$ は等角写像である。w を変形すれば，

$$w=\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\alpha\gamma-\beta\delta}{\gamma^2}\ \frac{1}{z-(\delta/\gamma)} \quad (6)$$

$$=C_1-\frac{C_2}{z-C_3}\left(C_1=\frac{\alpha}{\gamma},\ C_2=\alpha\gamma-\beta\delta,\ C_3=\frac{\delta}{\gamma}\right)$$

と書ける。上式(6)は，次の四つの合成写像である：

$$z\xrightarrow{①}z-C_3\xrightarrow{②}\frac{1}{z-C_3}\xrightarrow{③}-C_2\frac{1}{z-C_3}\xrightarrow{①}C_1-\frac{C_2}{z-C_3}$$

ここに，①は平行移動，②は反転，③は相似写像（変換）を示す。①−③は，勿論それ々等角写像である。逆関数 $w\to z=f^{-1}(w)$は，

$$z=f^{-1}(w)=\frac{\delta z-\beta}{-\gamma z+\alpha} \quad (7)$$

と書ける。

上記で一次変換と呼ばれる理由は次のことによる：$z=z_1/z_2$ (但し，$z_1/0=\infty$に対応する) $w=w_1/w_2$ で与えられるとすると，

$$\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix} \quad (8)$$

で，行列 T による一次変換が(5)式と同値であることによる。平行移動，反転，相似変換に対応する行列 T は，

$$①\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ ②\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ ③\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

で，恒等変換 E は，

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

に対応している。

§2．複素関数の積分

2．1．コーシーの積分定理

複素関数と領域 D 内の曲線 C に対して線積分$\int f(z)\,dz$ を定義しよう。曲線 C は次のような曲線である。始点(α)と終点(β)の両端をもち，有限の長さ及び始点から終点への向きをもっている。途中では，それ自身と交差しない。特に，始点と終点が一致して曲線を閉曲線という。閉曲線における向きは，時計針の逆回りを正にとる。この閉曲線が，連続的に変形して一点に縮められるような性質の領域を単連結という。以下，領域といえば，単連結である。

曲線 C の始点 z_0 から終点 z_n の間に $n-1$ 個の分

$$z_0\ (=\alpha),\ z_1,\ z_2\cdots\cdots z_{n-1},\ z_n\ (=\beta)$$

点をとって，C を分割し，各小部分 $[z_{i-1}, z_i]$ 上に任意の点 ξ_i をとり，近似和

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(z_i-z_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta z_i$$

を作る。分割点 z_i をたくさんとり，$n\to\infty$の極限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta z_i=\int_C f(z)\,dz \quad (1)$$

として線積分を定義する。

曲線 C の終点を変数 z としておけば，$\int f(z)\,dz$ は，α と z のみで決まり曲線 C の取り方に依存しない：

$$\int_C f(z)\,dz=\int_\alpha^z f(z)\,dz=F(z)-F(\alpha) \quad (2)$$

ここに，右辺を z の関数とみて，$F(z)$を$f(z)$

の原始関数という。

$$\frac{dF(z)}{dz}=f(z) \tag{3}$$

上記(1)式を実関数 x，y を用いた表式に書き直せば，

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C (u+iv)(dx+idy)$$

$$=\int_C (udx-vdy)+i\int_C (udy+vdx) \tag{4}$$

と書ける。また，曲線 C を

$z=z(t)=x(t)+iy(t)$

と媒介変数 t を用いて表すと，

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C f(z(t))\,z'(t)\,dt \tag{5}$$

と書ける。右辺は実関数 t の線積分である。

$f(z)=1$ のとき，$\int_C f(z)\,dz$ は曲線の長さ $|\beta-\alpha|$ を示す。

上記線積分の幾つかの性質を上げておこう：

(1)　$\int_C \{af(z)\,dz+bg(z)\}\,dz$

$$=a\int_C f(z)\,dz+b\int_C g(z)\,dz$$

(2)　$\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz=\int_{C_1} f(z)\,dz+\int_{C_2} f(z)\,dz$

