

教育用デジタル制御実験装置の開発

木 村 太*

The Development of an Educational Experimental System
Using Digital Control

Futoshi KIMURA

Abstract

The author developed an educational experimental system with DC motor for the student of electrical engineering. In this system, the rotational speed of DC motor was controlled using digital control and optimal control. It is possible to get the effect of feedback control by using this system easily.

1. はじめに

近年の急速なマイクロコンピュータの発達によって、家庭製品から産業機器まであらゆるところでデジタル制御が適用されている。また、従来用いられてきたアナログ制御もそのほとんどがデジタル制御に置き換わりつつある。これはアナログ制御に比べデジタル制御の方が簡単さ、融通性、高機能性の点で優れているからである。

このような状況を反映して、本学科でも高学年を対象に制御工学(アナログ制御)、デジタル制御工学を履修させている。しかしながら、この分野の学習は理論だけを学んでも完全に理解することは難しく、何らかの実習、実験が必要と思われる。

そこで、身近な機器を制御対象としてフィードバック制御の効果を体験できるデジタル制御実験装置、およびその制御系設計プログラムを開発したので、ここに報告する。

2. 制御実験装置

制御工学の教育用として装置を設計する場合、制御対象が簡単な数式モデルで表せること、さらに取り扱う機器については座学や実験ですでに学んでいることが望ましい。これらの点から、本装

置では制御対象に直流電動機を選び、電圧制御による速度(回転数)制御を制御系の目的とした。

図1に実験装置構成図を示す。直流電動機の速度は、可変直流電源から印加される電圧により目標速度に制御される。直流電源の出力電圧は、センサ信号から算定された指令電圧により変えられる。また、直流電動機には直流発電機がカップリングされており、電動機の出力は発電機と負荷装置(ランプ負荷)で消費される。この負荷を可変することで電動機の負荷トルクが変わり、これが制御系の外乱となっている。制御用のパソコンには速度、端子電圧、電機子電流がセンサ信号としてA/Dコンバータを介し入力され、可変電源への指令電圧および負荷開閉用のリレー回路操作電圧がD/Aコンバータを介して出力される。

実験では主回路スイッチの開閉、電動機および発電機の界磁電流の設定は手動で行うが、電動機の始動から運転、停止まではすべてパソコンのキー操作で行う。

表1 各機器の定格

直流電動機	出力2.2[kW],電圧100[V],電流28[A]
直流発電機	出力2.2[kW],電圧100[V],電流20[A]
直流電源	指令電圧0-10[V],出力電圧0-100[V]
リレー回路	操作電圧:TTLレベル 信号Hで負荷投入,Lで開放

