

呼吸球および円形振動板の放射インピーダンス解析

藤 島 豊*

Analysis of the Radiation Impedance of a Breathing Sphere and a Circle Diaphragm

Yutaka FUJISHIMA

Abstract

This paper express a time response analysis of a three-dimensional sound field by Bergeron's method.

For example it is analysis that two radiation impedance of a breathing sphere and a circle diaphragm on infinite baffle.

Results of there analysis are good and this method is applied to more involved problems.

1. ま え が き

音場解析における放射インピーダンスの計算は音の放射の目安を与えるものとして重要な要素である。ここでは理論的に明らかになっている呼吸球と、無限大バッフルに取付けられた円形振動板の放射インピーダンスを、3次元音場に拡張したBergeron法(空間回路網法)を用いて時間応答シミュレーションを行い、解析解を求め理論解と比較検討を行うことにより、Bergeron法を3次元音場に適用できることを明らかにし、より複雑な音場モデルにおける放射インピーダンス計算の可能性を示している。

2. 3次元音場の等価回路

Bergeron法を1次元音場へ適用する等価回路表現、および時間応答解析の手法については、すでに本校紀要第26号で述べているが⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾、この1次元音場の等価回路を立方格子状に組合せて図1のような等価回路を考え、立方格子網による波動方程式を表1のように、等価回路定数と音場定数とを対応させることにより、以下に述べるように実現することができる。ここに R 、 L 、 C 、 G はそれぞれ線路の単位長さ当りの抵抗、インダクタンス、容量、コンダクタンスで、各線路の長

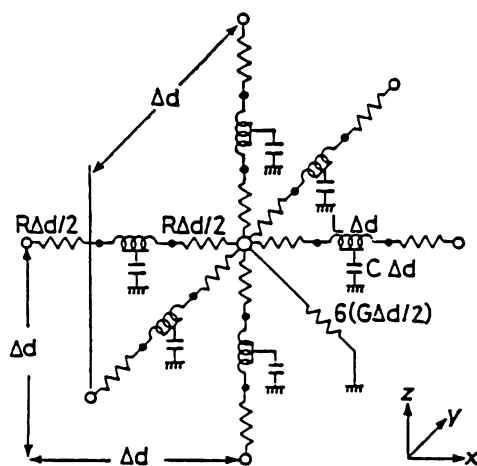


図1 音場の3次元等価回路

表1 等価回路と3次元音場の対応

等価回路		音 場	
電 圧	V	音 圧	P
電 流	I	粒子速度	u
インダクタンス	L	媒質密度	ρ
容 量	C	体積弾性率の逆数	$1/3 \kappa$
特性インピーダンス (1次元線路)	Z	特性インピーダンス (平面波)	$\sqrt{3 \rho \kappa}$
抵 抗	R	音響抵抗	r
コンダクタンス	G	音響コンダクタンス	$g/3$

* 助教授 電気工学科

さは Δd であり、各節点間は空気中の平面波音場に対応する特性インピーダンスと伝搬時間をもつ1次元線路で接続、構成されている。

無損失1次元線路の基礎方程式は電圧波 V 、電流波 I とすると

$$\frac{\partial V}{\partial u} = -L \frac{\partial I}{\partial t}, \quad \frac{\partial I}{\partial u} = -C \frac{\partial V}{\partial t} \quad (1-1)$$

で表される。 u は x, y, z のいずれかの座標である。

電圧降下と各線路の midpoint に平均化させた電流により、 x 方向についての差分表示は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta d} \{ V(x - \Delta d, y, z, t) - V(x, y, z, t) \} \\ &= L \frac{\partial}{\partial t} I_{x1} \left(x - \frac{\Delta d}{2}, y, z, t \right) \\ &+ R I_{x1} \left(x - \frac{\Delta d}{2}, y, z, t \right) \\ & \frac{1}{\Delta d} \{ V(x, y, z, t) - V(x + \Delta d, y, z, t) \} \\ &= L \frac{\partial}{\partial t} I_{x2} \left(x + \frac{\Delta d}{2}, y, z, t \right) \\ &+ R I_{x2} \left(x + \frac{\Delta d}{2}, y, z, t \right) \end{aligned} \quad (1-2)$$

