

Duffing 型応力－ひずみ関係を有する非線形材料の
力学特性に関する研究

近 藤 崇*・澤 田 知 之**
木 田 哲 量***・能 町 純 雄****

Study on Dynamics Characteristic of Non-linear Materials
with Duffing type Stress-Strain Relation

Takashi KONDO, Tomoyuki SAWADA, Tetsukazu KIDA and Sumio G. NOMACHI

要旨

破壊点付近における応力－ひずみ関係が、線形関係から大きく逸脱する材料を線形材料として解析を行うとその挙動を正確に把握することができない。そこで、本研究では、構造物を構成する非線形材料の応力－ひずみ関係を表現する構成方程式として、Duffing 型応力－ひずみ理論式を提案し、コンクリートを供試体として用いた圧縮実験の結果より、その適合性を検討したものである。

Abstract

When stress-strain relation of materials deviates out of linear relation closing to failure point, mechanical behavior of the material couldn't be expressed by the linearity theory.

This paper studies on comformity of Duffing type stress-strain relation for the material closing to its failure point by an experiment.

1. ま え が き

非線形材料として用いたコンクリートの最大応力発生時までの応力－ひずみ関係は、これまでに行った圧縮実験の結果により、Duffing 型応力－ひずみ理論式によって表現することができるという結果が得られている。

本研究では、破壊緩和装置を用いたコンクリートの圧縮実験を行って最大応力発生時の急激な破壊を制御し、最大応力発生時以降の応力－ひずみ関係を計測し、Duffing 型応力－ひずみ関係との適合性の検討を行うと共に、載荷速度を変化させた単純圧縮実験における速度効果が、弾性係数や最大応力発生時のひずみなどの材料係数に影響を与えた場合の適合性についても検討を行った。

本稿は、以上の事項をまとめ、考察したものである。

2. Duffing型応力－ひずみ関係

本研究においては、ひずみに対して応答する復元応力は全区間において非線形を示すものとして考えることとし、連続関数によって応力－ひずみ関数を表現するDuffing型応力－ひずみ理論式の適合性を検討する。

まず、非線形な力学特性を有する材料で構成される構造物に外力が作用することによって生じるひずみ ε と、これに応答する復元応力 σ の基本関係式を非線形挙動を示す連続関数として表すと、式(1)となる。

$$\sigma=f(\varepsilon)$$
 (1)

ここで、ひずみ ε は微小なものであるので、式(1)をマクローリン展開すると式(2)となる。

$$\sigma=f(0)+f'(0)\varepsilon+f''(0)\frac{\varepsilon^2}{2!}+f'''(0)\frac{\varepsilon^3}{3!}+\cdots(2)$$

これまでの研究によって、高次の項は微小であり、解析上結果に影響を与えないことが検証されているので、無視することとする。

次に、外力が作用しない状態における応力とひずみ値は、ひずみが生じないときの応答復元応力

* 助 手 環境都市工学科
** 教 授 環境都市工学科
*** 教 授 日本大学
**** 名誉教授 北海道大学

は0となるので、 $f(0)=0$ となる。また、この関数 $f(\varepsilon)$ は圧縮ひずみ・引張ひずみの可逆性を考慮すると奇関数となるので、負のひずみに対して、式(3)の関係をとる。

$$f(-\varepsilon) = -f(\varepsilon) \quad (3)$$

よって、 $f''(0)=0$ となるので、式(2)は式(4)となる。

$$\sigma = f'(0)\varepsilon + f'''(0)\frac{\varepsilon^3}{3!} \quad (4)$$

なお、線形な力学特性を有する材料の場合には、式(5)となる。

$$\sigma = f'(0)\varepsilon \quad (5)$$

ここで、式(4)、(5)におけるひずみの項の常数を式(6)として、式(3)、(4)を式(7)、(8)とする。

$$A = f'(0), \quad B = f'''(0)\frac{1}{3!} \quad (6)$$

$$\sigma = A\varepsilon - B\varepsilon^3 \quad (7)$$

$$\sigma = A\varepsilon \quad (8)$$

そして、線形と非線形の場合における常数A、Bをそれぞれ次のように求める。

①常数A：

Aを比例常数とする応力 σ とひずみ ε の関係を考えると、Aは $\varepsilon=0$ において $\sigma=f(\varepsilon)$ をひずみ ε で1回微分したものである。よって、Aは初期接線の傾き、すなわち初期接線弾性係数Eである。よって、式(4)、(5)は式(9)、(10)となる。