(3)　$\int_{-C} f(z)\,dz=-\int_C f(z)\,dz$

(4)　$\oint f(z)\,dz=0$　（$\oint$は閉曲線 C の周回積分。但し，閉曲線の内部には特異点を含まない）

(5)　閉曲線 C の内部にお互いに交わらない閉曲線 C_i $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$がある場合（図3参照）

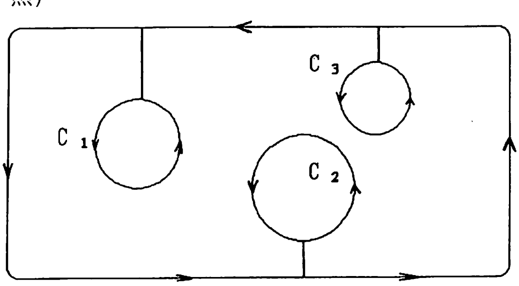


図3　閉積分路

$$\int_C f(z)\,dz=\sum_{i=1}^{n}\int_{C_i} f(z)\,dz$$

(1)−(3)は自明であろう。(4)は，Cauchy の積分定理である。領域 D 内で f(z)が正則関数であれば，上記(4)式から，

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C (udx-vdy)+i\int_C (udy+vdx)$$

$$=-\iint\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy+i\iint\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=0$$

となる。上記最後の等式は，Green の公式に C−R を利用した。積分値は閉曲線の形，積分路に依存しない。領域 D 内で，$\oint f(z)\,dz=0$ であれば，f(z)は正則であることが言える。

上記の事柄には，次の微分形式による表記が便利（外積の記号∧は省略している）である：

$f(z)\,dz=\phi=(u+iv)(dx+idy)=\phi_1+i\phi_2$,

$$\left.\begin{aligned}\phi_1&=udx-vdy\\ \phi_2&=vdx+udy\end{aligned}\right\}$$

とすれば，

$d\phi=d\phi_1+id\phi_2$

$$=-\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy+i\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

但し，$dxdx=dydy=0$，$dxdy=-dydx$。故に，C−R より $d\phi=0$ でなければならない：

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C \phi=\int_D d\phi=0$$

他方，$f(z)=f(x,y)$の代わりに，$f(z,\bar{z})$とすれば，

$$df=\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

であるから，

$$\int_C f(z)\,dz=\int_D dfdz=\int_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}dzd\bar{z}\ (dzdz=d\bar{z}d\bar{z}=0)$$

と書ける。このとき，C−R は $\partial f/\partial \bar{z}=0$（§2，問2参照）であるから，再び，

$$\int_C f(z)\,dz=0$$

を得る。

(5)は，(4)の拡張で，

$$\int_C f(z)\,dz-\sum_{i=1}^{n}\int_{C_i} f(z)\,dz=0$$

より，明らかである。

［問］次式の周回積分を計算せよ。

但し，n は任意の整数とする。

$$\oint_C (z-z_0)^n dz=\begin{cases}2\pi i & (n=-1)\\ 0 & (n\neq-1)\end{cases}$$

［解］$n\geqq0$ であれば，(4)から$\oint(z-z_0)^n dz=0$ である。$n<0$ では，極座標　$z-z_0=ae^{i\theta}$，$dz=iae^{i\theta}d\theta$ に変換して，

$$\oint\frac{1}{(z-z_0)^n}dz=\int\frac{iae^{i\theta}d\theta}{(ae^{i\theta})^n}$$

これより，次式の結果を得る：

$$(n=1)=\int_0^{2\pi} id\theta\ =2\pi i$$

$$(n \neq 1) = \frac{i}{a^{(n-1)}}\int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta}\, d\theta = 0$$

正則でなくても$\oint f(z)\,dz = 0$となることに注意する。

関数$f(z) = 1/z$は，$z = 0$を除いて正則である。正則でない点を特異点という。特に，特異点（今の場合は$z = 0$）を除いた近傍で正則であるとき，その特異点を孤立特異点という。

[例]

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 + 3z + 1} = \frac{1}{(2z+1)(z+1)}$$