と表わすことができる。さらに x, y, z の全体についても電流連続条件を用いて

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta d^2} \{ V(x - \Delta d, y, z, t) + V(x + \Delta d, y, z, t) \\ &+ V(x, y - \Delta d, z, t) + V(x, y + \Delta d, z, t) \\ &+ V(x, y, z - \Delta d, t) + V(x, y, z + \Delta d, t) \\ &- 6 V(x, y, z, t) \} \\ &= \left(L \frac{\partial}{\partial t} + R \right) \cdot 3 G V(x, y, z, t) \\ &+ \left(LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} + RC \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \frac{1}{6} \left\{ V \left(x - \frac{\Delta d}{2}, y, z, t \right) \right. \\ &+ V \left(x + \frac{\Delta d}{2}, y, z, t \right) + V \left(x, y - \frac{\Delta d}{2}, z, t \right) \\ &+ V \left(x, y + \frac{\Delta d}{2}, z, t \right) + V \left(x, y, z - \frac{\Delta d}{2}, t \right) \\ &+ V \left(x, y, z + \frac{\Delta d}{2}, t \right) \} \end{aligned} \quad (1-3)$$

となる。この式は立方格子回路網の分割 Δd を十分に細かくすることにより

$$\begin{aligned} \nabla^2 V(x, y, z, t) &= 3 LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(x, y, z, t) \\ &+ 3 (LG + RC) \frac{\partial}{\partial t} V(x, y, z, t) \\ &+ 3 RGV(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (1-4)$$

なる波動方程式に帰着する。したがって(1-4)式は表1の対応により次の音圧に関する波動方式となる。

$$\nabla^2 P = \frac{\rho}{\kappa} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \left(\rho g + \frac{\gamma}{\kappa} \right) \frac{\partial P}{\partial t} + \gamma g P \quad (1-5)$$

粒子速度に関しても同様に導くことができる。ここで平面波音場の特性インピーダンスを Z_0 、伝搬時間を Δt_0 とすれば、

$$Z = \sqrt{L/C} = \sqrt{3 \rho \kappa} = \sqrt{3} Z_0 \quad (1-6)$$

$$\Delta t = \Delta d \sqrt{LC} = \Delta d \sqrt{\rho/3 \kappa} = \Delta t_0 / \sqrt{3} \quad (1-7)$$

となる。

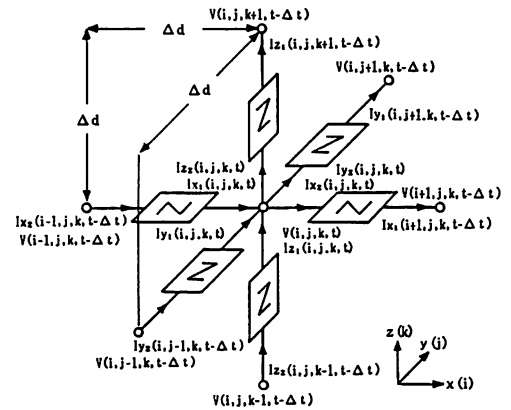


図2 3次元音場の Bergeron 等価回路 (離散座標系)

3次元音場を図2のように離散化した座標系を用いて各線路に対して1次元の Bergeron 表示式を適用すると、

$$\begin{aligned} & V(i, j, k, t) + Z_{I_{x1}}(i, j, k, t) \\ &= V(i-1, j, k, t - \Delta t) + Z_{I_{x2}}(i-1, j, k, t - \Delta t) \\ &V(i, j, k, t) - Z_{I_{x2}}(i, j, k, t) \\ &= V(i+1, j, k, t - \Delta t) - Z_{I_{x1}}(i+1, j, k, t - \Delta t) \\ &V(i, j, k, t) + Z_{I_{y1}}(i, j, k, t) \\ &= V(i, j-1, k, t - \Delta t) + Z_{I_{y2}}(i, j-1, k, t - \Delta t) \\ &V(i, j, k, t) - Z_{I_{y2}}(i, j, k, t) \\ &= V(i, j+1, k, t - \Delta t) - Z_{I_{y1}}(i, j+1, k, t - \Delta t) \\ &V(i, j, k, t) + Z_{I_{z1}}(i, j, k, t) \\ &= V(i, j, k-1, t - \Delta t) + Z_{I_{z2}}(i, j, k-1, t - \Delta t) \\ &V(i, j, k, t) - Z_{I_{z2}}(i, j, k, t) \\ &= V(i, j, k+1, t - \Delta t) - Z_{I_{z1}}(i, j, k+1, t - \Delta t) \end{aligned} \quad (1-8)$$

