二階偏微分方程式で何を教えるか

石　　信　一*

What to teach about second-order partial differential equations

Shin-ichi ISHI

要　旨

二階線形偏微分方程式において，数理科学で基本である一次元熱及び波動方程式，二次元ポテンシャル方程式の意味，導出，解法について解説した。三つの方程式がある適当な条件の下で，三つとも解ける解法（変数分離法とフーリエ変換）について述べた。

This paper explains derivation , method of solving and meaning of one-demensional heat- , wave- , and two-demensional potential equations about second-order linear partial differential equations , which are the base of mathematical and physical sciences. It is shown that all the three equations under appropriate conditions are solved by the methods of the separation of variable and of Fourier transformation.

§1．序

本稿で取り扱う偏微分方程式は，二変数の二階の線型微分方程式である。それは数理物理で基本となる熱・波動・ポテンシャル方程式と呼ばれている三つの方程式である。それらの方程式が，適当な条件の下で，一つの方法（変数分離法）で三つとも解ける，ということを強調したい。それらの方程式の解法の学習が，既知の概念のよい復習の機会になること，また，向学の為の利用価値の高いことを併せて強調したい。

以下，§2では，二次曲線の一般形から標準形への変換論のアナロジーで，二階斉次偏微分方程式の一般形から標準形（三つの方程式）を導くことを示す。§3と§4では，方程式の現象論的な導出と方程式の解法について述べる。付録に，変数分離法を用いる際，必要な道具となるフーリエ級数展開の要約を載せた。

＊　助教授　一般教科

§2．二階斉次線形偏微分方程式の標準形への変換

二次曲線（円錐曲線）の一般形を

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$

（a, h, b, … は定数）と書く。この一般形は，適当な変換をして，(x , y)座標系から別の新しい(X , Y)座標系で，

$$AX^2+BY^2+\frac{\Delta}{D}=0$$

の形に書き替えることができる。ここに，A , B は新たな定数，D とΔは各々，

$$D=\begin{vmatrix} a & g & h \\ g & b & f \\ h & f & c \end{vmatrix},\quad \Delta=\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}$$

で与えられる量である($D\neq 0$)。$\Delta>0$，$\Delta=0$，$\Delta<0$ に対して，二次曲線は各々，楕円，放物線，双曲線を表す。

二変数を x , y として，定数係数の二階斉次線形偏微分方程式の一般形を，

$$\left\{a\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2h\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+b\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right.$$

$$+2g\frac{\partial}{\partial x}+2f\frac{\partial}{\partial y}+c(x,y)\Big\}u(x,y)=0 \quad (1)$$

と書く。但し，係数a，bは，同時には零にならない。(1)式の微分演算子の記号は簡単化して，

$$\frac{\partial}{\partial x}=\partial_x,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}=\partial_x\partial_x=\partial_{xx},\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}=\partial_x\partial_y=\partial_y\partial_x=\partial_{xy} \quad (2)$$

等々で表す。これらの記号を用いて(1)式を書き替えれば，

$$\{a\partial_{xx}+2h\partial_{xy}+b\partial_{xy}+2g\partial_x+2f\partial_y+c\}u=0 \quad (1)$$

となる。以下，二次曲線の標準形に書き替えたのと同様な方法によって，(1)式を標準形に書き替える。その変形の順を，(1)∂_{XY}の消去，(2)∂_X，∂_Yの消去，(3)規格化（∂_{XX}，∂_{YY}の係数を1にする）で行う。それらに対応する変換は，回転，平行移動，スケール（相似）変換と呼ばれているものである。

(1)座標の回転を表す変換行列Rは，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}\cos(\theta)-\sin(\theta)\\ \sin(\theta)\quad\cos(\theta)\end{pmatrix} \quad (2)$$

である。ここに，(X，Y)座標系は，(x，y)座標系を原点の回りに角θ回転したものである。これによる一階の微分演算子は，

$$\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}\partial_X\\ \partial_Y\end{pmatrix},\quad \left.\begin{aligned}\partial_x&=\cos(\theta)\partial_X-\sin(\theta)\partial_Y\\ \partial_y&=\sin(\theta)\partial_X+\cos(\theta)\partial_Y\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

と変換され，二階の微分演算子は，

$$\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\end{pmatrix}(\partial_x\ \partial_y)=\begin{pmatrix}\partial_{xx}&\partial_{xy}\\ \partial_{yx}&\partial_{yy}\end{pmatrix} \quad (4)$$

ここに，

$$\partial_{xx}=\cos^2(\theta)\partial_{XX}-2h\sin(\theta)\cos(\theta)\partial_{XY}+\sin^2(\theta)\partial_{YY} \quad (4.1)$$

$$\partial_{xy}=\sin(\theta)\cos(\theta)\partial_{XX}+(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta))\partial_{XY}-\sin(\theta)\cos(\theta)\partial_{YY} \quad (4.2)$$

$$\partial_{yy}=\sin^2(\theta)\partial_{XX}+2h\sin(\theta)\cos(\theta)\partial_{XY}+\cos^2\partial_{YY} \quad (4.3)$$