$z = -1/2, -1$は関数$f(z)$の特異点である。

2．2．コーシーの積分公式とテイラー展開

今，複素平面上の任意の点をαで表すと，関数$1/(z-\alpha)$は，$z = \alpha$を除いて正則である。閉曲線Cの内部で正則関数を$f(z)$として，関数$f(z)/(z-\alpha)$を考える。この関数は，$z = \alpha$を除いて正則である。Cの内部で点αを中心に半径aの円C'をとることはいつでもできるから，

$$\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz = \int_{C'} \frac{f(z)}{z-\alpha}dz$$

と書ける。ここで，$z - \alpha = ae^{i\theta}$, $dz = iae^{i\theta}d\theta$

$$\int_{C'} \frac{f(z)}{z-\alpha}dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha + ae^{i\theta})}{ae^{i\theta}} iae^{i\theta}\, d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} f(\alpha + ae^{i\theta})\, d\theta = 2\pi i f(\alpha) \quad (a \to 0)$$

を得る。よって，

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(z)}{z-\alpha}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz$$

となる。点αでの関数値$f(\alpha)$が線積分によって表せる。極座標で表すと，

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha + ae^{i\theta})\, d\theta$$

$f(\alpha)$はC上の関数値$f(z)$の平均として与えられる。

点αは複素平面上で任意にとっているので，それを変数とみなせば，$f(\alpha)$はαについて逐次微分できる。

$$f'(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2}dz$$

$$f''(\alpha) = \frac{2!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^3}dz$$

・
・
・

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}dz \qquad (*)$$

つまり，領域D内の正則関数が微分可能ならば，その関数は連続的に何回でも微分できることになる（積分定理）。上式$(*)$をコーシーの積分公式という。この結果を利用して，正則領域内の任意の点で正則関数がテイラー展開

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - \alpha)^{n+1}}d\xi$$

できる。

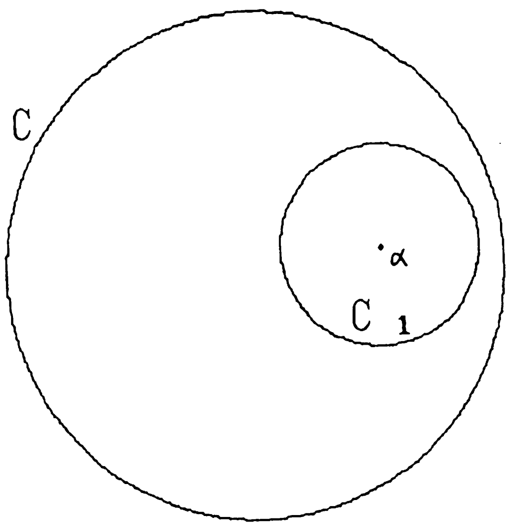


図4　正則領域（テイラー展開）

図4のように，領域D内の曲線Cの内部に，点zを含むように，点αを中心とした円C_1をとる（$\zeta \in C_1$）。

$|\zeta - \alpha| > |z - \alpha|$であるから，

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \alpha - (z-\alpha)} = \frac{1}{\zeta - \alpha}\,\frac{1}{1 - (z-\alpha)/(\zeta - \alpha)}$$

$$= \frac{1}{\xi - \alpha}\left(1 + \frac{z-\alpha}{\zeta - \alpha} + \left(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right)^2 + \left(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right)^3 + \cdots\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta - \alpha)^{n+1}}$$

となる。こうして，$f(z)$の展開として

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}}(z-\alpha)^n d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n,\quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta$$

を得る。このように，テイラー展開できる正則関数を解析関数という。

上式を極座標（$z-\alpha = re^{i\theta}$）に変数変換すれば，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta$$

と書ける。

［問1］次式（Perseval の等式）を示せ。

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\alpha+re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

［解］

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\alpha+re^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\cdot\bar{f}\, d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty} a_m(z-\alpha)^m \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \overline{(z-\alpha)^n}\, d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n r^n \int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta}\, d\theta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \left(\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta}\, d\theta = \delta_{mn} 2\pi\right)$$

