# 振動台に設置された実験箱の動的応答解析について

澤 田 知 之*・能 町 純 雄**・近 藤 崇***

# On Dynamic Responsable Analysis of the Test-box on the Shaking Table

Tomoyuki SAWADA, Sumio G. NOMACHI and Takashi KONDO

要 旨

振動台上の実験箱の動的解析を板の2次元的振動問題として捉らえ、この板の振動を組み合わせて箱（3次元）の強制振動に対する解を積分変換を用いて求めたものを報告するものである。

**Abstract**

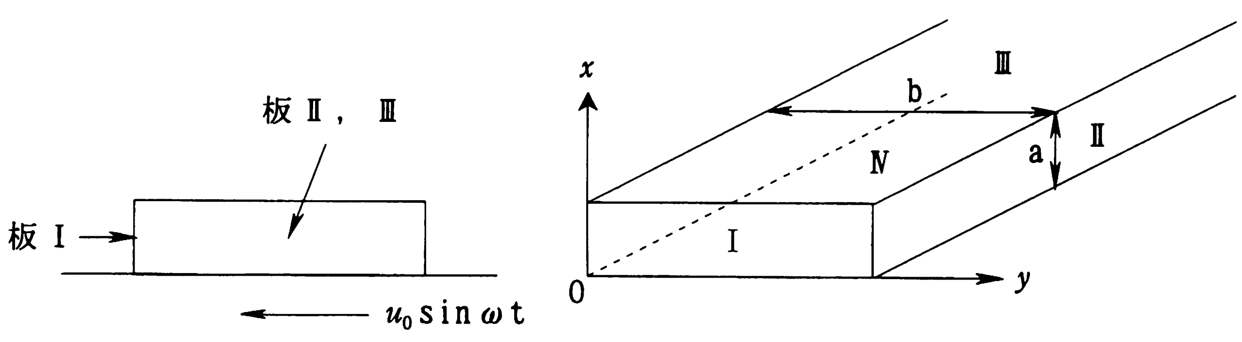
We can write the dynamic displacement and acceleration of the test-box on a shaking table, as the plain strain state equilibrium by means of two dimentional Elastic Integration Kernel.

## 1．はじめに

筆者等は、振動台上の斜面モデルや地震モデルにおける地盤時破壊[1]や地震時土圧[2]の発表を行って来ている。前回の報告[3]では、実験装置の周波数特性を考察した結果を述べたが本稿では振動台上に設置される実験箱そのものを取り上げ動的解析を行った理論解を報告するものである。

## 2．振動台に設置された実験箱の動的応答解析

板のたわみを$w$, 振動台の入力変位を $u_0 \sin \omega t$ とする。いま振動台による板Ⅰの応答を考えるに、板Ⅰは側板Ⅱ、Ⅲと底板Ⅳと接合されており上辺（$x=a$）は自由辺となっている。（図－1参照）。




図－1 振動台に設置された箱の動的応答解析

* 教 授 環境都市工学科
** 名誉教授 北海道大学
*** 助 手 環境都市工学科

板の $x$ , $y$ 方向断面の直応力による曲げモーメントを$Mx,My$とし，せん断力によるモーメントを$Mxy$とすれば，

$$M_x=-D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] \tag{1}$$

$$M_y=-D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] \tag{2}$$

$$M_{xy}=-D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{3}$$

ただし，$D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

$E$：板の弾性常数
$h$：板厚
$\nu$：板のポアソン比

従って，力の釣り合式は

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=ph\omega^2 u_0 \sin\omega t \tag{4}$$

$\omega$は入力加速度の振動角速度（*radian/sec*）

(4)式に$\sin\omega t\cdot\sin\dfrac{m\pi}{a}x\cdot\sin\dfrac{n\pi}{b}y$を積分核（*Integration kernel*）とする積分変換を施せば，その逆変換として次の強制振動解が得られる。

$$\begin{aligned}w=\frac{4}{ab}\sum_m\sum_n\frac{\sin\omega t\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y}{D\cdot\Omega_{mn}}&\Bigg[\frac{abphu_0\omega^2(1-(-1)^m)(1-(-1)^n)}{\pi^2 mn}\\&+\frac{m\pi}{a}\{(-1)^m S_n[(\overline{M}_x)_{x=a}]-S_n[(\overline{M}_x)_{x=0}]\}+D\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3+(2-v)\frac{m\pi}{a}\cdot\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}\\&\times\{(-1)^m S_n[\overline{w}_{ay}]-S_n[\overline{w}_{by}]\}+D\left\{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^3+(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)\right\}\\&\times\{(-1)^n S_m[\overline{w}_{xb}]-S_m[\overline{w}_{xa}]\}\Bigg]\end{aligned} \tag{5}$$