* 助手 電気工学科

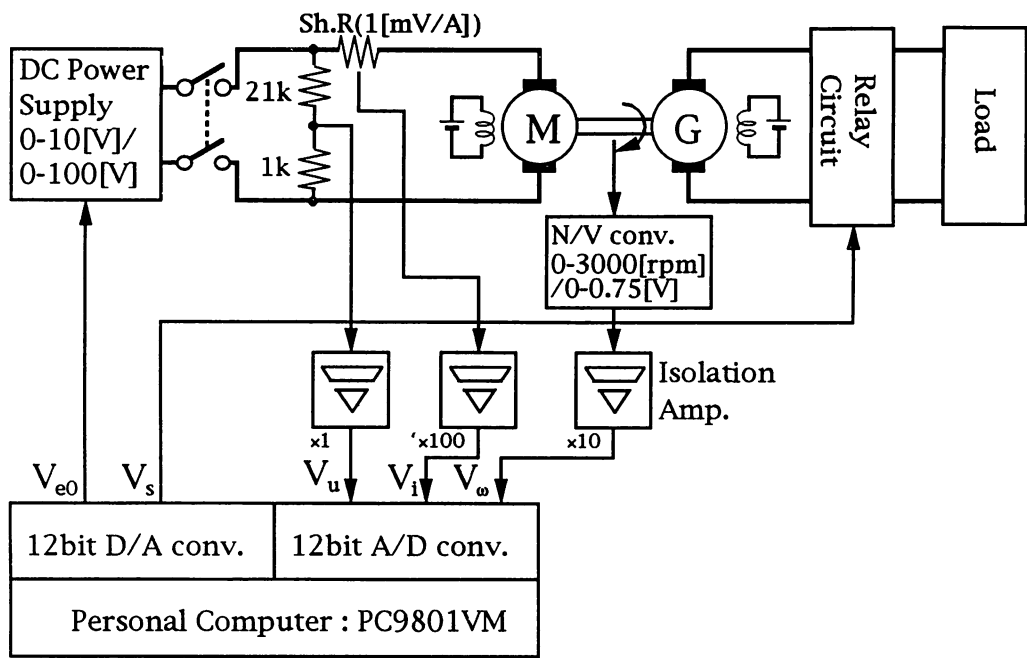


図1 実験装置の構成

表2 諸信号の仕様

センサ信号	Vu	端子電圧	抵抗分圧	100[V]に対し5[V]出力
	Vi	電機子電流	分流器	1[A]に対し1[mV]出力
	Vω	電動機回転角速度	光学式回転計	3000[rpm]に対し0.75[V]出力
操作信号	Ve0	直流電源指令電圧	0～10[V]	
	Vs	リレー回路操作電圧	TTLレベル	

各機器の定格等を表1に、諸信号の仕様を表2に示す。

3. 制御系の設計

3. 1 直流電動機の数式モデル

界磁電流を一定とし、電機子インダクタンスの影響を無視した場合の直流機の回路方程式は(1)、(2)式となる。

$$u=i_a r_a+e_m \tag{1}$$

$$e_m=k_v \omega \tag{2}$$

ここに、u:端子電圧(直流電源出力電圧)、i_a:電機子電流、r_a:電機子抵抗、e_m:誘導起電力、k_v:電圧定数、ω:回転角速度(回転数×2π/60)

次に回転系の運動方程式を導くと、

$$\tau_m=J_m \frac{d\omega}{dt}+B_m \omega+J_g \frac{d\omega}{dt}+B_g \omega+\tau_g \tag{3}$$

$$\tau_m=k_v i_a \tag{4}$$

となる。

ここで、τ_m:電動機トルク、J_m,J_g:慣性モーメン

ト、B_m,B_g:粘性摩擦係数、τ_g:発電機トルク(添字のmは電動機を、gは発電機を表す)、以上の式からωについての1次微分方程式を求めると次式となる。

$$\frac{d\omega}{dt}=-\left(B_c+\frac{k_v^2}{r_a}\right)\frac{1}{J_c}\omega+\frac{k_v}{r_a}\frac{1}{J_c}u-\frac{1}{J_c}\tau_g \tag{5}$$

ただし、B_c=B_m+B_g,J_c=J_m+J_gとする。

制御系を記述する状態方程式は状態変数を次のようにとると(7)式となる。

$$x=x_1=\omega \tag{6}$$

$$\frac{dx}{dt}=Fx+gu+l \tag{7}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} F &= -\left(B_c+\frac{k_v^2}{r_a}\right)\frac{1}{J_c} \\ g &= \frac{k_v}{r_a}\frac{1}{J_c} \\ l &= -\frac{\tau_g}{J_c} \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

また、状態変数 x_1 はセンサで検出することができるので、出力方程式は(9)式となる。

$y=cx$ (9)

ただし、 $c=1$ (10)

本装置ではデジタル制御を行うので、状態方程式を離散化すると次式が得られる。

$x(k+1)=Ax(k)+bu(k)+d$ (11)

$y(k)=cx(k)$ (12)

ただし、

$$\left. \begin{aligned} A &= e^{FT_s} \\ b &= \int_0^{T_s} e^{F\tau} d\tau g \\ d &= \int_0^{T_s} e^{F\tau} d\tau l \end{aligned} \right\}$$
 (13)

