講義：ラプラス変換

石　　信　一*

Note on Laplace transformations

Shin-ichi ISHI

要　旨

授業改善の一方策として、シラバス用の授業教材の作成を試みた。

Abstract

we have made and showed a lecture-note about Laplace transformation like syllabus to improve upon the scheme of teaching in Applied Mathematics.

《はじめに》

ある物理系が，次の微分方程式

$$a\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+cy(y)=f(t)$$

で表されるとする。ここに，a，b，c は定数，$f(t)$ は系の外力，微分方程式の解 $y(t)$ は系の応答関数と呼ばれる。異なる物理系でも，それらの系を記述する微分方程式は同じ型である場合がある。
例えば，力学及び音響系の振動と電気回路系は同型である。

力学系の振動 $$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+r_M\frac{dx(t)}{dt}+\frac{1}{C_M}x(t)=f_M(t)$$

音響系の振動 $$M\frac{d^2X(t)}{dt^2}+r_A\frac{dX(t)}{dt}+\frac{1}{C_A}y(t)=p(t)$$

電気回路系 $$L\frac{d^2q(t)}{dt^2}+e_e\frac{dq(t)}{dt}+\frac{1}{C_e}q(t)=e(\mathrm{t})$$

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt},\ L\frac{di(t)}{dt}+e_e i(t)+\frac{1}{C_e}\int i(t)dt=e(t)$$

上記の記号の説明と対応関係を次表にまとめておく（理化学辞典，第3版増補版(p893)から引用)。

機械系		音響系		電気系	
物理量	記号	物理量	記号	物理量	記号
力	f_M	音圧	p	起電力	e
変位	x	体積変位	X	電荷	q
速度	$u=\frac{dx}{dt}$	体積速度	$u=\frac{dX}{dt}$	電流	i
抵抗	r_M	抵抗	r_A	抵抗	r_e
リアクタンス	x_M	リアクタンス	x_A	リアクタンス	x_e
コンプライアンス	C_M	キャパシタンス	C_A	容量	C_e
質量	m	イナータンス	M	インダクダンス	L
インピーダンス	Z_M	インピーダンス	Z_A	インピーダンス	Z_e

＊　助教授　一般教科

ラプラス変換（以下，Ｌ変換）の講義の目的は，上述の単振動の方程式や電気回路の方程式をＬ変換によって解けるようになることです。これらの方程式（二階の定数係数の線形微分方程式）は，別の解析的方法で解けますから，Ｌ変換を用いる解法に特徴をもたせなければなりません。それは，デルタ(δ)関数（不連続関数）の使用です。その際，合成積とそのＬ変換の知識が必要になります。これで，一遍に高級な解法（難しい？）になります。

<<第１週>>

Ｌ変換（積分）の導入ですが，復習と称して，次の定積分の計算問題から始めます。

$$\int_0^\infty e^{-t}\,t\,dt,\qquad \int_0^\infty e^{-2t}\cos 3t\,dt,\qquad \int_0^\infty e^{-3t}\sin 2t\,dt$$

これらの計算は，部分積分の練習です。これらの計算ができれば，Ｌ変換の授業の理解は容易であることを知らせます。類似の演習問題を宿題とします（print Ⅰ)。その一つとして，ガンマ関数 $\left(\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt\right)$ の次の性質を証明させる課題をだします。

［問題］　(1)　$\Gamma(1) = 1$　　(2)　$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

(3)　$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$　　(4)　$\Gamma(n) = (n-1)!$（n自然数）

解.

(1)　$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = -[e^{-t}]_0^\infty = 1$

(2)　$\Gamma \;— = \int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt \overset{\sqrt{-t}=T}{=} 2\int_0^\infty e^{-T2}dT = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$

(3)　$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x+1-1}dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{x}dt$

$= [-e^{-t}t^x]_0^\infty + x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = x\Gamma(x)$

(4)　$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt = (n-1)\Gamma(n-1)$

$= (n-1\;(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)\cdots 2\cdot 1\,\Gamma(1)$

$= (n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = (n-1)!$

<<第２週>>

Γ関数の拡張として，積分演算子（作用素）による変換としてＬ変換（積分）を定義します。

$$L(f) = F(s) \overset{def}{=} \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \tag{1}$$

Ｌ変換のいろいろな性質については，積分計算の練習として宿題(print Ⅱ)とします。（この部分は，必要に応じて説明することとし、大胆に省略した。）　必要とするＬ変換は次の４つ。

$f(t)$	$L(f) = F(s)$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{\pm at}$	$\frac{1}{s \mp a}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$