と書ける。これらの変換結果を(1)式に代入して，整理すれば，

$$\{A\partial_{XX}+2H\partial_{XY}+B\partial_{YY}+2G\partial_X+2F\partial_Y+c(X,Y)\}u(X,Y)=0$$

となる。ここに，新たな定数係数A，H，B，G，Fは，

$$A=a\cos^2(\theta)+2h\sin(\theta)\cos(\theta)+b\sin^2(\theta)$$
$$H=-(a-b)\sin(2\theta)/2+h\cos(2\theta)$$
$$B=a\sin^2(\theta)-2h\sin(\theta)\cos(\theta)+b\cos^2(\theta)$$
$$G=g\cos(\theta)+f\sin(\theta)$$
$$F=-g\sin(\theta)+f\cos(\theta)$$

である。∂_{XY}を消去することは，H＝0となるθを見つけることである。θは上式から，

$$\tan(2\theta)=\frac{2h}{a-b} \quad (5)$$

を満たすθをとればよい。こうして，(1)式は次のように書き替えられる：

$$\{A\partial_{XX}+B\partial_{YY}+2G\partial_X+2F\partial_Y+c\}u=0 \quad (6)$$

(2)∂_X，∂_Yの項を消去するのに，解uに関して次の変換をする：

$$w(X,Y)=u(X,Y)e^{\alpha X+\beta Y} \quad (7.1)$$

あるいは，

$$u(X,Y)=w(X,Y)e^{-\alpha X-\beta Y}, \quad (7.2)$$

ここに，α，βは任意定数である。指数関数の部分は，座標の平行移動を表している。(7.2)式を直接微分して，

$$\partial_X u(X,Y)=(\partial_X w-\alpha w)e^{-\alpha X-\beta Y} \quad (8.1)$$

$$\partial_{XX}u(X,Y)=(\partial_{XX}w-2\alpha\partial_X w-\alpha^2 w)e^{-\alpha X-\beta Y} \quad (8.2)$$

$$\partial_Y u(X,Y)=(\partial_Y w-\beta w)e^{-\alpha X-\beta Y} \quad (8.3)$$

$$\partial_{YY}u(X,Y)=(\partial_{YY}w-2\beta\partial_Y w-\beta^2 w)e^{-\alpha X-\beta Y} \quad (8.4)$$

を得る。これらの結果を(6)式に代入して，整理すれば，

$$\{A\partial_{XX}+B\partial_{YY}+2(G-\alpha A)\partial_X+2(F-\beta B)\partial_y+{}+\alpha^2A+\beta^2B-\alpha G-\beta F+c\}w(X,Y)=0 \quad (9)$$

となる。∂_{XX}と∂_{YY}の係数AとBは，同時には零にはならないことを前提としているので，(9)式の∂_X，∂_Yの消去に際して，次の二つの場合が考えられる：

(a)　AB≠0の場合：

$\alpha=G/A$，$\beta=F/B$にとれば，(9)式は，

$$\{A\partial_{XX}+B\partial_{YY}+c\}w=0 \quad (*)$$

と書ける。

(b)　A≠0，B＝0の場合：（A＝0，B≠0の場合もあるが，変数を入れ替えれば結局(b)の場合に同じ）

$\alpha=G/A$，$\beta=c/F$にとれば，cは消去されて，(9)式は，

$$\{A\partial_{XX}+2F\partial_{Y}\}w=0 \qquad (**)$$

と書ける。cが消去されないとき，即ち，
$\alpha=G/A$, $F=0$ にとれば，(9)式は，

$$\{A\partial_{XX}+c\}w=0 \qquad (***)$$

と書ける。しかし，上式(＊＊＊)は，常微分方程式に帰着されているで問題外としてよい。従って，(＊),(＊＊)の二つ場合について考察すればよい。
(3) 変数X，Yにおいて，比例係数μ，νを任意にとり，$X\to\mu X$, $Y\to\nu Y$と変換（スケール(相似）変換）すれば，微分演算子は，

$$\partial_X=\mu\partial_X,\ \partial_{XX}=\mu^2\partial_{XX} \qquad (10.\ 1)$$
$$\partial_Y=\nu\partial_Y,\ \partial_{YY}=\nu^2\partial_{YY} \qquad (10.\ 2)$$

と書ける。(10)式を(9)式に代入すれば，

$$\{A\mu^2\partial_{XX}+B\nu^2\partial_{YY}+c\}w=0$$

となる。ここに，c，wの変数は(X/μ, Y/ν)である。
$A\mu^2=B\nu^2=1$となるようにμ，νをとれば，Bの符合によって，

$$\{\partial_{XX}+\partial_{YY}+c\}w=0 \qquad (11)$$
$$\{\partial_{XX}-\partial_{YY}+c\}w=0 \qquad (12)$$