・非線形の場合

$$\sigma = E\varepsilon + f'''(0)\frac{\varepsilon^3}{3!} \quad (9)$$

・線形の場合

$$\sigma = E\varepsilon \quad (10)$$

ここで、E：初期接線弾性係数

②常数B：

最大応力発生時のひずみ値を ε_0 とし、その時の接線の傾きが0、すなわち $d\sigma/d\varepsilon=0$ 成る関係を用いて式(9)を展開すると、 $f'''(0)$ は式(11)となる。

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} &= E + f'''(0)\frac{\varepsilon^2}{2!} = 0 \\ \therefore f'''(0) &= -\frac{2E}{\varepsilon_0^2} \end{aligned} \quad (11)$$

よって、①・②より常数A、Bがそれぞれ次式のように求まる。

$$A = f'(0)$$

$$B = f'''(0)\frac{1}{3!} = -\frac{E}{3\varepsilon_0^2}$$

この関係より、式(9)を整理すると式(12)が得られる。

$$\sigma = E\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3\varepsilon_0^2}\right) \quad (12)$$

式(12)は、初期接線弾性係数Eと最大応力発生時のひずみ値 ε_0 をパラメータとし、応力 σ が最大応力発生時のひずみ値 ε_0 において極値をとる関数である。また、この関係を表したものを図-1に示す。

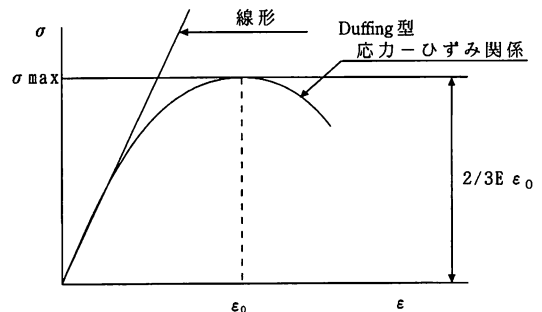


図-1 Duffing 型応力-ひずみ関係

ここで、応力-ひずみ関係を表した式(12)がDuffingの振動方程式における復元力の関係と同様に3次の奇数べき級数により表されることから、Duffing型応力-ひずみ関係と称した。

3. 速度効果

コンクリートにおける載荷速度実験は、初めは静的実験の標準載荷速度をいかに決定するかという問題に関連して行われていたので、静的実験に使用される装置を最大限に作動して得られる載荷速度の範囲内で行われていた。しかし、その範囲内における強度の変化は無視できないものであった。

この種の実験結果より、強度だけではなく、応力-ひずみ曲線、弾性係数、ポアソン比等の材料係数も載荷速度によって変化するといった、いわゆる“速度効果”の存在が確認されている。

速度効果および載荷速度による破壊限界の変化は多少の違いはあるが、ほとんどの構成材料に認められる。

本研究においては、載荷速度による弾性係数、最大応力、最大応力発生時のひずみの変化を確認し、理論式との適合性を検証することにした。

5. 破壊緩和装置を用いた圧縮実験結果

養生日数の異なる2種類の供試体により、破壊緩和装置を用いて行った実験の結果を図-3, 4に、材料係数を表-2, 3に示す。

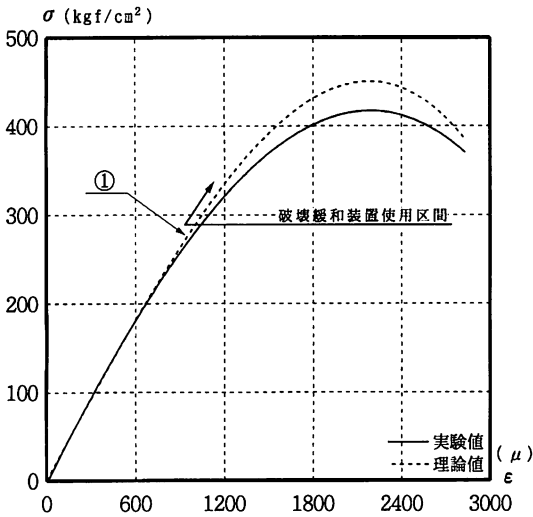


図-3 応力-ひずみ関係 (その1)