ここに，記号δ_{mn}はクロネッカーのデルタである。

［問2］領域D内で正則な関数$f(z)$の絶対値$|f(z)|$が最大値をとるならば，$f(z)=$ const. であることを示せ。

［解］$z=\alpha\in D$で最大値$M=f(\alpha)$をとるとする。$f(z)$を点αでテイラー展開すれば，$f(z)=\Sigma a_n(z-\alpha)^n$と書ける。自乗した展開係数は，

$$|a_0|^2+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n} \leqq M^2 = |a_0|^2$$

となる（$a_0=f(\alpha)=M$）。故に，$a_n=0$ ($n>1$) でなければならない。こうして，$|f(z)|=a_0=$ const.。

［問3］関数$f(z)$が複素平面上で正則かつ有界ならば，$f(z)=$ const. であることを示せ（Liouville's theorem）。

［解］$f(z)$のテイラー展開係数の絶対値をとれば，

（$f(z)$は有界だから，$|f(z)|\leqq M$として），

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(\alpha+re^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta\right|$$

$$\leqq \frac{M}{2\pi r^n} 2\pi = \frac{M}{r^n} \to 0 \qquad (r\to\infty)$$

即ち，$f(z)=a_0=$ const.。このように，複素平面上で正則かつ有界な関数を整関数（entire function）と呼ぶ。

［問4］代数方程式$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots\cdots + a_0 = 0$は必ず解をもつことを示せ（代数学の基本定理）。

［解］$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots\cdots + a_0 = f(z)$として，$f(z)\neq 0$ ($a_n\neq 0$ ($n\geqq 1$))を仮定する。$1/f(z)=g(z)$なる関数$g(z)$は整関数である。$\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty$であるから，$\lim_{z\to\infty} g(z)=\lim_{z\to\infty} 1/f(z)=0$。即ち，$g(z)$は正則で有界だから，Liouville's theorem から$g(z)=$ const.。従って，$f(z)$は const. でなければならない。これは仮定($a_n\neq 0$)に反する。故に，$f(z)=0$を満たすzは必ず1つ以上存在することになる。

2．3．ローラン展開と留数定理

領域D内に非正則点を含むときには，上式をそのままでは使えない。そこで，非正則点を含む微小円C_2部分をくりぬいた正則な円環をとる。その内部の点zを含む小円C'をとる。そうすれば，その正則円環領域で（図5参照），

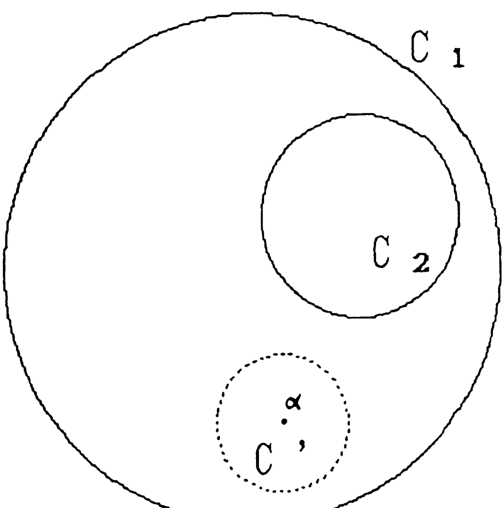


図5　円環領域（ローラン展開）

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

と書ける。以下，閉曲線C'の代わりに閉曲線C_1とC_2に関する積分で置き換えよう。

$$\int_{C'}+\int_{C_2}=\int_{C_1} \qquad \therefore \int_{C'}=\int_{C_1}-\int_{C_2}$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$=(\mathrm{I})+(\mathrm{II})$$

(Ⅰ)の展開は，上記テイラー展開に同じである。(Ⅱ)では，ζ は C_2 上であるから，$|\zeta-\alpha|<|z-\alpha|$ となるから，$1/(\zeta-z)$ の展開は，