を得る。二次関数での呼称のように，(11)，(12)式の微分方程式の型を，それぞれ楕円型，双曲型という。

同様にして，(＊＊)の場合，

$$\{A\mu^2\partial_{XX}-\nu\partial_Y\}w=0$$

と書ける。ここに，$A\mu^2=1$，$\nu=$(Bの符合)$\times 1$にとれば，

$$\{\partial_{XX}-\partial_Y\}w=0 \qquad (13)$$

を得る。この型を放物型という。
(11)，(12)式の任意関数cを$c=0$にとれば，

$$\{\partial_{XX}+\partial_{YY}\}w=\Delta w=0,\ \Delta=\partial_{XX}+\partial_{YY} \qquad (11)'$$
$$\{\partial_{XX}-\partial_{YY}\}w=0 \qquad (12)'$$

と書ける。また，(12)′，(13)式の変数を$y\to t$とすれば，

$$\{\partial_{tt}-\partial_{XX}\}w=\Box w=0,\ \Box=\partial_{tt}-\partial_{XX}(=\partial_{tt}-\Delta) \qquad (12)''$$

$$\{\partial_t-\partial_{XX}\}w=\Diamond w=0,\ \Diamond=\partial_t-\partial_{XX}(=\partial_t-\Delta) \qquad (13)'$$

と書き替えられる。(11)′式を二次元ラプラス（Laplace）方程式，あるいは，解の物理的意味からポテンシャル方程式，(12)式を（一次元）ダランベール（D' Alembert）方程式，あるいは，波動方程式，(13)式をフーリエ（Fourier）方程式，あるいは，熱方程式と呼ぶ。微分演算子の記号に関して，Δをラプラシアン（Laplacian），□をダランベリアン（D' Alembertian），◇をフーレリアン（Fourierian）という（(12)″，(13)′のカッコ内の記号は，二次元以上の偏微分方程式の記述に便利である。）

§3．方程式の導出

方程式の意味を理解するために，熱方程式と弦の振動方程式（一次元波動方程式）を現象論的に導こう。これらの方程式は，時間に依存しているので非定常的という。他方，ラプラス方程式は定常的である。

{1}熱方程式

方程式の導出の概略を述べる。熱伝導体は，金属棒として内部での一方向の熱の流れを考察する（図1参照)。但し，無限に延べている金属棒の縁からの熱の放射等はないとする。

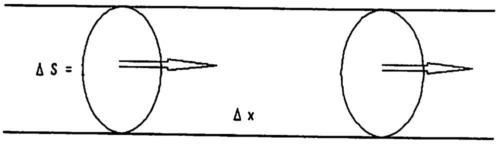

図1　熱伝導体（金属棒）での熱の流れΔSは棒の断面積の大きさ（ΔS＝1）

任意の場所xと時刻tでの温度をT(x，t)で表す。金属棒内において熱の流れが一様でないと，温度差が生じて，熱は高温から低温に流れる。このとき，熱の流れvは温度勾配に比例する：

$$v=-k\frac{dT}{dx} \qquad (1)$$

ここに，比例定数kを熱伝導率という。図1の単位断面積でΔx部分に流れ込む熱量を求める。

$x=x_0$において，図の単位面積当たり左から右に流入する熱量は，

$$q_{x=x_0}=-k\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=x_0} \qquad (*)$$

で，$x=x_0+\Delta x$において，流出する熱量は，

$$q_{x=x_0+\Delta x}=-k\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=x_0+\Delta x}$$

$$=-k\left[\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=x_0}+\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_{x=x_0}\Delta x+\cdots\right]\ (**)$$

である。流入出量の差$(*)-(**)$は，

$$q_{x=x_0}-q_{x=x_0+\Delta x}=k\frac{\partial^2T}{\partial x^2}\Delta x \qquad (2)$$

で，Δx部分に溜まる熱量である。これによるΔx部分の温度の上昇を伴う。その熱量は，

$$c'(\rho\Delta x)\frac{dT}{dt} \qquad (3)$$

であるから（c'とρは金属棒の比熱と線密度で定数とみなす），次の等式が成り立たねばならない：

$$k\frac{\partial^2T}{\partial x^2}\Delta x=c'(\rho\Delta x)\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (4)$$

ここで，比例定数を新たにc^2とまとめて，標準型として，

$$c^2\frac{\partial^2T}{\partial x^2}=\frac{\partial T}{\partial t},\ c^2=\frac{k}{c'\rho} \qquad (5)$$

と書く。これを一次元熱伝導方程式という。熱の流れの代わりに，密度（物質）の流れをとると，(5)式は拡散方程式である。また，電気量の流れを考えると電気伝導の方程式である。

ランダムに運動する粒子（例えば，Brown粒子）の確率が方程式(1)に従うことを示すことは興味ある。

粒子が時間間隔Δtで，位置xにおいて等確率$1/2$で左右に必ず動くとする。時刻tに位置xにある確率を$u(x,t)$とすれば，

$$u(x,t+\Delta t)=u(x-\Delta x,t)+u(x+\Delta x,t)$$

と書ける。両辺を各々，Taylor展開（左辺はt，右辺はxについて展開）すれば，

$$(\text{左辺})=u(x,t)+\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t+\cdots\cdots$$

$$(\text{右辺})=u(x,t)\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\frac{(\Delta x)^2}{2}\cdots\cdots$$