表-2 材料係数 (その1)

供試体① w/c=0.45, 7days cured	
弾性係数 E (kgf/cm ²)	3.0982×10 ⁵
最大ひずみ ε _o	0.00218
最大応力 σ _o (kgf/cm ²)	416.85

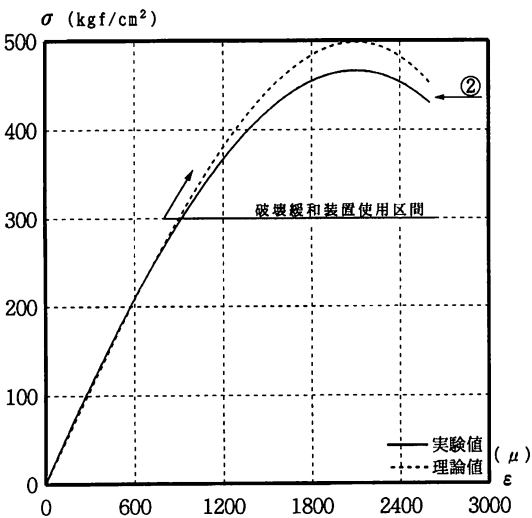


図-4 応力-ひずみ関係 (その2)

表-3 材料係数 (その2)

供試体② w/c=0.45, 28days cured	
弾性係数 E (kgf/cm ²)	3.5585×10 ⁵
最大ひずみ ε _o	0.00210
最大応力 σ _o (kgf/cm ²)	466.27

6. 試験機からの荷重分担の検証

6. 1 概 要

破壊緩和装置を用いて行った圧縮実験の結果より、破壊緩和装置装着前までの実験値と理論値は相似的な関係を示しているが、装着後において差異が生じていることが確認された。単純圧縮実験の結果より最大応力発生時までの応力-ひずみ関係は Duffing 型応力-ひずみ関係によって表現が可能であるという結果が得られているので、差異の原因を究明するために試験機からの荷重分担の検証を行うこととした。

6. 2 供 試 体

供試体の作成方法および形状は4節と同様とする。使用材料は普通ポルトランドセメント、細骨材（鬼怒川産，比重2.57，F.M.=2.80），粗骨材（葛生2005，最大骨材寸法20mm，比重2.67，F.M.=6.60），混和剤（AE減水剤：ポゾリス No.70）とし、配合を表-4に示す。また、養生日数は28日とした。

表-4 コンクリートの配合2

水セメント比 w/c (%)	スランブ (cm)	空気量 (%)	s/a (%)	単 位 量 (kg/m ³)				AE減水剤 cc/m ³
				水 W	セメント C	細骨材 S	粗骨材 G	
45.7	8.0	4.5	45.8	154	325	820	998	346

6. 3 実験方法

実験方法および測定結果の整理は、5節と同様に行い、以下の項目のみ変更して行った。

- a. 載荷速度はアムスラー試験機からの荷重の増加が毎秒120kgfとなるようにする。PC鋼棒とコンクリート供試体に貼付したひずみゲージおよびコンクリート供試体を受ける荷重測定ロードセルの値はアムスラー試験機の示す荷重計において500kgf毎に測定を行う。
- b. 供試体に20.0tfの荷重が載荷された後アムスラー試験機を停止させ、PC鋼棒の緩めてあったナットを締め付けた後、再び荷重載荷を行う。

7. 実験結果

単純圧縮実験の結果を図-5，材料係数を表-5，上記の方法で破壊緩和装置を用いて行った実験の結果を図-6，材料係数を表-6に示す。

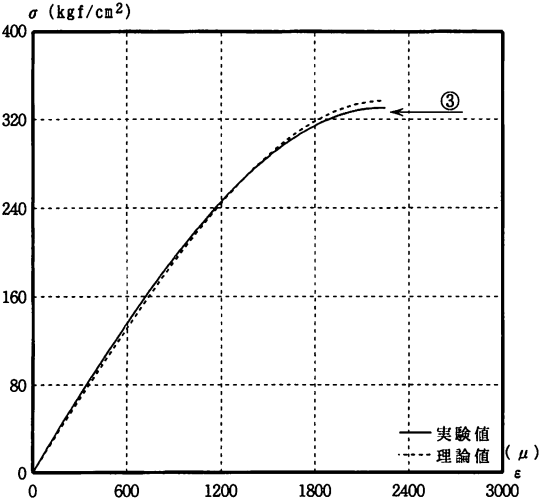


図-5 応力-ひずみ関係 (その3)