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-\alpha-(z-\alpha)}=-\frac{1}{z-\alpha}\frac{1}{1-(\zeta-\alpha)/(z-\alpha)}$$

$$=\frac{-1}{z-\alpha}\left(1+\left(\frac{\zeta-\alpha}{z-\alpha}\right)+\left(\frac{\zeta-\alpha}{z-\alpha}\right)^2+\left(\frac{\zeta-\alpha}{z-\alpha}\right)^3+\cdots\right)$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-\alpha)^{n-1}}{(z-\alpha)^n}$$

となる。

$$(\text{Ⅱ})=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}f(\zeta)(\zeta-\alpha)^{n-1}d\zeta\frac{1}{(z-\alpha)^n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{1}{(z-\alpha)^n},\ a_n=\frac{1}{2\pi_i}\int_{C_2}f(\zeta)(\zeta-\alpha)^{n-1}d\zeta$$

となる。従って，

$$f(z)=(\text{Ⅰ})+(\text{Ⅱ})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n \qquad (*)$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta \qquad (**)$$

と書ける（C は C_1 あるいは C_2 である）。

上式(*)と(**)を極座標（$z-\alpha=re^{i\theta}$）に変数変換すれば，

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nr^ne^{in\theta}$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f(\alpha+re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$$

と書ける。更に，$f(z)$を次のように三角関数の表式（フーリエ級数展開）に書き替える：

$$f(z)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_ne^{in\theta}+a_{-n}e^{-in\theta})r^n$$

$$=\frac{b_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos(n\theta)+c_n\sin(n\theta))r^n$$

ここに，新たな展開係数 b_n，c_n は，

$$b_n=\frac{a_n+a_{-n}}{2}=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos(n\theta)d\theta$$

$$c_n=\frac{a_n-a_{-n}}{2i}=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin(n\theta)d\theta$$

である。このとき，Parseval の等式は，

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(z)|^2dz=\frac{b_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n^2+c_n^2)$$

と書ける。

ローラン展開の$\sum_{n=1}^{-\infty}a_n(z-\alpha)^n$をfの$\alpha$における特異部あるいは主要部という。nが有限個で切れて，$\lim_{z\to\alpha}f(z)=\infty$となる特異点を特に第n位の極という。第n位の極をもつ$f(z)$に，$(z-\alpha)^nf(z)=g(z)$としたとき，点αは$g(z)$の第n位の零点という。

[問] 次の関数を$z=0$においてローラン展開し，孤立特異点を分類せよ。

a) $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$　b) $\frac{1}{z}\sin(z)$　b) $\frac{1}{z^2}\sin(z)$

[解]

a) $\sin\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\cdots$

特異部が無限級数であるから，$z=0$は真性特異点。

b) $\frac{1}{z}\sin(z)=\frac{1}{z}\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots\right)$

$$=1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\cdots$$

$z=0$は特異点であるが，$\sin(z)/z$のテイラー展開においては特異点は現れない。このとき，$z=0$を除去可能な特異点という。$z=0$はもはや特異点ではなくなる。

c) $\frac{1}{z^2}\sin(z)=\frac{1}{z^2}\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots\right)$

$$=\frac{1}{z}-1+\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\cdots$$

$z=0$は，$1/z^2$に対しては第2位の極であるが，$\sin(z)/z^2$では第1位の極である。

上式(*)の両辺を積分すれば，

$$\int_Cf(z)dz=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\int_C(z-\alpha)^ndz=\begin{cases}2\pi ia_{-1}(n=-1)\\0(n\neq-1)\end{cases}$$

となる。ここに，展開係数a_{-1}は$z=\alpha$における留数といい，Res $[\alpha, f]$，あるいは簡単に，Res $[\alpha]$と記す。これによって，ある種の定積分計算には不定積分を必要としないで留数を求めればよいことになる。

$f(z)$がn位の極をもつときの留数は，

$$a_{-1}=\text{Res}\ [\alpha, f(z)]$$

$$=\lim_{z\to\alpha}\left[\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-\alpha)^nf(z)\}\right]$$