となる。（左辺）＝（右辺）として，高次項を無視すれば，

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t=\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\frac{(\Delta x)^2}{2},$$

と書ける。係数をまとめれば，(5)式に同型になる：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=c^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

ここに，係数c^2は$[L^2T^{-1}]$の次元をもつパラメーター（拡散定数のそれに同じ）である。

｛2｝弦の振動方程式（一次元波動方程式）

振動方程式の導出の概略を述べる。x軸に沿って両端が固定された弦が，x軸に垂直な力を受けて行う微小振動を考える（図2参照）。弦の張力

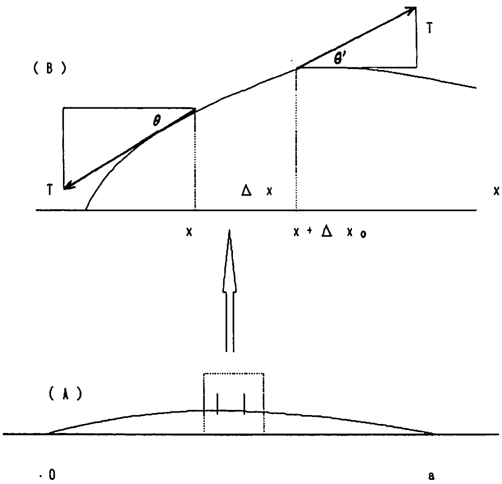

図2 (A)両端固定（$x=0$，a）での弦の振動
(B)弦の微小区間での張力による力の釣り合い

はどこでも一定とし，弦の伸びは無視する。弦は一様（線密度ρ）として，任意の位置xと時間tにおける力のよる変位を$u(x,t)$で表す。

x_0と$x_0+\Delta x$の微小区間において，両側で張力による力は，

$$(x_0\text{での垂直成分})=T\sin\theta\fallingdotseq T\tan\theta\fallingdotseq T\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_0} \quad (*)$$

$$(x_0+\Delta x\text{での垂直成分})=T\sin\theta'\fallingdotseq T\tan\theta'$$
$$\fallingdotseq T\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_0+\Delta x}=T\left[\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_0}+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{x=x_0}\Delta x+\cdots\right] \quad (**)$$

で，x軸に垂直方向の合力は，上式を$(**)-(*)$と引算すれば，

$$T\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{x=x_0}\Delta x$$

である。ここに，Δxの二次以上の項は無視した。この区間の質量は$\rho\Delta x$（より正確には$\rho\Delta s$，Δsは弦に沿っての微小長さ。$\Delta s=\Delta x$とした）であるから運動方程式は，

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\Delta x$$

と書ける。両辺をΔxで割れば，

$$\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

数係数をまとめて，標準型として，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad c^2=\frac{T}{\rho} \tag{2}$$

と書く。これを一次元波動方程式という。

連続体としての弦は，直線状に並んだ粒子系の極限（粒子数をNとして，$N\to\infty$）である。そこで，今，直線状の等間隔 a でバネで結ばれた質量MのN個の粒子系を考える。粒子間の力の定数を α，n番目の粒子の変位を u_n とすれば，n番目の粒子に働く力の垂直成分は，

$$\frac{\alpha}{a}(u_{n+1}-u_n)-\frac{\alpha}{a}(u_n-u_{n-1})$$

$$=\frac{\alpha}{a}\left\{(u_{n+1}-u_n)-(u_n-u_{n-1})\right\}$$

$$=\frac{\alpha}{a}(\delta u_n-\delta u_{n-1})$$

$$=\frac{\alpha}{a}\delta\delta u_n=\frac{\alpha}{a}\delta^2 u_n$$

となる。ここに，δ は一次の微小量，$\delta\delta=\delta^2$ は二次の微小量を示す。よって，n番目の粒子の運動方程式は，

$$M\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}=\frac{\alpha}{a}\delta^2 u_n \tag{3}$$

と書ける。

連続体への移行は $N\to\infty$，つまり，$a=\Delta x\to 0$ である。このとき，$M=\rho\,\delta x$，$\alpha\to T$ とすれば，上式はつぎのように書き替えられる：

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

{3}ラプラス方程式

形式的に，二次元の熱及び振動(波動)方程式を，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

と書く（定数係数 $c^2=1$，解 $u=u(t,x,y)$ である)。ここに，方程式の左辺を零とおけば，即ち，時間依存性を無視すれば，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\Delta u=0$$

と書ける（解 $u=u(x,y)$)。これを二次元ラプラス方程式という。従って，ラプラス方程式を解く意味は，例えば，熱方程式に関しては，平面での温度の定常分布を決めることであり，振動方程式でに関しては，円形膜の定常的な振動状態を決めることになる。

時間変数 t に依存することを非定常的という代りに‘動的’といえば，ラプラス方程式は‘静的’である。静電磁場の問題は，まさにラプラス方程式を解く問題に帰着される（より一般的にはポアソン方程式であるが)。ここに，ラプラス方程式がポテンシャル方程式とよばれる故がある。