表-5 材料係数 (その3)

供試体③ w/c=0.457, 28days cured	
弾性係数 E (kgf/cm ²)	2.8043×10 ⁵
最大ひずみ ε _o	0.00218
最大応力 σ _o (kgf/cm ²)	329.77

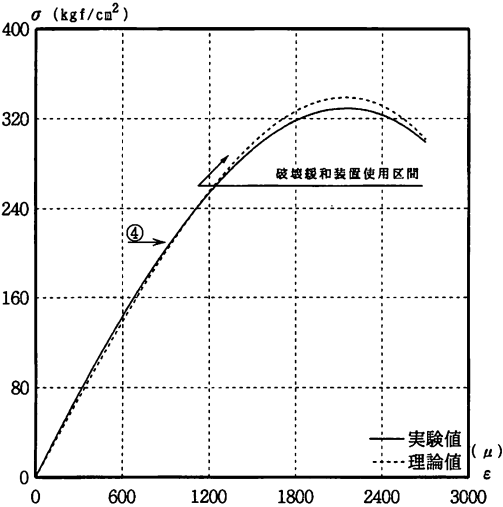


図-6 応力-ひずみ関係 (その4)

表-6 材料係数 (その4)

供試体④ w/c=0.457, 28days cured	
弾性係数 E (kgf/cm ²)	2.8136×10 ⁵
最大ひずみ ε _o	0.00208
最大応力 σ _o (kgf/cm ²)	325.60

この実験結果においても、単純圧縮実験では最大応力発生時までの応力-ひずみ関係は Duffing 型応力-ひずみ関係と相似な関係を示しているが、破壊緩和装置を用いた実験では装着後に差異が生じている。そこで、荷重増加の経過を確認す

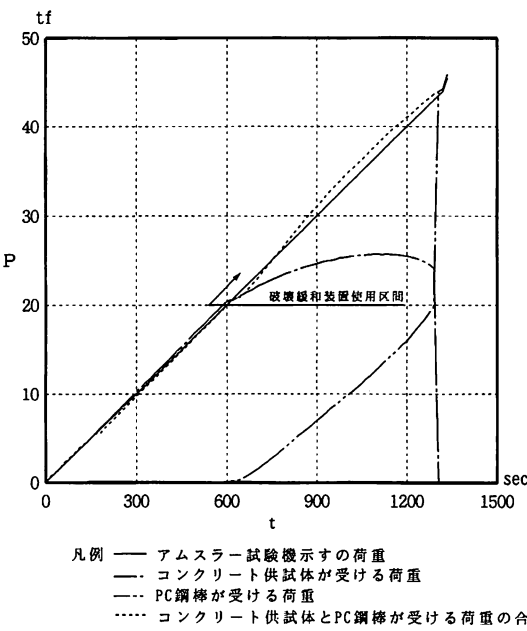


図-7 荷重-時間図

るために荷重と時間の関係を図-7に示す。
この図-7より、試験機が与える荷重がコンクリート供試体とPC鋼棒に負担されていく経過が分かる。そして、試験機からの荷重が20.0tfに達した後、PC鋼棒に荷重が負担されたことによりコンクリート供試体に対する荷重載荷速度の低下が確認された。
これは、試験機からの荷重増加が破壊緩和装置装着前後で一定として実験を行っているために生じたものである。
ここで、試験機からの荷重は供試体とPC鋼棒が負担している荷重の合計とほぼ等しくなっており、この実験の信頼性を確認することができたと思われる。また、試験機からの荷重とコンクリート供試体とPC鋼棒が受ける荷重の合計に多少誤差が生じているが、これはロードセルの校正係数の影響によるものである。