こうして，上記の定積分が，Ｌ変換を知れば容易に求まることを教えます。以上の初等関数のＬ変換の他に，δ関数，合成積とそれらのＬ変換の知識が必要です。

<<第3週>>

ヘビサイド関数(Heaviside:H(t))とそのL変換の表式を与えます。

H(t−a) の定義式 $H(t-a)=\begin{cases}1 & (t>a)\\ 0 & (t<a)\end{cases}$ (2)

H(t−a) のL変換 $L(H(t-a)) = \int_0^\infty H(t-a)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt$

$= \frac{1}{s}e^{-sa}$

［問題］ $f(t) = \begin{cases}1 & (a\leq t\leq b)\\ 0 & (0\leq t<a,\ t>b)\end{cases}$ として

(1) $f(t)$をHeaviside関数を用いて表せ。 (2) $L(f)$を求めよ。

(3) $\lim_{b\to a}\frac{1}{b-a}L(f)$を求めよ。

解.

(1) $f(t)=H(t-a)-H(t-b)$

(2) $L(f(t))=L(H(t-b))=\frac{1}{s}(e^{-sa}-e^{-sb})$

(3) $b=a+\varepsilon$ とおいて，上式(2)に代入すれば， $\frac{1}{s}e^{-sa}(1-e^{-s\varepsilon})$

$e^{-s\varepsilon}$ を展開して，極限 $\left[\lim_{b\to a}\frac{1}{b-a}L(f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}L(f)\right]$ をとれば,

$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{-sa}}{s\varepsilon}\ (1-(1-s\varepsilon+\cdots))=e^{-sa}$

この問題を通して，天下り的にδ関数とそのL関数の表式を与えます。

$\frac{dH(t-a)}{dt}=\delta(t-a)$， $a=0$ のとき， $\frac{dH(t)}{dt}=\delta(t)$

$L(\delta(t-a))=\int_0^\infty e^{-st}\delta(t-a)dt=e^{-sa}$

$L(\delta(t))=\int_0^\infty e^{-st}\delta(t)dt=1$

<<第4週>>

合成積を導入します。合成績の定義式は,

$f*g=\int_0^\infty f(t-x)g(x)dx$ (3)

です。合成積(＊)と普通の積の相違を次の例で示します。

$t*t=\int_0^\infty(t-x)xdx=t\int_0^\infty xdx-\int_0^\infty x^2dx=\frac{1}{6}t^3\neq tt=t^2$

合成積の性質として，それが交換可能($f*g=g*f$)であることを示します（単に可換という)。

$f*g=\int_0^t f(t-x)g(x)dx \overset{t-x=T}{=} \int_{-t}^0 f(T)g(t-T)(-dT)$

$=\int_0^t f(T)g(t-T)dT=g*f$

そのＬ変換の表式を与えます。

$$\begin{aligned}
L(f*g) &= \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \int_0^t f(t-x)g(x)dx \right\} dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \int_0^\infty f(t-x)H(t-x)g(x)dx \right\} dt \\
&= \int_0^\infty g(x) \left\{ \int_0^\infty e^{-st} f(t-x)H(t-x)g(x)dt \right\} dx \\
&\overset{t-x=T}{=} \int_0^\infty e^{-sx} g(x)dx \int_0^\infty e^{-sT} f(T)dT \\
&= G(s)F(s)=F(s)G(s)
\end{aligned}$$

合成積の計算には十分慣れる必要がありますから，計算練習をたくさん行う必要があります。

［問題］　次の合成積を計算し，それらのＬ変換を求めよ（m,nは整数)。

(1)　$t^m * t^n$　　(2)　$e^{mt} * \sin nt$　　(3)　$\sin mt * \cos nt$

解.

$$(1)= \int_0^t (t-x)^m x^n dx = t^m \int_0^t \left[1-\frac{1}{2}\right]^m x^n dx$$

$$\overset{\frac{1}{2}=T}{=} t^m \int_0^t (1-T)^m (tT)^n td = t^{m+n+1} \int_0^1 (1-T)^m T^n dT$$

$$= t^{m+n+1} B(m+1,n+1)$$

上式を整理すれば，

$$\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)=\Gamma(m+n+2)B(m+1,n+1)$$