§4．方程式の解法

偏微分方程式の解は，一般には無限に多くの解が存在する。従って，微分方程式を解く際には，適当な条件下で解くことが実際的である。座標に関する条件を境界条件（ boundary conditions)，時間，特に，時間の始め（ $t=0$ ）での条件を初期条件（ initial conditions ）と呼ぶ。こうした条件下で微分方程式を解くことを境界値・初期値問題を解くという。以下では，それらの解法の中で二つの方法を述べる。説明に際して，三つの方程式の中で熱方程式の解法を例にとる（他の方程式の解法についても全く同様にできるから)。

{1}変数分離法による解法

境界条件と初期条件の取り方は無数にある。ここでは，境界条件について，便宜上，三つの方程式に共通の形になるように選んだ。例えば，境界条件として，$u(0,t)=u(L,t)=0$。これは，熱伝導体の両端($x=0$ と L)での等温条件を意

[Ⅰ] 変数分離した解 $u(x,t)=X(x)T(t)$を仮定する

⇩(a)

[Ⅱ] 分離解 $X(x)$，$T(t)$を常微分方程式に帰着させて解く

⇩

[Ⅲ] 重ね合わせの原理によって，解の一般解（一次結合）を作る

⇩(b)

[Ⅳ] 一般解（一次結合）の係数を初期条件を満たすように決める

表1　変数分離法による解法手順

	熱方程式	波動方程式	ポテンシャル方程式
type of dif.eqs.	$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}=0$
boundary value conditions	$u(0,t)=u(L,t)=0$ $\therefore X(0)T(T)=X(L)T(t)=0$	$u(0,t)=u(L,t)=0$ $\therefore X(0)=X(L)=0$	$u(0,y)=u(L,y)=0$ $\therefore X(0)Y(y)=X(L)Y(y)=0$
initial value conditions	$u(x,0)=f(x)$ $\therefore X(x)T(0)=f(x)$	$u(x,0)=f(x)$ $u'(x,0)=g(x)$ $\therefore X(x)T(0)=f(x)$ $\therefore X(x)T'(0)=g(x)$	$u(x,0)=f(x)$ $u(x,■)=0$ $\therefore X(x)Y(0)=f(x)$ $\therefore X(x)Y(■)=0$
separeted constant	$\frac{X''}{X}=\frac{T}{c^2T}=-\lambda^2\ (\lambda>0)$	$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{c^2T}=-\lambda^2\ (\lambda>0)$	$-\frac{X''}{X}=\frac{Y''}{Y}=\lambda^2\ (\lambda>0)$
[II]dif.eq. of separated variable	$X''+\lambda X=0$ $T'+\lambda^2c^2T=0$	$X''+\lambda X=0$ $T''+\lambda^2c^2T=0$	$X''+\lambda^2X=0$ $Y''-\lambda^2Y=0$
eigen value	$\lambda=\frac{n\pi}{L}$ (n;integer)	$\lambda=\frac{n\pi}{L}$	$\lambda=\frac{n\pi}{L}$
solutions of separeted variable	$X_n=a_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ $T_n=c_n\exp(-\lambda^2c^2t)$	$X_n=a_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ $T_n=c_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right)$ $+d_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right)$	$X_n=a_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ $Y_n=c_n\exp\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$ $+d_n\exp\left(-\frac{n\pi}{L}y\right)$
[III]solution in terms of principle of super-position	$u(x,t)=\Sigma a_n'X_nT_n$ $=\Sigma C_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\exp(-\lambda^2c^2t)$	$u(x,t)=\Sigma a_n'X_nT_n$ $=\Sigma\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right)\right.$ $\left.+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right)\right]$ $u'(x,t)=\Sigma\frac{n\pi c}{L}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ $\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right)\right]$	$u(x,y)=\Sigma a_n'X_nY_n$ $=\Sigma\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[C_n\exp\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\right.$ $\left.+D_n\exp\left(-\frac{n\pi}{L}y\right)\right]$ $u(x,■)=0=\Sigma\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\times$ $\left[C_n\exp\left(\frac{n\pi}{L}■\right)+D_n\exp\left(\frac{n\pi}{L}■\right)\right.$
expansion by Fourier series	$u(x,0)=f(x)=\Sigma C_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$	$u(x,0)=f(x)=\Sigma C_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ $u'(x,0)=g(x)$ $=\Sigma D_n\frac{n\pi c}{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right)$	$u(x,0)=f(x)=\Sigma C_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ $\times\sinh\left(\frac{n\pi}{L}(■-y)\right)$
[IV]determination of Fourier's coefficients by use of intial conditions	$C_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)dt$	$C_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)dt$ $\frac{n\pi c}{L}D_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(t)\cos\frac{n\pi}{L}ct\,dt$	$\sinh\left(\frac{n\pi}{L}■\right)C_n$ $=\frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)dt$