と書ける。特に，$n=1$のときは，

$$a_{-1}=\text{Res}\ [\alpha, f(z)]=\lim_{z\to\alpha}\{(z-\alpha)f(z)\}$$

である。領域D内に，特異点が幾つかある場合にも拡張できる：

$$\int_Cf(z)dz=\sum_{i=1}^{n}\int_{C_i}f(z)dz=\sum_{i=1}^{n}2\pi i\text{Res}\ [\alpha_i, f]$$

[問] 次の定積分を留数定理によって計算せよ。

1） $\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+b\cos\theta}d\theta\ (a>b>0)$

2） $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+a^2}dx$

3） $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(cx)}{x^2+a^2}dx$　　4） $\int_0^{\infty}\frac{\log(x)}{x^2+a^2}dx$

5） $\int_0^{\infty}\frac{\log(x)}{(x+a)^2}dz$　　6） $\int_0^{\infty}\frac{\log(x^2+a^2)}{x^2+a^2}dx$

[解]

1） $\cos\theta=\frac{1}{2}(z+\bar{z})=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)$, $d\theta=\frac{dz}{iz}$として，積分路 C は図 6(A)のようにとる：

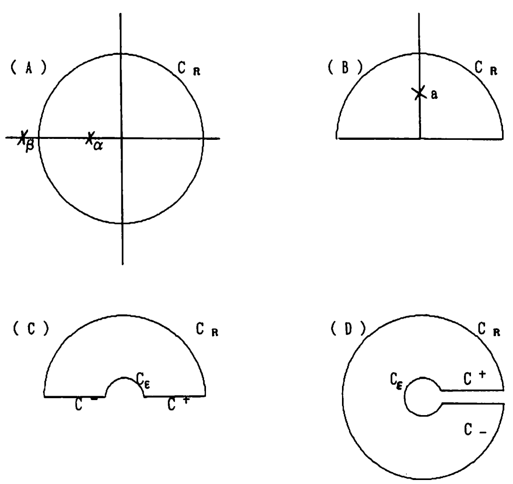


図6　定積分のための積分路

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+b\cos\theta}d\theta=\int_C\frac{1}{a+\frac{b}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}$$

$$=\frac{2}{ib}\int_C\frac{dz}{z^2+2a\frac{z}{b}+1}=\frac{2}{ib}\int_C\frac{dz}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$

ここに，α，β は方程式 $z^2+2az/b+1=0$ の根である：

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=-\frac{a}{b}\pm\frac{1}{b}\sqrt{a^2-b^2}.$$

閉曲線 C 内には留数は α 1つのみだから，

$$I=2\pi i * \mathrm{Res}[\alpha]=2\pi i*\frac{2}{ib}*\frac{1}{\alpha-\beta}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

2） $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+a^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x+ia)(x-ia)}dx$

$I=\int_C\frac{1}{z^2+a^2}dz$ として，積分路 C を図(B)のようにとる：

$$=2\pi i*\mathrm{Res}[ia]=2\pi i*\frac{1}{2ai}=\frac{\pi}{a}$$

3） $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(cx)}{x^2+a^2}dx$, $I=\int_C\frac{e^{icz}}{z^2+a^2}dz$ の実部をとる。

積分路 C は図(B)に同じ：

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{icz}}{z^2+a^2}dz=2\pi i*\mathrm{Res}[ia]=2\pi i*\frac{e^{-ac}}{2ai}$$

$$I=\frac{\pi}{a}e^{-ac}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(cx)}{x^2+a^2}dx$$

4） $\int_0^{\infty}\frac{\log(x)}{x^2+a^2}dx$ を，$\int_C\frac{\log(z)}{z^2+a^2}dz$ として積分路 C は図(C)($C=C^++C_R+C^-+C_\varepsilon$) のようにとる：