上式において添字 k は k 番目のサンプル値を、 T_s はサンプリング時間を表す。

表 3 に直流電動機の諸定数を示す。

表 3 直流機の諸定数

Ra	0.681[Ω]
Jc	4.806×10 ⁻¹ [Nms ²]
Bc	3.993×10 ⁻³ [Nms]
kv	5.819×10 ⁻¹
界磁電流1.6[A]のとき	

3. 2 コントローラ的设计

コントローラは制御系内のすべての状態を用いる状態フィードバック制御とした。(11)式においてフィードバックする状態変数は x_1 のみであるが、実際にはサンプリングによる時間遅れが生じるために操作量 u もコントローラ内に存在しており、 u もフィードバックする必要がある。また、外乱が加わる状態で目標値に追従させるため x_1 について

はサーボ系を適用した。

以上より、コントローラを含めた制御系を記述する方程式は(14)から(17)式となり、そのブロック図は図 2 となる。

$x(k+1)=Ax(k)+bu(k-1)+d$ (14)

$w_0(k)=u(k-1)$ (15)

$u(k)=k_1(r_\omega-x_1(k))-k_2w(k)-k_0w_0(k)$ (16)

$w(k+1)=w(k)+x_1(k)-r_\omega$ (17)

図 2 において r_ω は ω の目標値、また k_0, k_1, k_2 はフィードバック係数である。

実際の制御は次の手順に従って行う。

①センサから得た回転角速度 ω ($=x_1$) と制御偏差の積算値 $w(k)$ 、1 サンプリング前の操作量 $w_0(k)$ を(16)式に代入し操作量(端子電圧)を計算する。

②操作量から指令電圧を求め、これを可変電源へ出力する。

③(15)と(17)式を用いて $w_0(k)$ および $w(k)$ の値を更新する。

前述のフィードバック係数の決定には様々な方法があるが、今回は極配置と最適制御を用いた。

(1) 極配置による決定

極配置は制御系の極(固有値)を直接指定し、フィードバック係数を求める方法である。

状態変数を x, w, w_0 として(14)から(17)式を状態方程式にまとめると(18)式となる。

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ w(k+1) \\ w_0(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \\ w_0(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$
 (18)

ただし、 $r_\omega = 0$ としている。

上式の $u(k)$ に(16)式を代入すると、

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ w(k+1) \\ w_0(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \\ w_0(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_1x_1(k)-k_2w(k)-k_0w_0(k) \end{bmatrix}$$

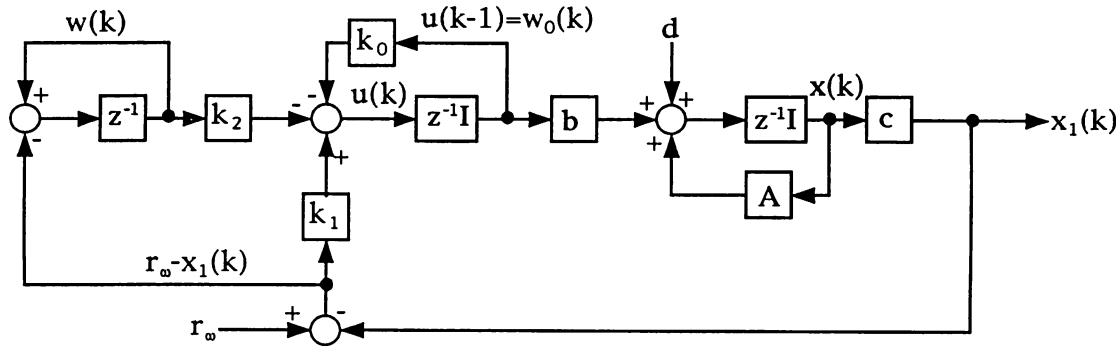


図 2 制御系ブロック図

$$= \begin{bmatrix} A & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & -k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \\ w_0(k) \end{bmatrix} \quad (19)$$

となる。ここで、

$$H = \begin{bmatrix} A & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & -k_0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