が得られる。中心節点 (i, j, k) で電流連続条件が成り立つことから

$$I_{x1}(i, j, k, t) + I_{y1}(i, j, k, t) + I_{z1}(i, j, k, t)$$

$$= I_{x2}(i, j, k, t) + I_{y2}(i, j, k, t) + I_{z2}(i, j, k, t) \quad (1-9)$$

で (1-8) 式, (1-9) 式により

$$\begin{aligned} V(i, j, k, t) &= \frac{1}{6} \left\{ V(i-1, i, k, t-\Delta t) + Z_{L2}(i-1, j, k, t-\Delta t) \right. \\ &+ V(i+1, j, k, t-\Delta t) - Z_{L1}(i+1, j, k, t-\Delta t) \\ &+ V(i, j-1, k, t-\Delta t) + Z_{L2}(i, j-1, k, t-\Delta t) \\ &+ V(i, j+1, k, t-\Delta t) - Z_{L1}(i, j+1, k, t-\Delta t) \\ &+ V(i, j, k-1, t-\Delta t) + Z_{L2}(i, j, k-1, t-\Delta t) \\ &+ V(i, j, k+1, t-\Delta t) - Z_{L1}(i, j, k+1, t-\Delta t) \left. \right\} \quad (1-10) \end{aligned}$$

が導かれ, 任意の時刻 t における電圧を, 中心節点を取りまく各節点における 1 離散時間前 ($t - \Delta t$) の値によって決定することができることとなる。

この電圧が求まったことにより (1-8) 式より各線路における任意の時刻 t での電流も決定できる。

3. 放射インピーダンスの解析手法

3-1 呼吸球の放射インピーダンス⁽⁴⁾

一様な媒質で満たされた広い空間, すなわち 3 次元の自由空間の 1 点からの音波の放射は球面波となって広がる。広い空間へ音波が広がっていくときは反射波は生じないと仮定でき, 振動速度 (粒子速度) U_a で呼吸する半径 a の球体の表面音圧を P_a とすると, 呼吸球の表面における放射インピーダンス Z_a は, 一般に $Z_a = P_a / U_a$ で表わされ, 波長定数 k との関係式は

$$Z_a = \rho c \frac{jka}{1 + jka} = \rho c \frac{(ka)^2 + jka}{1 + (ka)^2} = r_a + jX_a \quad (3-1)$$

となる。ここに ρc は音場の特性インピーダンス Z_0 であり, r_a , x_a はそれぞれ放射インピーダンス Z_a の実部, 虚部を示している。

放射インピーダンスは音の放射の目安を与えるもので, ρc に比例し, 波長と球体半径との比 $ka = 2\pi a / \lambda$ で変化する。

Bergeron 法により 3 次元音場の時間応答シミュレーションを行い, 各格子点における音圧 P_a と振動速度 U_a を求めることにより放射インピーダンスの解析が可能となる。すなわち格子間隔 Δd を呼吸球の半径に対応させ, この Δd を変化させたときの呼吸球の表面に相当する格子点における $P_a U_a$ の時間応答波形から, P_a , U_a の位

相差を求めることにより放射インピーダンス Z_a の実部と虚部が算出でき, ka の変化に対する Z_a の変化を知ることができる。

3-2 無限大バッフルに取付けられた円形振動板の放射インピーダンス⁽⁴⁾

呼吸球の放射インピーダンス解析手法を円形振動板の放射インピーダンス解析に応用し, 理論的に明らかにされている無限大バッフルに取付けられた場合の理論解と比較することにより, より一般的な音場における放射インピーダンス解析に適用できることを述べる。

円形振動板の放射インピーダンス Z_a は円板の振動に対して媒質から加えられる反力による振動面上の平均音圧 P_a と振動速度 U_a の比として表わされる。その結果は次式に示すように, 1 次のベッセル関数で示される実部と, ストローク関数で示される虚部とで表現でき

$$\begin{aligned} Z_a = \frac{P_a}{U_a} &= \rho c \left\{ 1 - \frac{2J_1(2ka)}{2ka} + j \frac{2S(2ka)}{(2ka)^2} \right\} \\ &= r_a + jX_a \quad (3-2) \end{aligned}$$

となる。したがって振動板の面積 (完全な円形とはならず格子面積で近似される) を変える (すなわち円板の半径変化) ことにより, 相対的に ka を変化させることができ, それぞれの面積における平均音圧 P_a と振動速度 U_a を時間応答波形として求めることで呼吸球の場合と同様の手法により, 放射インピーダンスの実部と虚部を計算することができる。