と書けます。ここに，

$$B(m,n)= \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt$$

はベータ(Beta)関数です。上の関係式から，ベータ関数（値）はガンマ関数（値）から求まります。従って，

$$B(m+1,n+1)=\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}=\frac{m!n!}{m+n+2}$$

$$L(t^{m+n+1}B(m+1,n+1))=B(m+1,n+1)L(t^{m+n+1})$$

$$= B(m+1,n+1)\frac{(m+n+1+1)!}{s^{m+n+1+1}}=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}\frac{(m+n+1+1)!}{s^{m+n+1+1}}$$

$$= \frac{(m+1)!}{s^{m+1}}\frac{(n+1)!}{s^{n+1}}= L(t^m * t^n)$$

$$(2)= \int_0^t e^{-m(t-x)}\sin nx\ dx = e^{-mt} \int_0^t e^{mt}\sin nx\ dx = e^{-mt} \times (2)'$$

$$(2)' = \frac{1}{m^2+m^2}\{me^{mt}\sin nt - ne^{mt}\cos nt + n\}$$

$$(2) = \frac{1}{m^2+m^2}\{m\sin nt - n\cos nt + ne^{-mt}\}$$

$$\begin{aligned}
L((2)) &= \frac{1}{m^2+m^2}\left(\frac{mn}{s^2+n^2}-\frac{ns}{s^2+n^2}+\frac{n}{s+m}\right) \\
&= \frac{n}{s^2+n^2}\frac{1}{s+m} = L(e^{-mt} * \sin nt)
\end{aligned}$$

$$(3) = \int_0^t \sin m(t-x)\cos nx dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^t \{\sin(mt-mx+nx) + \sin(mt-mx-nx)\}\,dx$$
$$= \frac{m}{m^2-n^2}(\cos nt - \cos mt)$$

$$L((3)) = \frac{m}{m^2-n^2}\ \frac{s}{s^2+n^2} - \frac{s}{s^2+m^2}$$
$$= \frac{m}{s^2+m^2}\ \frac{n}{s^2+n^2} = L(\sin mt * \sin nt)$$

以上で，微分方程式をＬ変換で解く準備ができました。

$f(t)$	$L(f)=F(s)$
$H(t-a)$	$\frac{1}{s}e^{-sa}$
$H(t)\ (a=0)$	$\frac{1}{s}$
$\delta(t-a)$	e^{-sa}
$\delta(t)\ (a=0)$	1
$f(t) * g(t)$	$L(f)L(g) = F(s)G(s)$

<<第５週>>

微分方程式は，$y'(t) + ay(t)=0$ の解法から始めます。まず，

$$L(y'(t)) = \int_0^\infty e^{-st}y'(t)dt = [e^{-st}y(t)]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}y(t)dt$$
$$= -y(0)+sY(s) = sY(s)-y(0) \tag{4}$$

を示します。この結果は既知です（宿題としてだしている)。Ｌ変換の解法と同時に，変数分離による解法も説明します。一般解と特解を説明し，Ｌ変換の解法の利点を示します（初期値問題に便利であることを教えます)。

$y'(t) + ay(t) = 0$

変数分離する	(Ｉ)両辺をＬ変換する
$\frac{dy}{y} = -ay$	$sY(s) - y(0) + aY(s) = 0$
両辺を積分する	(II)代数方程式を解く
$\log y = -at+c'$	$Y(s) = \frac{y(0)}{s+a}$
微分方程式の一般解	(III)両辺をＬ逆変換する
$y(t)=ce^{-at}\quad (c=e^{c'})$	$y(t)=y(0)e^{-at}$
初期条件 $y(0) = 1$の特解	
$y(t)=e^{-at}\quad (c=1)$	$y(t)=e^{-at}$

Ｌ変換による解法手段（上表の右欄，(Ｉ)⇒(II)⇒(III)）を丁寧に説明し，徹底させます。

$$\begin{array}{ccc} \text{微分方程式} & \overset{L}{\Rightarrow} & \text{代数方程式} \\ & & \Downarrow \\ \text{微分方程式の解} & \overset{L^{-1}}{\Leftarrow} & \text{代数方程式の解} \end{array}$$

逆変換（L^{-1} 変換）に必要な方法は，「部分分数分解」と「合成積」です。逆変換については，機械的に行うことを納得してもらいます（逆変換の計算法はあるけれども、授業では行わない。）次に，

［問題］ (1) $y'+ay=\delta(t)$, (2) $y'+ay=H(t)$, (3) $y'+ay=\sin bt$
を解く。これによって，δ 関数を用いる解法の利点を示す。

解.

(1) $y'+ay=\delta(t)$	(2) $y'+ay=H(t)$	(3) $y'+ay=\sin bt$
$sY(s)-y(0)+aY(s)$ $=1$	$sY(s)-y(0)+aY(s)$ $=\frac{1}{s}$	$sY(s)-y(0)+aY(s)$ $=\frac{b}{s^2+b^2}$
初期条件：$y(0)=0$		
$Y(s)=\frac{1}{s+a}$	$Y(s)=\frac{1}{s+a}\frac{1}{s}$ $=\frac{1}{s}\ \frac{1}{a}-\frac{1}{s+a}$	$Y(s)=\frac{1}{s+a}\frac{b}{s^2+b^2}$ $=\frac{1}{a^2+b^2}\ \frac{b}{s+a}+\frac{ab-bs}{s^2+b^2}$
$y(t)=e^{-at}$	$y(t)=e^{-at}*H(t)$ $=\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$y(t)=e^{-at}*\sin bt$ $=\frac{1}{a^2+b^2}(be^{-at}+a\sin bt-b\cos bt)$