8. 考 察

試験機からの荷重の分担の検証の結果より、破壊緩和装置装着前後では、コンクリート供試体の載荷速度の低下が確認された。そこで、5節で行った実験の結果より破壊緩和装置装着前後の載荷速度を求め、その2種類の載荷速度で単純圧縮実験を行った結果を図-8, 9, 材料係数を表-7, 8に示す。

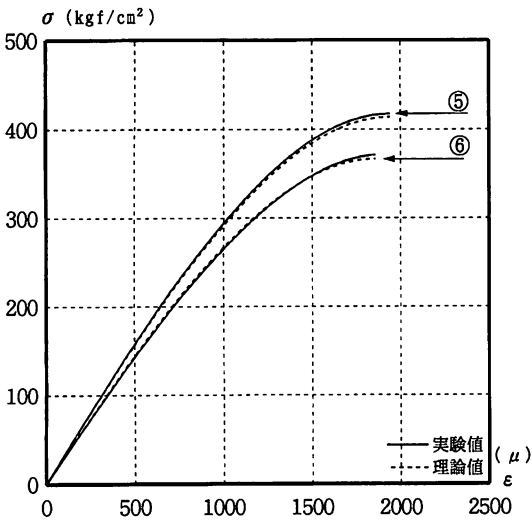


図-8 応力-ひずみ関係 (その5)

表-7 材料係数 (その5)

供試体			w/c=0.45, 7days cured	
供試体番号	⑤	⑥		
応力増加速度 (σ/sec)	0.13	3.00		
弾性係数 E (kgf/cm ²)	2.9549 × 10 ⁵	3.1995 × 10 ⁵		
最大ひずみ ε _o	0.00186	0.00194		
最大応力 σ _o (kgf/cm ²)	371.17	417.46		

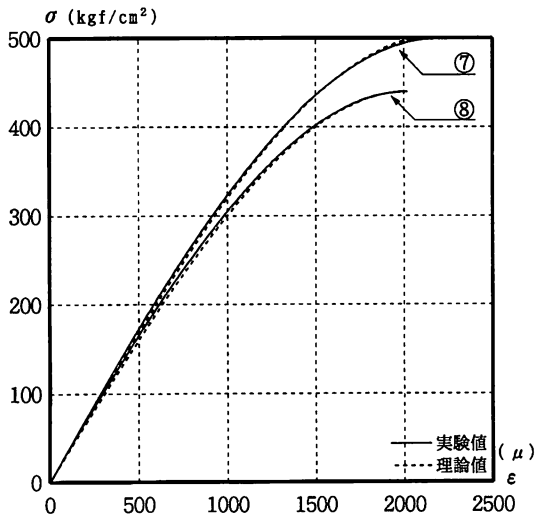


図-9 応力-ひずみ関係 (その6)

表-8 材料係数 (その6)

供試体			w/c=0.45, 28days cured	
供試体番号	⑦	⑧		
応力増加速度 (σ/sec)	0.15	3.00		
弾性係数 E (kgf/cm ²)	3.2656 × 10 ⁵	3.4300 × 10 ⁵		
最大ひずみ ε _o	0.00202	0.00220		
最大応力 σ _o (kgf/cm ²)	439.81	499.77		

この結果から、作製条件の等しい供試体において、載荷速度が低下することによって、材料係数が小さな値を示し、見かけの弾性係数も小さくなるという速度効果が現れることが確認された。

図-10に圧縮強度と載荷速度の関係を示す。

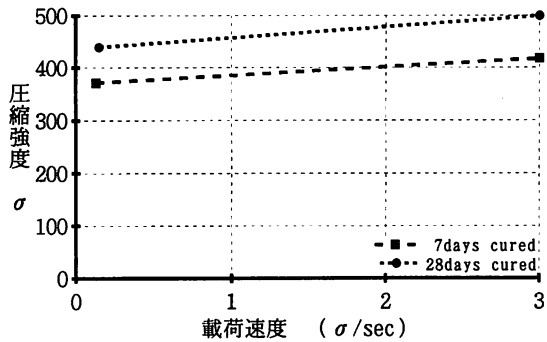


図-10 圧縮強度と載荷速度の関係
(w/c = 0.45)