路 C^+ と C^- 上での対数関数 log (z)は，

$\log z=\log x$, $\log z=\log x+\pi i$

のように定める。

$$I=\int_{C^+}+\underset{\substack{\downarrow R\to\infty\\ 0}}{\int_{C_R}}+\int_{C^-}+\underset{\substack{\downarrow \varepsilon\to 0\\ 0}}{\int_{C_\varepsilon}}=2\pi i*\mathrm{Res}[ia]$$

$$\int_{C_+}+\int_{C_-}\equiv\int_0^{\infty}\frac{\log(x)}{x^2+a^2}dx+\int_0^{\infty}\frac{\log(x)+\pi i}{x^2+a^2}dx$$

$$=2\pi i*\mathrm{Res}[ia]=2\pi i*\frac{a+\pi i/2}{2ai}$$

$$=\frac{a}{\pi}\left(\log a+\frac{\pi}{2}i\right)$$

$$\therefore\int_0^{\infty}\frac{\log(x)}{x^2+a^2}dx=\frac{a}{\pi}\log a$$

5） $\int_0^{\infty}\frac{\log(x)}{(x+a)^2}dx$ は，まず $I=\int_C\frac{(\log z)^2}{(x+a)^2}dz$ として計算する。積分路 C は図(D)（$=C^++C_R+C_-+C_\varepsilon$）のようにとる：

路 C^+ と C_- 上での対数関数 log (z)は，

$\log z=\log x$, $\log z=\log x+2\pi i$

のように定める。

$$I=\int_{C^+}+\underset{\substack{\downarrow R\to\infty\\ 0}}{\int_{C_R}}+\int_{C_-}+\underset{\substack{\downarrow \varepsilon\to 0\\ 0}}{\int_{C_\varepsilon}}=2\pi i*\mathrm{Res}[-a]$$

$$\int_{C_+}+\int_{C_-}\equiv\int_0^{\infty}\frac{(\log x)^2}{(x+a)^2}dx-\int_0^{\infty}\frac{(\log x+2\pi i)^2}{(x+a)^2}dx$$

$$=2\pi i*\mathrm{Res}[-a]=2\pi i*\frac{\log a+\pi i}{-a}.$$

$(\log x)^2-(\log x+2\pi i)^2=-4\pi i\log x+4\pi^2$ より，上式の被積分関数を通分して，虚部を比較する：

$$I=4\pi i\int_0^{\infty}\frac{\log x}{(x+a)^2}dx-4\pi^2\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+a)^2}dx$$

$$= 2\pi i * \frac{\log a + \pi i}{-a}, \quad \therefore \int_0^\infty \frac{\log(x)}{(x+a)^2}dx = \frac{\log(a)}{2a}$$

6）$\int_0^\infty \frac{\log(x^2+a^2)}{x^2+a^2}dx$ を $I = \int_C \frac{\log(x+ia)}{x^2+a^2}dz$ として，計算する。積分路 C は図(B)に同じ。

$$I = \int_{C_R} + \int_{-R}^0 + \int_0^R = \int_0^R \left(\frac{\log(ia-x)}{x^2+a^2} + \frac{\log(x+ia)}{x^2+a^2} \right) dx$$

$$= 2\pi i \mathrm{Res}[ia] = 2\pi i \frac{\log(2ai)}{2ai} = \frac{\pi}{a}(\log 2 + \log(ia))$$

区間$(-\infty, 0)$, $[0, \infty)$での対数関数の和は，

$$\log(-x+ia) + \log(x+ia) = \log(-(x^2+a^2))$$
$$= \log(x^2+a^2) + \pi i$$

と書けるから，

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\log(x^2+a^2)+\pi i}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{2}(\log 2 + \log(ia))$$

$$\therefore \int_{-\infty}^\infty \frac{\log(x^2+a^2)+\pi i}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{a}\log 2$$

§3．解析接続（analytic continuation）

領域 D で関数 $f(z)$が正則であれば，D 内の任意の点で $f(z)$はテイラー展開できた。領域 D と重なる他の領域 D' をとり，その D' 内で正則な関数を $g(z)$とする。D と D' の重なり領域($D \cap D'$)で $f|_{D\cap D'} = g|_{D\cap D'}$（記号 $|_{D\cap D'}$ は，f, g を領域 $D \cap D'$ に制限するという意味を表す）ならば，関数 g を関数 f の領域 D' への解析接続という。

今，$D \cap D'$ 内の二点 z_0 と $z_0+\Delta z$ をとれば，仮定により，$f(z_0) = g(z_0)$, $f(z_0+\Delta z) = g(z_0+\Delta z)$だから，