上の結果から，$y'+ay=f(t)$，$(y(0)=0)$ の特解を得るには，まず，$f(t)=\delta(t)$ の特解を求め，その解と $f(t)$ の合成積を作ればよいことになる，即ち，

$$y(t)=e^{-at}*f(t)=\int_0^t e^{-a(t-x)}f(x)dx \tag{5}$$

((参考))
一階線形微分方程式 $y'(t)+a(t)y(t)=f(t)$ の一般解は，

$$y(t)=e^{-\int^t a(x)dx}\left[\int^t e^{\int^x a(y)dy}f(x)dx+c\right]$$

<<第6週>>
二階の微分方程式は，$my''(t)+ky(t)=0$（単振動の方程式）の解法から始めます。
二階微分のＬ変換公式

$$\begin{aligned} L(y''(t)) &= \int_0^\infty e^{-st}y''(t)dt=[e^{-st}y'(t)]_0^\infty+s\int_0^\infty e^{-st}y'(t)dt \\ &\overset{(4)}{=} -y'(0)+s\{sY(s)-y(0)\}=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0) \end{aligned} \tag{6}$$

を直接用いて解く前に，次のようにして二元一次の連立方程式で解けることを示します。

$$my''(t)+ky(t)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} my'(t)=z(t) \\ z'(t)=ky(t) \end{cases}$$

一階微分のＬ変換公式を用いて，上の連立方程式をＬ変換します。

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} m\{sY(s)-y(0)\}=Z(s) \\ sZ(s)-z(0)=kY(s) \end{cases}$$

Z(s)を消去すれば，

$$(\mathrm{II})\quad m\{(s^2+\omega^2)\}Y(s)=y(0)s+y'(0),\quad Y(s)=\frac{y(0)s+y'(0)}{(s^2+\omega^2)}$$

逆変換して，求める解は，

$$(\mathrm{III})\quad y(t)=y(0)\cos\omega t+\frac{y'(0)}{\omega}\sin\omega t=A\sin(\omega t+\phi)$$

と書けます。ここに，定数A，ϕは，

$$A=\sqrt{(y(0))^2+\left(\frac{y'(0)}{\omega}\right)^2},\qquad \phi=\tan^{-1}\left(\frac{y(0)}{\frac{y'(0)}{\omega}}\right)$$

で与えられます。

$my''+ky=0$ $(m>0)$の解を，$k>0$，$k=0$，$k<0$ の場合分けをして求めよう。

$$my''(t)+ky(0)=0 \Leftrightarrow y''(t)+\omega^2 y(t)=0 \qquad \omega^2=\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}$$

$$s^2Y(s)-y(0)s-y'(0)+\omega^2Y(s)=0$$

$$(s^2+\omega^2)Y(s)=c_0s+c_1 \qquad (c_0=y(0),\ c_1=y'(0))$$

$$Y(s)=\frac{c_0s+c_1}{s^2+\omega^2}$$

$k>0$	$k=0$	$k<0$
$Y(s)=\dfrac{c_0s+c_1}{s+\omega^2}$	$Y(s)=\dfrac{c_0s+c_1}{s^2}=\dfrac{c_0}{s}-\dfrac{c_1}{s_2}$	$Y(s)=\dfrac{c_0s+c_1}{s_2-\omega^2}$
$y(t)=c_0\cos\ \omega t+\dfrac{c_1}{\omega}\sin\ \omega t$	$y(t)=c_0+c_1t$	$y(t)=c_0\cosh\ \omega t+\dfrac{c_1}{\omega}\sinh\ \omega t=Ae^{\omega t}+Be^{-\omega t}$
		$A=\dfrac{c_0+\frac{c_1}{\omega}}{2}$, $B=\dfrac{c_0+\frac{c_1}{\omega}}{2}$

$k>0$ のとき，$y'(t)+\omega^2(y)t=f(t)$ $(f(t)=\delta(t),\ H(t),\ \sin bt)$について，次の方程式を解く。

［問題１］次の微分方程式を解け。

(1) $y''+\omega^2y=\delta(t)$，(2) $y''+\omega^2y=H(t)$，(3) $y''+\omega^2y=\sin(at)$

解.