上式中，

$$\Omega_{mn}=\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}^2-\frac{\omega^2 ph}{D}=\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}^2-\lambda^2$$

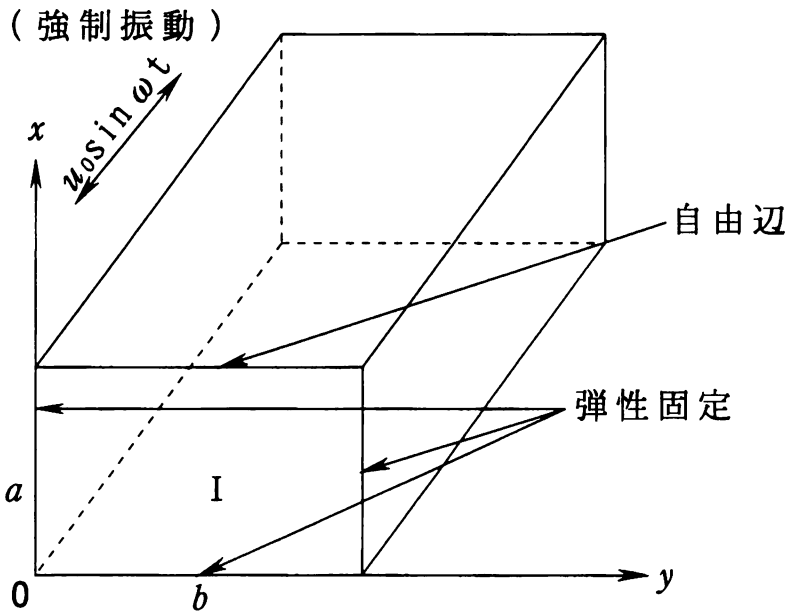
$\overline{M}_x\sin\omega t=M_x$，$\overline{w}_a\sin\omega t=w$，$\overline{w}_b\sin\omega t=w_b$，$\lambda^2=\omega^2 ph/D$

$$S_n[(\overline{M}_x)_{x=a}]=\int_0^b(\overline{M}_x)_{x=a}\cdot\sin\frac{n\pi}{b}ydy$$

$$S_n[\overline{w}_a]=\int_0^b\overline{w}_a\cdot\sin\frac{n\pi}{b}ydy$$

$$S_n[(\overline{M}_y)_{y=b}]=\int_0^a(\overline{M}_y)_{y=b}\cdot\sin\frac{m\pi}{a}xdx$$

$m,n=1,2,3\cdots\cdots$　　整数




図－2　平板Ｉの境界条件

図－2の板Ｉでは,
$x = a$ ：自由辺

$M_x = 0$　（i），$R_x = 0$　(ii)

$x = 0$ で底板との接合を次のよう仮定する。

$w = 0$　(iii)，$M_x = K_0 \dfrac{\partial w}{\partial x}$　(iv)

$y = 0, b$ で側板との接合部を上式にならない

$w = 0$　（v），$M_y = K_1 \cdot \left( \dfrac{\partial w}{\partial x} \right)$　(vi)

(iv) と (vi) は弾性固定と考え，辺長にわたり，固定度一定と仮定したものであるが

$K_0, K_1 = 0$　　三辺支持の仮定
$K_0 = \infty, K_1 = 0$　　$y$ 方向二辺単純支持，底辺固定

などの仮定も考えられる。

(ii) 式は，$R_x = -D \left( \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)$

さらに解式を簡単にするため次のようにおく，

$$\left.\begin{array}{l} S_n[(\overline{M}_x)_{x=a}]/D = A_n, \quad S_n[\overline{w_a}] = A'_n \left( \dfrac{b}{n\pi} \right)^2 \\ S_n[(\overline{M}_y)_{y=b}]/D = B'_m - B_m, \quad S_n[(\overline{M}_y)_{y=0}]/D = B'_m + B_m \end{array}\right\}$$