以上より、破壊緩和装置を用いた実験において、試験機が与える荷重の載荷速度は一定であるのに対し、与えられた荷重は破壊緩和装置のナットを締めたことによって、PC鋼棒とコンクリート供試体に分担されるために供試体における載荷速度の低下が生じる。これによって、6節で行った検証と同様に速度効果の影響が現れ、破壊緩和装置を用いて行った実験の結果の実験値と理論値の差異が生じることが判明した。

ここで、この実験結果より得られたそれぞれの弾性係数を用いて5節で行った実験結果における、破壊緩和装置装着前後の解析を行うことにした。その結果を図-11、12に示す。

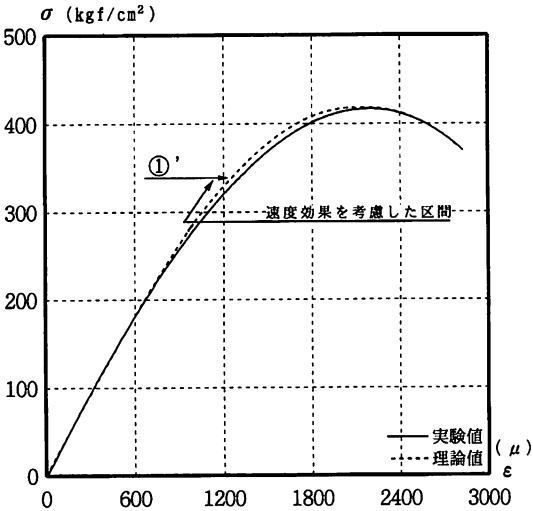


図-11 載荷速度を考慮した結果 (その1)
(w/c = 0.45, 7days cured)

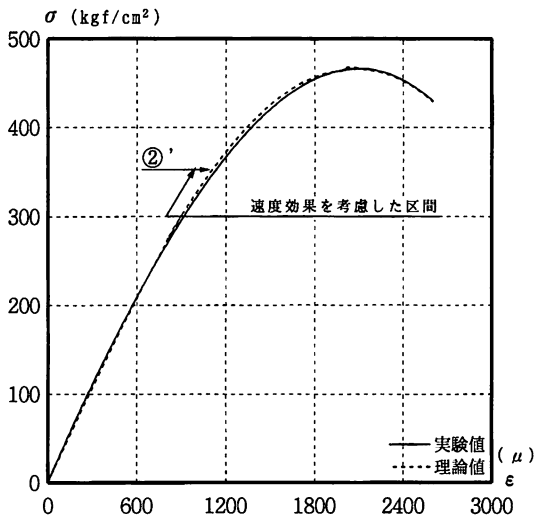


図-12 載荷速度を考慮した結果 (その2)
($w/c=0.45$, 28days cured)

この結果より、速度効果による影響を考慮することによって、実験値と理論値は全区間において相似的に表現することができた。

9. ま と め

今回行った実験および解析結果より、コンクリートの応力-ひずみ関係は、

- 1) 速度効果によって材料係数に影響が現れた場合
- 2) 最大応力発生以降の場合

いずれの場合の応力-ひずみ関係も Duffing 型応力-ひずみ関係による表現が可能であることを明らかにすることができた。

謝 辞

本研究を進めるにあたり、実験に快くご協力していただきました日本大学生産工学部土木工学科、越川茂雄助教授、伊藤義也助手に心より感謝致します。また、実験装置の形状および文献を参考とさせて頂きました東京都立大学、村田二郎名誉教授に深く感謝致します。

参考文献

- 1) 村田二郎・岩崎訓明・新土木実験指導書、技報堂出版, pp131-146, 1994
- 2) 村田二郎・越川茂雄・富田嘉雄, コンクリートの応力-ひずみ曲線について, 土木学会第30回年次学術講演会講演概要集(V), pp195-196, 1975
- 3) 近藤崇・澤野利章・能町純雄・木田哲量, Duffing 型応力-ひずみ関係を有する材料に関する研究(その6), 日本大学生産工学部第28回学術講演会土木部講演概要, pp29-32, 1995
- 4) 近藤崇・澤田知之・木田哲量・能町純雄, Duffing 型応力-ひずみ関係を有するコンクリートに関する研究, 土木学会第51回年次学術講演会講演概要集(1-A), pp148-149, 1996

(平成8年11月29日受理)