味する。$u(x,0)=f(x)$は初期条件で，$t=0$での温度分布の形である。

この方法の解法手順の概略を示す。詳細は，表1にまとめてある。この解法をマスターすれば，高専の（工業）数学は卒業といえるでしょう。

〈解法のポイント〉

(a)　分離定数（separated constant）

分離解$u(x,t)=X(x)T(t)$を熱方程式に代入し，整理すると，

$$\frac{X''(x)}{X(X)}=\frac{T'(t)}{c^2T(t)}$$

（′，″は一階，二階微分を示す）

と書ける。ここに，左辺は変数x，右辺はtのみの関数である。従って，それらが等しいことは，変数xにもtにも依らない定数でなければならない（表1では，その定数をλ^2（$\lambda>0$）で表されている）。この定数を分離定数と呼ぶ。しかも，その定数は，境界条件を満たす解の考察から，負

でなければならない。かつ，ある数の整数倍（離散的）になっている。このときλを固有値と呼ぶ。その対応する（解）関数を固有関数と呼ぶ。

分離定数を用いて，常微分方程式（高々，二階の線形微分方程式で解の公式もある）に書き替えた式を固有値方程式と呼ぶ。この方程式を解くことを固有値問題を解くという。

(b)　フーリエ級数

解の形を具体的に書き下す最終段階は，解の一次結合の係数を決めることである。これは，フーリエ級数での展開係数を決めるのと同じである（付録にフーリエ級数展開の要約がある)。表1の最下段に示してあるように，初期条件$f(x)$の関数形が決まれば，単に定積分の計算である。(現実の授業においては，残念ながら，学生が進んで，定積分の計算をやらない（できない？）ので解には仲々到達しないのである。)

{2}フーリエ変換による解法

フーリエ変換による解法は，変数分離法のそれに比べて汎用性がある。ここでは，その一端を示すのに，三つの方程式に共通する形の初期条件の下で解こう（初期値問題の解法)。しかし，この方法の活用には，程度の高い予備知識（たたみこみ，デルタ関数（δ関数)，逆変換を計算する際の複素素関数論等々）を必要とする。

フーリエ変換による解法手順は，{1}の場合に比べて高度の予備知識を前提にしている分，極めて単純である。

解$u(x,t)$のxについてのフーリエ変換を

$$U(k,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-ikx}dx$$

で表す。以下の具体的表式は表2にまとめてある。

表2　フーリエ変換による解法手順

	熱方程式	波動方程式	ポテンシャル方程式
type of dif.eqs.	$\dfrac{\partial u}{\partial t}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
initial value conditions	$u(x,0)=f(x)$ $\therefore F(u(x,0))=F(f(x))=F(k)$	$u(x,0)=f(x)$　$F(f(x))=F(k)$ $u'(x,0)=g(x)$	$u(x,0)=f(x)$ $x^2+y^2\to\infty$のとき$u(x,y)\to\infty$
[II]ordinary dif.eq.	$\dfrac{dU}{dt}=-c^2k^2U$	$\dfrac{d^2U}{dt^2}=-c^2k^2U$	$-k^2U+\dfrac{d^2U}{dy^2}=0$
	$U(k,t)=F(k)\exp(-c^2k^2t)$	$U(k,t)=A(k)\exp(ikct)$ $+B(k)\exp(-ikct)$	$U(k,y)=A(k)\exp(ky)$ $+B(k)\exp(-ky)$ $=A(k)\exp(-ky)$ $=F(k)\exp(-ky)$
[III]solution	$u(x,t)=F^{-1}(U(k,t))$ $=f(x)*\dfrac{1}{2\sqrt{\pi c^2t}}\times\exp\left(\dfrac{x^2}{4c^2t}\right)$ $=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(\zeta)\dfrac{1}{2\sqrt{\pi c^2t}}\times\exp\left(\dfrac{(x-\zeta)^2}{4c^2t}\right)d\zeta$	$u(x,t)=F^{-1}(U(k,t))$ $=a(x)*\delta(x+ct)$ $+b(x)*\delta(x-ct)$ $=a(x+ct)+b(x-ct)$ $u(x,0)=a(x)+b(x)=f(x)$ $u_t(x,0)=ca'(x)+cb'(x)$ $=g(x)$ $a(x)-b(x)=\dfrac{1}{c}\displaystyle\int g(\zeta)d\zeta$ $=\dfrac{1}{c}G(x)$ $a(x)=\dfrac{1}{2}\{f(x)+\dfrac{1}{c}G(x)\}$ $b(x)=\dfrac{1}{2}\{f(x)-\dfrac{1}{c}G(x)\}$ $u(x,t)=\dfrac{1}{2}\{f(x+ct)+f(x-ct)\}$ $+\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct}g(\zeta)d\zeta$	$u(x,y)=F^{-1}(U(k,y))$ $=f(x)*\dfrac{1}{\pi}\dfrac{y}{x^2+y^2}$ $=\dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{f(\zeta)}{(x-\zeta)^2+y^2}d\zeta$