とし、この行列の特性方程式の根が指定した極になるようフィードバック係数を求める。

$$|sI - H| = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3) \quad (21)$$

ここで、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は指定した極である。

(2) 最適制御による決定

最適制御は、過渡応答を評価する評価関数が最小となるようにフィードバック係数を決定する方法である。

今、状態変数を次式とし、2次元の制御対象を考える。

$$x = [x_1, w]^T \quad (22)$$

$$x(k+1) = \tilde{A}x(k) + \tilde{b}u(k) \quad (23)$$

ただし、

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

これに対して、2次形式の評価関数

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \{ q_1 x_1^2(k) + q_2 w^2(k) + r u^2(k) \} \quad (25)$$

を最小とするフィードバック係数を求める。

(25)式において q_1, q_2 はそれぞれ x_1, w に関する重み係数であり、 r は u に関する重み係数である。

具体的には、次式で示されるリカッチ方程式の解より(28), (29)式で求められる。

$$P = Q + \tilde{A}^T P \tilde{A} - \tilde{A}^T P \tilde{b} (r + \tilde{b}^T P \tilde{b})^{-1} \tilde{b}^T P \tilde{A} \quad (26)$$

$$\text{ただし、} Q = \text{diag}[q_1, q_2] \quad (27)$$

$$k_f = (r + \tilde{b}^T P \tilde{b})^{-1} \tilde{b}^T P \tilde{A} \quad (28)$$

$$\begin{Bmatrix} k_1, k_2 \end{Bmatrix} = k_f \tilde{A} \\ k_0 = k_f \tilde{b} \quad (29)$$

4. 制御系設計プログラム

本プログラムは前章で述べた設計法に基づいて具体的な数値を計算し、過渡応答を求めるものである。図3にプログラムの流れを示す。

設計者は、画面の指示に従い数値等を入力することでフィードバック係数や過渡応答を得ることができる。(図4, 5, 6, 7)

また、フィードバック係数の算定では前述したように極配置と最適制御のどちらかを選択するこ

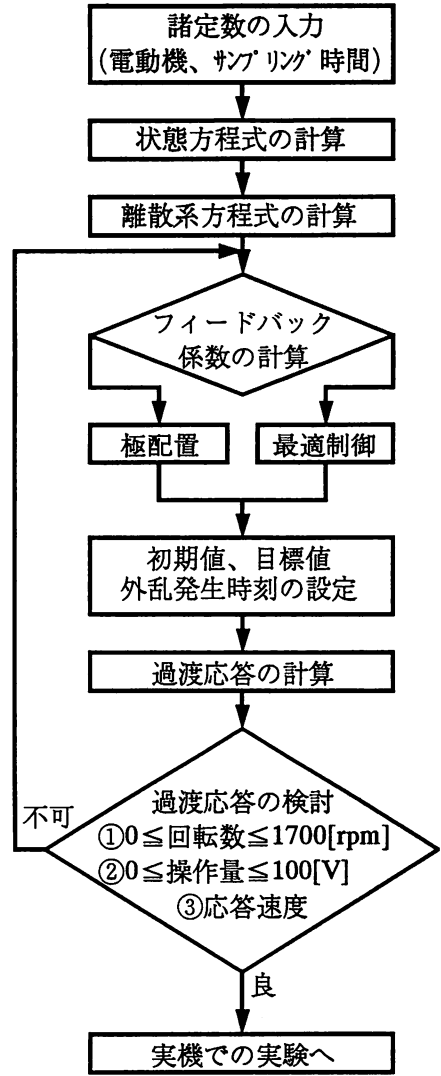


図3 プログラムの流れ

```
***** Input of Parameter *****
カンセイメント: J[kg・m^2] = 4.806e-1
デハンアツシヨウスウ: kv = 5.819e-1
ネンセイテイコウ: B[N・m・s] = 3.993e-3
デハンキシテイコウ: Rm[ohm] = 6.81e-1
トルク: Tg[N・m] = 10

サンプリング タイム: S.T.[msec] = 100
```