(1) $y''+\omega^2y=\delta(t)$	(2) $y''+\omega^2y=H(t)$	(3) $y''+\omega^2y=\sin(at)$
初期条件：$y(0)=y'(0)=0$		
$s^2Y(s)+\omega^2Y(s)=1$	$s^2Y(s)+\omega^2Y(s)=\dfrac{1}{s}$	$s^2Y(s)+\omega^2Y(s)=\dfrac{b}{s^2+\omega^2}$
$Y(s)=\dfrac{1}{s^2+\omega^2}$	$Y(s)=\dfrac{1}{s^2+\omega^2}\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{\omega^2}\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+\omega^2}\right)$	$Y(s)=\dfrac{1}{s^2+\omega^2}\dfrac{b}{s^2+b^2}=\dfrac{1}{\omega^2+b^2}\left(\dfrac{-b}{s^2+\omega^2}+\dfrac{b}{s^2+b^2}\right)$
$y(t)=\dfrac{1}{\omega}\sin\ \omega t$	$y(t)=\dfrac{1}{\omega}\sin\ \omega t*H(t)=\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^t\sin\ \omega x dx=\dfrac{1}{\omega^2}(1-\cos\ \omega t)$	$y(t)=\dfrac{1}{\omega}\sin\ \omega t*\sin at=\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^t\sin\ \omega(t-x)\sin bxdx=\dfrac{1}{\omega^2-b^2}\left(-\dfrac{b}{\omega}\sin\ \omega t+\sin bt\right)$

［問題２］ $y''+\omega^2y(t)=0$ を次の条件（境界条件という）で解け。

(1) $y(0)=y(a)=0$　　(2) $y'(0)=y'(a)=0$

解.

(1)

$$s^2Y-sy(0)-y'(0)+\omega^2Y=0$$

$$Y(s)=\frac{y'(0)}{s^2+\omega^2}$$

$$y(t)=\frac{y(0)}{\omega}\sin\ \omega t$$

$$y(a)=\frac{y(0)}{\omega}\sin\ \omega a=0$$

$$\omega=n\pi$$

$$\omega=\frac{n\pi}{a}$$

$$y(t)=\frac{y(0)}{\omega}\sin\left(\frac{n\pi}{a}t\right)$$

(2)

$$s^2Y-sy(0)-y'(0)+\omega^2Y=0$$

$$Y(s)=\frac{y(0)s}{s^2+\omega^2}$$

$$y(t)=y(0)\ \cos\ \omega t$$

$$y'(t)=y(0)\sin\ \omega a=0$$

$$y(t)=y'(0)\ \cos\left(\frac{n\pi}{a}t\right)$$

上記(1)，(2)のような境界条件で微分方程式を解く問題を，今までの初期値問題に対して，**境界値問題**という。同時に，この問題は，境界条件から整数n（これを**固有値**という）を決めることになるので，**固有値問題**ともいう。このときの，ω，$y(t)$を固有振動数（固有関数）という。

こうして，目標の$y''(t)+ay'(t)+by(t)=f(t)$の解法に向かう。

≪第7週≫

次のような型の微分方程式の解法を演習問題とします。

［**問題**］(1) $y''-2y'-3y=0$，(2) $y''-6y'+9y=0$，(3) $y''-6y'+11y=0$

解

(1) $y''-2y'-3y=0$	(2) $y''-6y'+9y=0$	(3) $y''-6y'+11y=0$
$(s^2-2s-3)Y$ $=c_0s+c_1+2c_0$	$(s^2-6s-9)Y$ $=c_0s+c_1+6c_0$	$(s^2-6s+11)Y$ $=c_0s+c_1+6c_0$
$Y(s)=\dfrac{c_0s+c_1+2c_0}{(s+1)(s-3)}$ $=\dfrac{A}{s+1}+\dfrac{B}{s-3}$	$Y(s)=\dfrac{c_0s+c_1+6c_0}{(s-3)^2}$ $=\dfrac{A}{s-3}+\dfrac{B}{(s-3)^2}$	$Y(s)=\dfrac{c_0s+c_1+6c_0}{(s-3+i\sqrt{2})(s-3-i\sqrt{2})}$ $=\dfrac{c_0s+c_1+6c_0}{(s-3)^2+2}$ $=A\dfrac{s-3}{(s-3)^2+(\sqrt{2})^2}+B\dfrac{\sqrt{2}}{(s-3)^2+(\sqrt{2})^2}$
$A=\dfrac{-c_0-c_1}{4}$ $B=\dfrac{5c_0+c_1}{4}$	$A=c_0$ $B=9c_0+c_1$	$A=c_0$ $B=\dfrac{9c_0+c_1}{2\sqrt{2}}$
$y(t)=Ae^{-t}+Be^{3t}$	$y(t)=Ae^{3t}+Bte^{3t}$ $=Ae^{3t}(1+\dfrac{B}{A}t)$	$y(t)=Ae^{3t}\cos\sqrt{2}t+Be^{3t}\sin\sqrt{2}t$ $=A'e^{3t}\sin(\sqrt{2}t+\phi)$