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z_0+\Delta z) - g(z_0)}{\Delta z}$$

となる。つまり，$f'(z_0) = g'(z_0)$である。f, g ともに正則関数であるから，自動的に，

$$f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

である。よって，点 z_0 で f と g をテイラー展開すれば展開係数が等しいので，$f = g$ である。このように，関数 $f(z)$が領域 D において正則であれば，D 内の各点を中心とするテイラー展開は，全てその中の一つから解析接続できることになる。

[例] 関数 $f(z) = \frac{1}{1-z}$ は，$z = 1$ を除いて正則である。従って，$z \neq 1$ の任意の点でテイラー展開できるので，関数 $f(z)$を $z = 0$ でテイラー展開する：

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \qquad (a)$$

(a)は $|z| < 1$ において収束する。次に，点 $z = i/2$（$|i/2| < 1$）のテイラー展開は，

$$f(z - i/2)$$
$$= \frac{1}{1-i/2} + \left(\frac{1}{1-i/2}\right)^2 (z - i/2)$$
$$+ \left(\frac{1}{1-i/2}\right)^3 (z - i/2)^2 + \cdots \qquad (b)$$

と書ける。この展開(b)の収束半径は $2\sqrt{5}/5$ である。他方，(b)の展開係数は，(a)を微分して

$$f'(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots$$
$$f''(z) = 2\cdot 1 + 3\cdot 2z + 4\cdot 3z^2 + 5\cdot 4z^3 + \cdots$$

・
・
・

で，$z = i/2$を代入しても得られる。このようにして，一つの領域内で，正則な関数の展開式ができれば，それによって，その領域内の全ての点に置ける展開式が決まる。

ところで，$z = 3i/2$ のテイラー展開は，$|3i/2| > 1$ であるから，(a)からは直接には導けない。そこで，$z = i$ の展開を考えると，(b)による展開式で決まる。というのは，点 $z = i/2$における(b)の展開式の収束半径は $2\sqrt{5}/5$であるから，その収束円内に $z = i$ ははいっている：

$$f(z-i) = \frac{1}{1-i} + \left(\frac{1}{1-i}\right)^2 (z-i) + \left(\frac{1}{1-i}\right)^2 (z-i)^2 + \cdots \qquad (C)$$

(c)の収束半径は$\sqrt{2}/2$であるから，この収束円内に $z = 3i/2$ははいる。よって，この(c)を用いて $z = 3i/2$の展開式は決まる。

上記の事柄は層(sheaf)の言葉によって簡潔に記述できる。

領域 D での正則関数 f との組を(f, D)で表し，正則関数の全体を F(D)と記す。領域 D は，部分領域 $D_\mu \subset D$（$\mu = 1, 2, \cdots\cdots$)によって，$D = \cup D_\mu$と書ける。このとき，次の条件を満たすとき，F(D)（正則関数の全体）は層をなすという。

1）$f \in F(D)$が各 μ について $f|_{D_\mu} = 0$ ならば $f = 0$ である。

2）任意の λ と μ に対して，$f_\lambda \in F(D_\lambda)$, $f_\mu \in F(D_\mu)$のとき，$f_\lambda|_{D_\lambda \cap D_\mu} = f_\mu|_{D_\lambda \cap D_\mu}$ならば，

$f|_{D_\mu} = f_\mu$なる $f \in F(D)$が必ず存在する。

2）の f を F（D）の茎（stalk）といい，f_λ と f_μ は同じ芽（germ）を持つという。つまり，点 ζ（$\in D_\lambda \cap D_\mu$，芽の射影という）のテイラー展開は同じものである。（f，D）の代わりに，（f，ζ）の組の全体を A_ζ とする。A_ζ は正則関数芽の層をなすという。

1），2）を言い換えれば，1）は，微小領域においてf＝0ならば，広い領域においても0である。「局所的に等しければ大域的にも等しい」という。

2）は，「局所的に与えられた正則関数 f_μ を貼り合わせて大域的な関数 f を作れる」という。

（平成5年11月30日受理）