4. 解析結果

4-1 呼吸球の場合

図 3 に解析モデルを示す。A 点に呼吸球の中心を置き, その対称性から実モデルは, $60\Delta d \times 60\Delta d \times 60\Delta d$ とし, 一離散距離 $\Delta d = 0.98$ [m] を仮定することにより一離散時間 $\Delta t = 1.67$ [ms] とし呼吸球の振動周期 $T = 60\Delta t$ の正弦波を入力し, 観測点を ka に対応付けながら適宜に変えて (相対的に呼吸球の半径を変化させたことになる), その点での音圧 P_a と振動速度 U_a の時間応答波形を求め, この 2 変数の位相差を検出 (最小検出幅は Δd に依存する) する。音圧 P_a と振動速度 U_a の時間応答波形を観測点を変えて求めた結果が図 4 で, 両波形の位相変化の様子がよくわかる。すなわち ka が大きくなる (半径が大きくなる) に従って, 虚部の値が小さくなる (位相

差が少なくなる)ことがうかがえる。放射インピーダンスの理論値との比較図を図5に示す。ここで実線は理論値を示し、○印は実部、*印は虚部の解析値である。

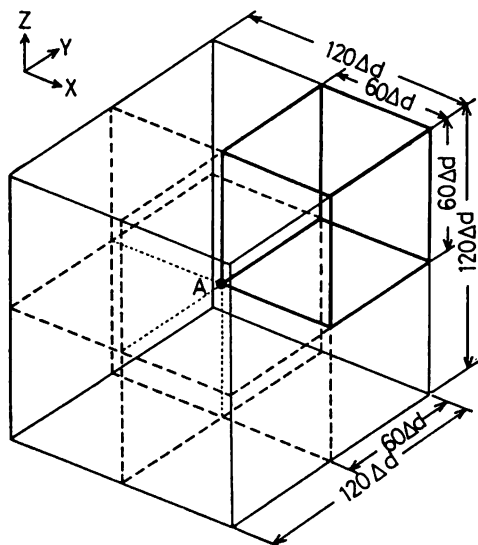


図3 呼吸球の解析モデル

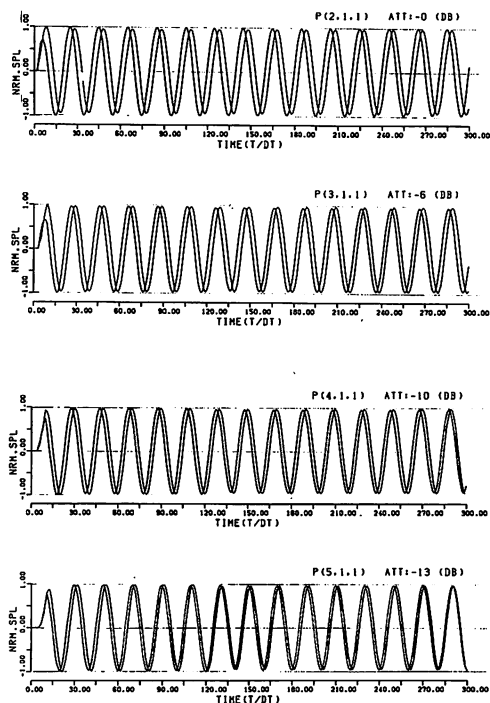


図4 音圧と振動速度の位相関係

(時間応答波形)

(進み波が音圧波, 遅れ波が振動速度波)

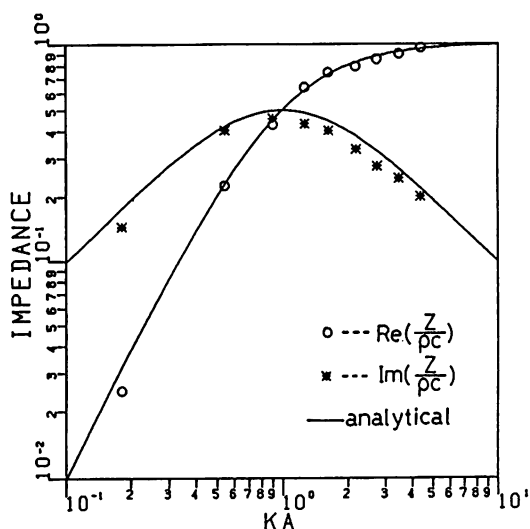


図5 呼吸球の放射インピーダンス解析結果

4-2 円形振動板の場合

図6に解析モデルを示す。図中の線BC, CDを自由境界条件とすることで面ABCDを無限大パツフルに相当させ、この面のA点を中心に円形振動板を半径 Δd の整数倍としている。(実際の振動板面積は理論値の πa^2 とは異なり、方形メッシュで近似される)

呼吸球の場合と同様の条件のもと、音源としては、正弦波を円板面全体に同位相で入力し、 $ka = 0.1 \sim 10.0$ の範囲の解析が可能となるように音源の離散周期を $T = 40 \Delta t$ とした。なお対称性を考慮して面ADEH, ABEFは対称面、面CDGH,