こうした具体的な問題解決法の後（print Ⅲ）に，$y''+ay'+by=0$の解を判別式を用いて分類する。

$$y''(t)+ay(t)+by(t)=0 \tag{7}$$

(I) $\{s^2Y(s)-y(0)s-y'(0)\}+a\{sY(s)-y(0)\}+by(s)=0$

(II) $(s^2+as+b)Y(s)=y(0)+y'(0)+ay(0)$

$=c_0s+c_1$

$\{c_0=y(0),\ c_1=y'(0)+ay(0)\}$

$$Y(s)=\frac{c_0s+c_1}{s^2+as+b}$$

$$\text{二次方程式}\ s^2+as+b=0\ \text{の判別式}\ D=a^2-4b \tag{8}$$

$D>0$（二実根$\alpha\neq\beta$）	$D=0$（重根α）	$D<0$（共役虚根）$\alpha\pm iw$)
s^2+as+b $=(s-\alpha)(s-\beta)$	s^2+as+b $=(s-\alpha)^2$	s^2+as+b $=(s-\alpha+i\omega)(s-\alpha-i\omega)$ $=(s-\alpha)^2+\omega^2$
$Y(s)=\dfrac{c_0s+c_1}{(s-\alpha)(s-\beta)}$ $=\dfrac{A}{s-\alpha}+\dfrac{B}{s-\beta}$	$Y(s)=\dfrac{c_0s+c_1}{(s-\alpha)^2}$ $=\dfrac{A}{s-\alpha}+\dfrac{B}{(s-\alpha)^2}$	$Y(s)=\dfrac{c_0s+c_1}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$ $=\dfrac{A(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\omega^2}+\dfrac{B\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$
$A=\dfrac{c_0\alpha+c_1}{\alpha-\beta}$ $B=\dfrac{-c_0\beta-c_1}{\alpha-\beta}$	$A=c_0$ $B=c_0\alpha+c_1$	$A=c_0$ $B=\dfrac{c_0\alpha+c_1}{\omega}$
$y(t)=Ae^{\alpha t}+Be^{\beta t}$	$y(t)=Ae^{\alpha t}+Bte^{\alpha t}$ $=Ae^{\alpha t}(1+\dfrac{B}{A}t)$	$y(t)=Ae^{\alpha t}\cos\omega t+\dfrac{B}{\omega}e^{\alpha t}\sin\omega t$ $=A'e^{\alpha t}\sin(\omega t+\phi)$

$$y''(t)+ay'(t)+by(t)=\delta(t),\ (y(0)=y'(0)=0) \tag{9}$$

の特解（後の為に，この場合の解y(t)をg(t)で表す）は，上表を利用すれば，容易に書き下せます。

$D>0$（二実根$\alpha\neq\beta$）	$D=0$（重根α）	$D<0$（共役虚根$\alpha\pm i\omega$）
$G(s)=\dfrac{1}{\alpha-\beta}\left(\dfrac{1}{s-\alpha}-\dfrac{1}{s-\beta}\right)$	$=\dfrac{1}{(s-\alpha)^2}$	$G(s)=\dfrac{1}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$
$g(t)=\dfrac{1}{\alpha-\beta}\left(e^{\alpha t}-e^{\beta t}\right)$	$g(t)=te^{\alpha t}$	$g(t)=\dfrac{1}{\omega}e^{\alpha t}\sin\omega t$

こうして，

$$y''(t)+ay'(t)+by(t)=f(t),\ (y(0)=y'(0)=0) \tag{10}$$

の解は，直ちに合成積で

$$y(t)=g(t)*f(t)=\int_0^t g(t-x)f(x)dx$$

と書けます。以上で，目的は達成されました。

≪まとめ≫

$y''(t)+ay'(t)+by(t)=f(t)$の両辺をL変換した式を次のように書き換えます。

$$H(s)Y(s)=H_0(s)+F(s)$$

ここに，$H(s)=s^2+as+b$，$H_0(s)=y(0)s+y'(0)+ay(0)$

$H_0(s)$は，初期条件に依存しているので，例えば，初期値として$y(0)=y'(0)=0$にとれば，消える項である。他方，$H(s)$は，初期条件には依存せず，その微分方程式の型を規定している。$H(s)$を**特性関数**，$H(s)=0$を**特性方程式**，その解（根）を**特性解（根）**という。上式$H(s)Y(s)=H_0(s)+F(s)$において，初期条件として$y(0)=y'(0)=0$をとれば，$H(s)Y(s)=F(s)$となる。両辺に，$H(s)$の逆を掛ければ，

$$Y(s)=\frac{1}{H(s)}F(s)$$

で，この逆変換をとれば，

$$y(t)=g(t)*f(t)=\int_0^t g(t-x)f(x)dx$$

を得る。ここに，$L^{-1}\left(\dfrac{1}{H(s)}\right)=g(t)$ を**伝達関数**（tansfer function），あるいは，積分演算子の核，**グリーン関数**(Green function)という。