[Ⅰ] 原方程式をxについてフーリエ変換する

⇩

[Ⅱ] U(k, t)のtに関する微分方程式を解く

⇩

[Ⅲ] U(k, t)の逆変換を行なう

フーリエ変換による解法が最も威力を発揮するのは，次のことである：偏微分方程式の基本解，即ち，$\Diamond u(x,t)=\delta(x,t)$の解$u(x,t)$が既知であるとき，非斉次の方程式$\Diamond u'=f(x,t)$の解$u'(x,t)$が，たたみこみ$(u*f)$として得られることである。

付録．フーリエ級数展開の要約

(A)　フーリエ級数展開とは

n個のベクトル$\mathbf{e}_i$ ($i=1,2,\cdots\cdots,n$)が

$$(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=\delta_{ij},\ |\mathbf{e}_i|=1 \tag{1}$$

のとき，n個のベクトルは正規直交系をつくるという。n次元ベクトル空間V^nの任意のベクトル$\mathbf{X}$は，(1)を用いて次のように展開できる：

$$\mathbf{X}=\sum_{i=0}^{n} a_i\mathbf{e}_i \tag{2}$$

$$a_i=(\mathbf{X},\mathbf{e}_i) \tag{3}$$

ここに，a_iは展開定数で，

$$|\mathbf{X}|^2=(\mathbf{X},\mathbf{X})=\sum_{i=0}^{n}|a_i|^2 \tag{4}$$

を満たしている。ベクトル$\mathbf{X}$の大きさは

$$|\mathbf{X}|=\sqrt{|\mathbf{X}|^2}=\sqrt{\sum_{i=0}^{n}|a_i|^2}$$

である。n次元空間でのピタゴラスの定理である。

さて，今度は，任意の関数$f(x)$の展開を考える。初めから，任意の関数をとるのは難しいので，まず，$f(x)$が周期関数（その周期を2π）としよう。ここでは，関数の空間を取り扱うので，基底ベクトルに代わる言葉は基底関数である。空間の次元は有限とは限らず，一般には無限である。$f(x)$の展開式が余弦及び正弦三角関数を基底関数として，(2)のアナロジーから，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\{a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\} \tag{5}$$

と書けるとしよう。$n=0$の項を別に書けば，

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\} \tag{6}$$

となる。展開係数a_n，b_nを求めるには，内積を積分

$$\langle\cos(mx),\sin(nx)\rangle\equiv\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\sin(nx)\,dx \tag{7}$$

で定義する。(6)の基底関数系の間の関係として，

$$\langle\cos(mx),\sin(nx)\rangle=0 \quad (m\neq n,\ m,n\neq 0) \tag{8}$$

$$\langle\cos(mx),\cos(nx)\rangle=\pi\delta_{mn} \tag{9}$$
$$=2\pi\ (\text{但し，}m=n=0\text{に限る})$$

$$\langle\sin(mx),\sin(nx)\rangle=\pi\delta_{mn} \tag{10}$$

を得る。ベクトルの直交性のときのように，関数$f(x)$，$g(x)$の内積が零（$\langle f,g\rangle=0$）のとき，fとgは直交するという。こうして，展開係数a_n，b_nを求めるには，(6)式に基底関数をかけて積分する：

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx, \tag{11}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx \tag{12}$$

(6)式の展開係数a_0を始めから$a_0=a_0/2$にとれば，a_nのみの表式(11)で間に合う。このような関数$f(x)$の展開（(5)あるいは(6)式）をフーリエ級数展開という。

展開式(5)において，$f(x)$が偶関数ならば，

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx) \tag{13}$$

$f(x)$が奇関数ならば，

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx) \tag{14}$$

である。(13)と(14)を，それぞれフーリエ余弦及び正弦級数展開という。

これらの展開定数について直交性関係から，

$$\frac{1}{\pi}|f|^2=\frac{|a_n|^2}{2}+\sum_{n=1}^{n}\{|a_n|^2+|b_n|^2\} \tag{15}$$

が成り立つ（Parsevalの等式)。ここに，関数$f(x)$の大きさの定義は，

$$\sqrt{|f|^2}=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)f(x)\,dx}\equiv\|f\|\geqq 0$$

で，$\|f\|$を関数$f(x)$のノルム（norm）という。等号が成り立つのは$f(x)=0$に限る。$\|f\|=1$にとることを規格化（正規化）するという。ベ

クトルの大きさについて成り立つ関係式は，ノルムについても成り立つ：

$\|af\| = a\|f\|$　（ a は定数）
$\|fg\| \leqq \|f\|\ \|g\|$（ Cauchy-Schwalz の不等式）
$\|f+g\| \leqq \|f\| + \|g\|$　（三角不等式）

基底単位ベクトルに対応して，基底関数(f_i , i ＝0，1，2，……）として，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \sqrt{\frac{1}{\pi}}\cos(nx),\sqrt{\frac{1}{\pi}}\sin(nx) \tag{16}$$

をとれば，(8)—(10)から，

$$(f_i, f_j) = \delta_{ij} \tag{17}$$

を満たすので，正規直交関数系になる．区間［0，π］において，{ cos (nx)}，{ sin (nx)}の関数列は，

$$< \cos(mx), \cos(nx) >= \delta_{mn}\frac{2}{\pi}$$

$$< \sin(mx), \sin(nx) >= \delta_{mn}\frac{2}{\pi}$$

を満たすので直交関数系になる。$\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(nx)\right\}$，$\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx)\right\}$にとれば，正規直交関数系である。