**解式中の級数のClosed Formの誘導**

$w_{y=b}0,\quad w_{y=0}=0,\quad w_{x=0}=0,\quad (M_x)_{x=a}=0$
を代入すれば (5)式は

$$w=\frac{b}{4a}\sum_m\sum_n\frac{\sin\omega t\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y}{\Omega_{mn}}\left[\frac{abphu_0\,\omega^2(1-(-1)^m)(1-(-1)^n)}{\pi^2Dmn}\right.$$
$$+\frac{m\pi}{a}\cdot A_n+\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3+(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}(-1)^m\cdot A'_n\left(\frac{b}{n\pi}\right)^2$$
$$\left.-\frac{n\pi}{b}\{(1-(-1)^n B_m+(1+(-1)^n)B'_m\}\right]\qquad(6)$$

となる。$An,\ An',\ Bm,\ Bm'$は上記 (*vii*) に示してある。

1） (6)式中の$A_n$の級数は$x/a=\xi$として

$$\frac{4}{ab}\sum_m\frac{\frac{m\pi}{a}\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x}{\Omega_{mn}}=\frac{4}{ab}\sum_m\left[\frac{m\pi}{a}\cdot\sin(m\pi\xi)\frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{1}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2-\lambda}-\frac{1}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\lambda}\right\}\right]\qquad(7)$$

いま，
$$\frac{\frac{m\pi}{a}}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2-\lambda}=\frac{a}{\pi}\frac{m}{m^2+\mu_n^2}\qquad;\ \mu_n^2=\alpha_n^2-\frac{\lambda a^2}{\pi^2}$$

$$\frac{\frac{m\pi}{a}}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2-\lambda}=\frac{a}{\pi}\frac{m}{m^2+\mu_n'^2}\qquad;\ \mu_n'^2=\alpha_n^2-\frac{\lambda a^2}{\pi^2}$$

$$\left(\alpha_n=\frac{an}{b}\right)$$

おけば， (7)式は，$\xi=x/a$として，

$$\frac{4}{ab}\sum_m\frac{\frac{m\pi}{a}\sin(m\pi\xi)}{\Omega_{mn}}=\frac{2}{\pi b\lambda}\sum_m\sin(m\pi\xi)\left(\frac{m}{m^2+\mu_n^2}-\frac{m}{m^2+\mu_n'^2}\right)$$
$$=\frac{1}{b\lambda}\left(\frac{sh\{\pi\mu_n(1-\xi)\}}{sh(\pi\mu_n)}-\frac{sh\{\pi\mu_n'(1-\xi)\}}{sh(\pi\mu_n')}\right)=\frac{1}{b\lambda}P_n(\xi)\qquad(8)$$

2)　$A'_n b^2/(n\pi)^2$の係数は

$$\frac{4}{ab}\sum_m sin(m\pi\xi)\cdot(-1)^m \frac{m\pi\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}+(1-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{\Omega_{mn}}$$

$$=\frac{4}{ab}\sum_m sin(m\pi\xi)\cdot(-1)^m\frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)}{2}\left\{\frac{1}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2-\lambda}+\frac{1}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\lambda}\right. \tag{9}$$

$$\left.+\frac{(1-\nu)}{2\lambda}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\left[\frac{1}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2-\lambda}+\frac{1}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2-\lambda}\right]\right\}$$

(9)式の第1項は

$$\frac{2}{\pi b}\sum_m sin(m\pi\xi)\cdot(-1)^m\left(\frac{m}{m^2+\mu_n^2}+\frac{m}{m^2+\mu_n'^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{b}\left(\frac{sh(\pi\mu_n\xi)}{sh(\pi\mu_n)}+\frac{sh(\pi\mu_n'^2)}{sh(\pi\mu_n')}\right)=-\frac{1}{b}Q_n(\xi) \tag{10}$$

同じく第2項は

$$\frac{2}{\pi b\lambda}(1-\nu)\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\sum_m sin(m\pi\xi)\cdot(-1)^m\left(\frac{m}{m^2+\mu_n^2}-\frac{m}{m^2+\mu_n'^2}\right)$$

$$=-\frac{2(1-\nu)}{\pi b\lambda}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\left(\frac{sh(\pi\mu_n\xi)}{sh(\pi\mu_n)}-\frac{sh(\pi\mu_n'\xi)}{sh(\pi\mu_n')}\right)=-\frac{(1-\nu)}{b\lambda}\,\frac{n\pi}{b}{}^{2}\cdot P_n(\xi) \tag{11}$$