微分方程式(9)のシステム工学的な解釈をすれば，$f(t)$を入力（外力）と呼べば，$y(t)$を出力（応答）という。特に，$f(t)=\delta(t)$（インパルス）のとき，$y(t)=g(t)$をインパルス応答という。また，$f(t)=H(t)$（単位階段関数）のとき，$y(t)$を単位応答という。

A Print Ⅰ．定積分の計算練習

(1) $\int_0^\infty e^{-2t}dt$　(2) $\int_0^\infty e^{-2t}e^{-at}dt$　(3) $\int_0^\infty e^{-2t}tdt$　(4) $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$

(5) $\int_0^\infty e^{-2t}\sin 3tdt$　(6) $\int_0^\infty e^{-3t}\cos 2tdt$　(7) $\int_0^\infty e^{-t}\sqrt{t}dt$　(8) $\int_0^\infty e^{-t}\frac{1}{\sqrt{t}}dt$

解.

(1) $\int_0^\infty e^{-2t}dt=-\frac{1}{2}[e^{-2t}]_0^\infty=\frac{1}{2}$

(2) $\int_0^\infty e^{-2t}e^{-at}dt=-\frac{1}{2+a}[e^{-(a+2)t}]_0^\infty=\frac{1}{a+2}$

(3) $\int_0^\infty e^{-2t}tdt=[-e^{-t}t]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-t}dt=[-e^{-t}]_0^\infty=1$

(4) $(I)^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{+t^2} e^{-s^2} dtds = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} rdrd\theta$

$= \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}\left(\frac{de^{-r^2}}{dr}\right) drd\theta = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\left[e^{-r^2}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{4}$

$(I) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(5) $(I) = \int_0^\infty e^{-2t} sin3tdt = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 3t\right]_0^\infty + \frac{3}{2}\int_0^\infty e^{-2t}\cos 3tdt$

$= \frac{3}{2}\left\{\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos 3t\right]_0^\infty - \frac{3}{2}\int_0^\infty e^{-2t}\sin 3tdt\right\} = \frac{3}{4} - \frac{9}{4}(I)$

$\frac{13}{4}(I) = \frac{3}{4}, \quad (I) = \frac{3}{13}$

(6) $(I) = \int_0^\infty e^{-3t}\cos 2tdt = \left[-\frac{1}{3}e^{-3t}\cos 2t\right]_0^\infty + \frac{2}{3}\int_0^\infty e^{-3t}\sin 2tdt$

$= \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\left\{\left[-\frac{1}{3}e^{-3t}\sin 2t\right]_0^\infty + \frac{2}{3}\int_0^\infty e^{-2t}\sin 2tdt\right\} = \frac{1}{3} - \frac{4}{9}(I)$

$\frac{13}{9}(I) = \frac{1}{3}, \quad (I) = \frac{3}{13}$

(7) $\int_0^\infty e^{-t}\sqrt{t}dt \overset{\sqrt{t}=T}{=} 2\int_0^\infty e^{-T^2}T^2 dT = 2\left\{\left[-\frac{1}{2}Te^{-t^2}\right]_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-T^2}dT\right\}$

$= 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(8) $\int_0^\infty e^{-t}\frac{1}{\sqrt{t}}dt \overset{\sqrt{t}=T}{=} 2\int_0^\infty e^{-T^2}dT = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$

B PrintⅡ．L 変換のいろいろな性質．

次の関数のＬ変換($L(f(t)) = F(s)$) を求めよ (a,bは定数)。

(1) $af(t) + bg(t)$ (2) $f(at)$ (3) $f(at-b)$ (4) $f(at+b)$

(5) $e^{-at}f(t)$ (6) $\frac{df(t)}{dt} = f'(t)$ (7) $\frac{d^2f(t)}{dt^2} = f''(t)$ (8) $tf(t)$

(9) $\frac{f(t)}{t}$ (10) $\int_0^t f(x)dx$ (11) $f(t) = f(t+T)$ (Tは周期)

解．

(1) $L(f(at) + bg(t)) = aL(f(t)) + bL(g(t)) = aF(s) + bG(s)$

(2) $L(f(at) \overset{at=x}{=} \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}x} f(x)dx = \frac{1}{a}F\left[\frac{a}{s}\right]$