三角関数と指数関数の間には

$$e^{\pm inx} = \cos(nx) \pm \sin(nx) \tag{18}$$

の関係式があるので，基底関数として三角関数の代わりに指数関数も使える：

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}) \tag{19}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,\ c_{-n} = \overline{c_n} \tag{20}$$

と書ける。ここに，係数 c_n と a_n , b_n の関係は，

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \tag{21}$$

である。この展開を複素型フーリエ級数展開といい，上述の三角関数による展開を実数型フーリエ級数展開という。

周期を 2π から 2 p（一般区間）に代えれば，(18)，(19)式は，

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/p} \tag{22}$$

$$cn = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{-in\pi x/p}dx,\ c_{-n} = \overline{c_n} \tag{23}$$

と書ける。実数型の表現をとれば，

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(\frac{n\pi}{p}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{p}\right)\right\} \tag{24}$$

である。

(B) フーリエ級数展開の意味

そもそも基底関数として三角関数列{ sin (nx)}，{ cos (nx)}（あるいは，指数関数列 $e^{\pm inx}$ ）をとる意味及び展開係数の意味について考察しよう。

三角関数 Asin (nx)＋ Bcos (nx)は，微分方程式

$$y''(x) + k^2y(x) = 0 \tag{1}$$

によって規定されている関数である。この微分方程式に，閉区間［$-\pi$，π］の両端で，

$$y(-\pi) = y(\pi),\ y'(-\pi) = y'(\pi) \tag{2}$$

という条件，周期境界条件を課すと，解をもつには，定数 k

$$k_n = n^2 > 0 \tag{3}$$

に制限がつき，それに対応した解（固有関数）として，

$$\sin(nx),\ \cos(nx) \tag{4}$$

を得る。それらを正規直交化

$$< y_m,\ y_n >= \delta_{mn}$$

した関数列を{ y_n (x)}で表すと，［$-\pi$，π］における任意の関数 f (x ）を，

$$f(x) = \Sigma c_n y_n(x),\ c_n = < f,\ y_n > \tag{5}$$

と展開したものがフーリエ級数であるといえる。

フーリエ係数 c_n は，関数 f (x ）とその近似式 Σd_iy_i の誤差（平均自乗誤差）

$$(\mathrm{I}) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \Sigma d_iy_i(x)|^2 dx \tag{6}$$

を最小にするときの係数であることが示せる。即ち，係数 d_i に対して(I)が極小になる条件

$$\frac{\partial(\mathrm{I})}{\partial d_i} = \int_{-\pi}^{\pi} -2(f(x) - \Sigma d_jy_j(x))\overline{y_i}(x)dx = 0$$

から，

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)y_idx = < f,\ y_i >$$
$$= \Sigma d_j \int y_j(x)\overline{y_i}(x)dx = d_j\delta_{ji} = d_i$$

を得られる。あるいは，次のように(6)式を変形する：

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I}) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \Sigma d_i y_i \right|^2 dx \\
&= \int (f(x) - \Sigma d_i y_i)\overline{(f(x) - \Sigma d_i y_i)}\, dx \\
&= \int (f(x) - \Sigma d_i y_i)(\bar{f}(x) - \Sigma \overline{d_i y_i})\, dx \\
&= \int f(x)\bar{f}(x)\,dx - \Sigma \bar{d}_i \int \bar{y}_i f(x)\,dx - \Sigma d_i \int y_i \bar{f}(x)\,dx + \Sigma \bar{d}_i d_j \delta_{ij} \\
&= \int |f(x)|^2 dx - \Sigma \bar{d}_i c_i - \Sigma d_i \bar{c}_i + \Sigma d_i \bar{d}_i + \Sigma c_i \bar{c}_i - \Sigma |c_i|^2 \\
&= \int |f(x)|^2 dx - \Sigma |c_i|^2 + \Sigma (d_i - c_i)(\bar{d}_i - \bar{c}_i) \\
&= \int |f(x)|^2 dx - \Sigma |c_i|^2 + \Sigma |d_i - c_i|^2 \\
&\geqq \int |f(x)|^2 dx - \Sigma |c_i|^2 \qquad (7)
\end{aligned}
$$

得る。等号は，$d_i = c_i$ の時に成り立つ。よって，量(I)が最小となるのは，係数 d_i がフーリエ係数のときに限る。

量(I)は，(I)$\geqq 0$ であるから，(7)式より，

$$\int |f(x)|^2 dx \geqq \Sigma |c_i|^2 \qquad (8)$$

が成り立つことになる(Besselの不等式)。等号が成り立つ(Parsevalの等式)とき，関数列{y_n}は完全系をなすという。

(8)式において，左辺の積分値が有限ならば，右辺の級数は収束しなければならないので，

$$\lim_{n\to\infty} c_n \to 0 \qquad (9)$$

がいえる(Cauchy-Riemann定理)。

(平成5年11月30日受理)