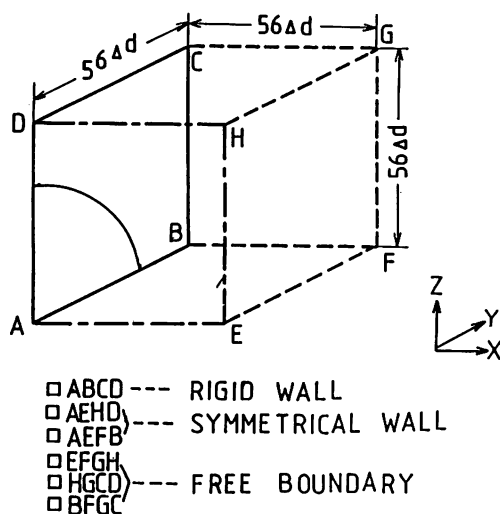


図6 円形振動板の解析モデル

EFGH は自由境界面となるように境界条件を設定している。解析結果を図 7 に示す。

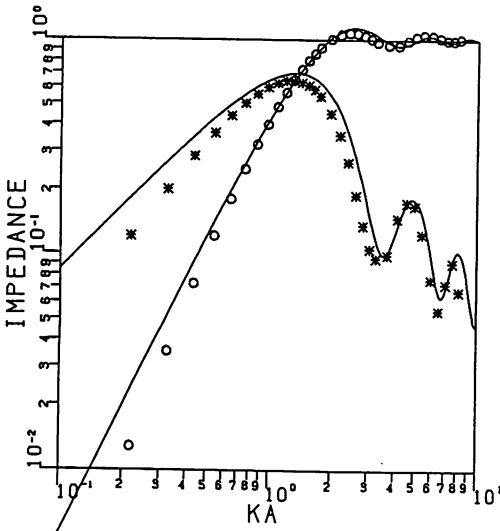


図 7 円形振動板の放射インピーダンス解析結果

5. 検 討

図 5, 図 7 の解析結果から, どちらの解析も満足できるものであり, 全体として Bergeron 法による 3 次元音場の時間応答解析の妥当性が示された。

しかし部分的に考察を行うと, 両者共, 実部に対して虚部の精度が劣っていることがうかがえる。これは Z_a を求める際の計算方法の順序としてまず実部を先に導出した後に虚部を求める方法をとったために, その蓄積誤差が虚部に多く表われたものと考えられる。またさらに ka の低いところと逆に高いところで理論値との誤差が比較的大きく表われているが, 低いところでは球及び円形振動板の半径が小さく, 特に円形振動板においては近似円としての評価点が少なくなり実際の円を実現できていないことによる。また ka の高いところでは, 先にも述べているところであるが音圧 P_a と振動速度 U_a との位相差が少なくなることから一離散距離 Δd 以下では位相差の検出は不可能

であり, Δd に近いところでの評価に多くの誤差が生じてしまうことが主たる原因である。この改善方法としては, 一離散距離 Δd をできる限り小さくすること, すなわち決められた空間を細かく分割することが有効な手段であることは言うに及ばない。

6. あとがき

以上, Bergeron 法による 3 次元音場解析の応用例として, 理論的に明らかである 2 つの例を挙げて放射インピーダンスの計算が可能であることを示したが, この計算手法は, あらゆる音場における音の放射の目安を得る為に有効であり, いろいろなモデル, 例えばホーンを設けた場合のホーンの各部及びホーン外部の音場空間における放射インピーダンスの変化の具合から放射の特徴を把握できるなどが考えられる。また時間応答解析の特徴を生かして, 過渡応答へ応用したり, 周波数応答解析を検討することも可能である。さらに今回の解析は計算機を実験室及び実験装置に見立てて, 実験が困難なモデルに対する数値実験としての価値があり, シミュレーション技術の応用として, より複雑な問題に応用範囲を広げることが可能である。

参考文献

- (1) 藤島 豊「空間回路網法による 1 次元音場の定式化」苦小牧工業高等専門学校紀要第 26 号 pp. 33~41 (1991. 3)
- (2) 吉田則信, 深井一郎「電磁界の節点方程式による過渡解析」電子通信学会論文誌 Vol. J 63 - B. No 9 pp 876~883 (1980. 9)
- (3) 高木 彰, 吉田則信, 深井一郎「駆動系および受音系を含む音場の統一的時間応答解析」信学論(A) J 68 - A, 7, pp 688~695 (1975. 7)
- (4) 早坂壽雄, 吉川昭吉郎「音響振動論」丸善 (1974)

(平成 5 年 11 月 25 日受理)