3)　Bm，Bm’に伴う級数のClosed Form

$$\frac{4}{ab}\sum_n\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cdot\frac{n\pi}{b}\{1\mp(-1)^n\}}{\Omega_{mn}}=\frac{2}{\lambda ab}\sum_n\frac{n\pi}{b}\cdot sin\frac{n\pi}{b}y\left\{\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\lambda}-\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\lambda}\right\}$$

$(1-(-1)^n)$が$Bm$，$(1+(-1)^n)$が$Bm'$に対応する。

nについてのClosed Form

$$\sum_n \frac{(1-(-1)^n)\dfrac{n\pi}{b}\cdot sin(n\pi\eta)}{\left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2-\lambda}=\frac{b}{\pi}\sum_n\frac{(1-(-1)^n)\,n\cdot sin(n\pi\eta)}{n^2+y_m^2}$$

$$=\frac{b}{2}\ \frac{sh\{\pi y_m(1-\eta)\}+sh(\pi y_m\eta)}{sh(\pi y_m)}$$

$$\sum_n \frac{(1-(-1)^n)\dfrac{n\pi}{b}\cdot sin(n\pi\eta)}{\left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2-\lambda}=\frac{b}{\pi}\sum_n\frac{(1-(-1)^n)\,n\cdot sin(n\pi\eta)}{n^2+y_m'^2}$$

$$=\frac{b}{2}\ \frac{sh\{\pi y_m(1-\eta)\}+sh(\pi y'_m\eta)}{sh(\pi y'_m)}$$

ただし，$\left.\begin{matrix} y_m^2 \\ y_n'^2 \end{matrix}\right\}=\beta_m^2\mp\dfrac{\lambda b^2}{\pi^2}$，$\beta_m=\dfrac{bm}{a}$，$\eta=\dfrac{y}{b}$

$$\therefore \frac{4}{ab}\sum_n\frac{\dfrac{n\pi}{b}\cdot sin(n\pi\eta)}{\Omega_{mn}}=\frac{1}{a\lambda}\left[\frac{sh\{\pi y_m(1-\eta)\}}{sh(\pi y_m)}-\frac{sh\{\pi y'_m(1-\eta)\}}{sh(\pi y'_m)}\right]=P_m(\eta)\frac{1}{a\lambda} \tag{12}$$

とおけば，

$$\frac{4}{ab}\sum_n\frac{sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)\cdot\dfrac{n\pi}{b}(1\mp(-1)^m)}{\Omega_{mn}}=(P_m(\eta)\pm P_m(1-\eta))\frac{1}{a\lambda} \tag{13}$$

従って，(6)式は$w=\bar{w}sin\omega t$とおいて

$$w=\left[\sum_m\left\{A_n\frac{1}{b\lambda}P_n(1-\xi)-A'_n\frac{b}{(n\pi)^2}Q_n(\xi)+(1-\nu)\frac{1}{b\lambda}P_n(\xi)\right\}sin(n\pi\xi)\right.$$

$$\left.+\sum_m\left\{B_m(P_m(\eta)+P_m(1-\eta))+B'_m(P_m(\eta)-P_m(1-\eta))\right\}\frac{1}{a\lambda}sin(m\pi\xi)\right]$$

$$+\frac{phu\omega^2}{D}\sum_m\sum_n\frac{sin(m\pi\xi)\cdot sin(n\pi\eta)\cdot(1-(-1)^m)\cdot(1-(-1)^n)}{\pi^2mn\cdot\Omega_{mn}} \tag{14}$$

境界条件によって(14)式中の$Bm$，$Bm'$，$An$，$An'$，を求めて応答加速度

$(u+\bar{w})w^2$

が求められる。$u\omega^2$は入力加速度で$\omega$は入力角速度である。

## 参考文献

1）澤田知之：地震時斜面破壊の理論解析と模型実験，苫小牧高専紀要，第31号，pp.79-88，1996.

2）澤田知之：振動時地盤の動的側壁圧に関する模型実験，苫小牧高専紀要，第31号，pp.89-93，1996.

3）澤田・能町・近藤：振動台上の砂箱内地盤モデルにおける動的応力と変位の弾性解，苫小牧高専紀要，第32号，pp.95-111，1997.

（平成９年11月28日受理）