図4 諸定数入力画面

```
***** Output of F,g_matrix *****
F(1,1) = -1.043e+00
g(1,1) = 1.778e+00
カゝイラン l(1,1) = -2.081e+01

***** Output of A,b_matrix *****
A(1,1) = 9.010e-01
b(1,1) = 1.688e-01
カゝイラン d(1,1) = -1.976e+00
```

図5 状態方程式、離散系方程式出力画面

```
***** Input of Weight_coefficient *****
q.1= 10
q.2= 10
r= 10
```

図6 重み係数入力画面

```
***** Output of feedback_coefficient *****
k0= 2.691e-01
k1= 1.892e+00
k2= 4.563e-01
```

図7 フィードバック係数出力画面

```
***** Input of Pole *****
p1,p2,p3 (Real) ...1
p1,p2 (Real+Image),p3 (Real) ...2
Output of Feedback_coefficient ...3
End ...4
```

図8 極の入力選択画面

```
p.1= 0.1
p.2= 0.3
p.3= 0.5
```

図9 極の入力画面（全ての極が実数）

```
p1=m+jn p2=m-jn
Input m: 0.5
      n: 0.3
      p3: 0.7
```

図10 極の入力画面（実数と共役複素数の極）

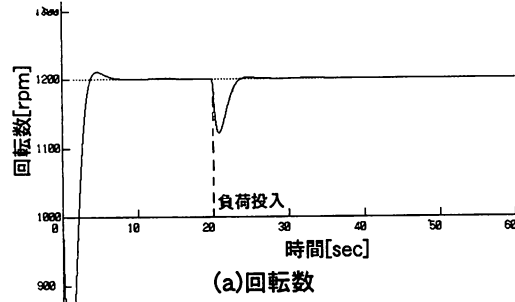
とができ、さらに極配置については3個の極を指定するため次の2通りを選択できるようにしている。(図8)

- ①全ての極が実数（図9）
- ②1つの実数極と共役複素数の極（図10）

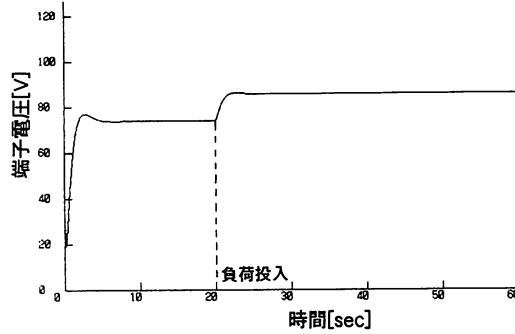
過渡応答の結果は図11のように表示され、この結果から設計者は、状態量や操作量が機器の制限事項内に収まっているかどうか、あるいは収束速度や行き過ぎ量に問題があるかどうかを検討し応答の良否を判定する。もし過渡応答が良ければこのフィードバック係数を用いて実機の実験へ進み、問題がある場合には再度フィードバック係数を求め、過渡応答を計算する。

5. 実機での結果

図2のコントローラを用いた実機での実験結果例を図12に示す。ここでは目標回転数1200[rpm]、サンプリング時間100[msec]、負荷投入は制御開始後20[sec]に設定している。なお、負荷の増減は手動で行った。図12において回転数は制御開始後速やかに目標値に制御されている。負荷の



(a)回転数



(b)端子電圧

図11 過渡応答例 ($T_s=100$ [msec]
界磁電流1.6[A],目標値1200[rpm]
発電機トルク10[Nm])

増減に対しても端子電圧の可変により、回転数は目標値に偏差なく制御されている。制御開始直後の回転数低下については、(10)式において第1回目の操作量の計算が、

$$u(1)=k_1(r_w-x_1(1))-k_0w_0(1)<w_0(1) \quad (30)$$

ここで、 $w_0(1)$:端子電圧の初期値となっているためである。これを解消するためには回転数の初期値を低くすればよく、実機においても確認されている。

この実験では電動機の出力が最大1.1[kW]（定格出力の1/2）と比較的軽負荷であるので、端子電圧は最大でも80[V]程度である。しかし、定格出力とする場合や、目標値を高くする場合は端子電圧が定常状態で100[V]以上となる恐れがある。これは、直流電動機の数値特性が次式であり

$$\omega=\frac{u-i_a r_a}{k_v}=\frac{u-i_a r_a}{k i_f} \quad (31)$$

ここに、 k :定数、 i_f :界磁電流
 i_f が一定で i_a が既知のときには、 $u=0\sim100$ [V]における速度の上限が決まってしまうからである。従って定格速度で定格出力とする場合などは、あらかじめ必要とされる界磁電流を求めてから、制御系の設計を行わなければならない。

6. おわりに

直流電動機を制御対象としたデジタル制御実験装置とその制御系設計プログラムを開発した。その結果以下のことが実現できた。

①デジタル制御と安定化理論の基礎知識があれば容易に制御系の設計ができる。

②実験を通してフィードバック制御の効果を確認できる。

本装置は現在のところ制御工学分野をテーマとしている卒業研究学生に、デジタル制御の有効性を確かめる教材として利用している。今後は高学年の学生実験に採り入れ、座学の支援にしたい。

最後にプログラムの開発に御協力いただいた電気工学科第27期生岡田君に感謝いたします。

参考文献

- 1) 上野・森下：デジタル制御工学，オーム社(1987)
 - 2) 中野・美多：制御基礎理論，昭晃堂(1991)
 - 3) 小郷・美多：システム制御理論入門，実教出版(1991)
 - 4) 藤田：電気機器，森北出版(1991)
- (平成7年11月15日受理)

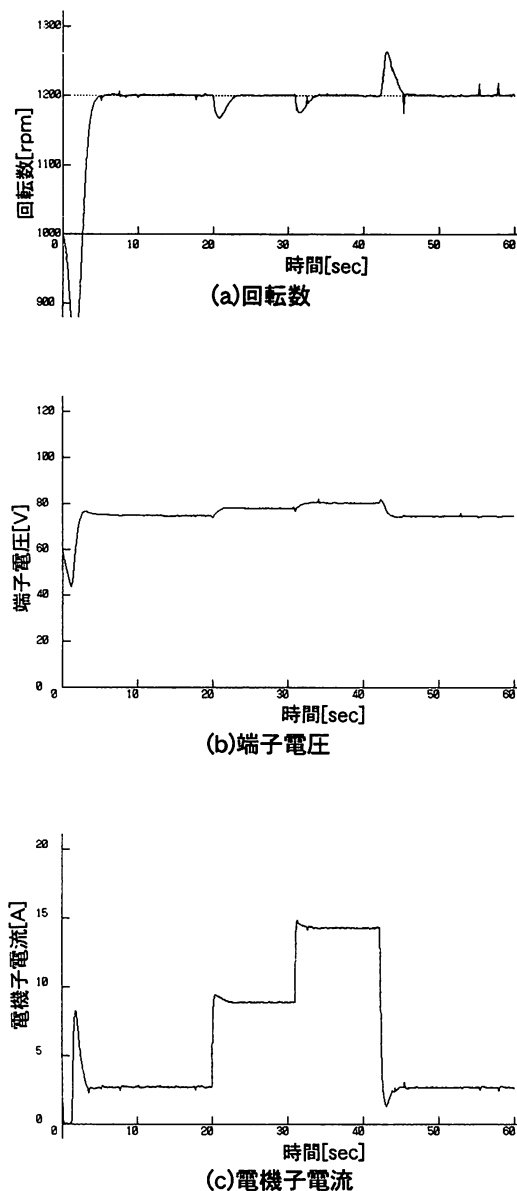


図12 実機での結果例 ($T_s=100[\text{msec}]$
界磁電流 $1.6[\text{A}]$, 目標値 $1200[\text{rpm}]$)