(3) $L(f(t-b)) \overset{t-b=x}{=} \int_0^\infty e^{-s(x-b)} f(x)dx$

$= e^{-bs}\int_0^\infty e^{-st} f(x)dx = e^{-bs}F(s)$

(4) $L(f(t+b)) \overset{t+b=x}{=} \int_0^b e^{-s(x+b)} f(x)dx = \frac{1}{a}e^{\frac{b}{a}s}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}x} f(x)dx$

$= \frac{1}{a}e^{\frac{b}{a}s}\left\{\int_b^\infty e^{-\frac{s}{a}x} f(x)dx - \int_b^\infty e^{-\frac{s}{a}x} f(x)dx\right\}$

$= \frac{1}{a}e^{\frac{b}{a}s}F(s)$

(5) $L(e^{\pm at}f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}\{e^{\pm at}f(t)\}dt = \int_0^\infty e^{-(s\mp a)t}f(t)dt$
$= F(s\mp a)$

(6) $L(f'(t)) = sF(s) - f(0)$

(7) $L(f''(t)) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

［一般形］ $L(f^n(t)) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots\cdots - f^{n-1}(0)$

(8) $L(t\cdot f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}(t\cdot f(t)dt = -\int_0^\infty \frac{d}{ds}(e^{-st})f(t)dt$
$= -\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = -\frac{df(s)}{dt} - (F(s))'$

［一般形］ $L(t^nf(t)) = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$

(9) $L\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty\left(\int_s^\infty e^{-st}ds\right)f(t)dt$
$= \int_s^\infty\left(\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt\right)ds = \int_s^\infty F(s)ds$

［一般形］ $L\left(\frac{f(t)}{t^n}\right) = \left(\underbrace{\int_s^\infty\cdots\cdots\int_{s_{n-1}}^\infty}_{n} F(s)dsds_1\cdots\cdots ds_{n-1}\right)$

(10) $L\left(\int_0^t f(x)dx\right) = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(x)dx\right)dx$
$= \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\int_0^t f(x)dx\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$
$= \frac{1}{s}F(s)$

［一般形］ $L\left(\underbrace{\int_0^t\cdots\cdots\int_0^{t_{n-1}}}_{n}f(x)dxdx_1\cdots dx_{n-1}\right) = \frac{1}{s^n}F(s)$

(11) $L(f(t)) = L(f(t+T)) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$
$= \int_0^T e^{-st}f(t)dt + \int_T^\infty e^{-st}f(t)dt$

$\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt \overset{t-T=X}{=} \int_0^\infty e^{-s(T+x)}f(T+x)dx$
$\overset{F(t+X)=F(x)}{=} e^{-sT}\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\mathrm{dx} = e^{-sT}L(f)$
$(1-e^{-sT})L(f) = \int_0^T e^{-st}f(t)dt,\quad L(f) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$

C PrintⅢ．L変換による微分方程式（初期値問題）の解法．

(1) $y''+2y'-3y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$
(2) $y''+4y'+4y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$
(3) $y''+2y'+5y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=-1$
(4) $y'''-2y''-y'+2y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=-1$
(5) $y'+y-2\int_0^t y\mathrm{dt}=0,\ y(0)=1$

解.

(1) $s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2\{sY(s)-y(0)\}-3Y(s)=0$

$(s^2+2s-3)Y(s)=1,\quad Y(s)=\dfrac{1}{s^2+2s-3}=\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{2}{s+3}$

$L^{-1}(Y(s))=y(t)=\dfrac{1}{2}\left(e^t+e^{-3t}\right)$

(2) $s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4\{sY(s)-y(0)\}+4Y(s)=0$

$(s^2+4s+4)Y(s)=s+4,\quad Y(s)=\dfrac{s+4}{(s+2)^2}=\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{2}{(s+2)^2}$

$L^{-1}(Y(s))=y(t)=e^t+2te^{3t}=e^t(1+2t)$

(3) $s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2\{sY(s)-y(0)\}+5Y(s)=0$

$(s^2+2s+5)Y(s)=-1,\quad Y(s)=\dfrac{-1}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2}$

$L^{-1}(Y(s))=y(t)=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-t}sin\sqrt{3}t$

(4) $s^3Y(s)-s^2y(0)-sy'(0)-y''(0)-2\{s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\}-\{sY(s)-y(0)\}+2Y(s)=0$

$(s^3-2s^2-s+2)Y(s)=1$

$Y(s)=\dfrac{1}{s^3-2s^2-s+2}=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{3}{s-1}+\dfrac{2}{s-2}\right)$

$L^{-1}(Y(s))=y(t)=\dfrac{1}{6}\left(e^{-t}-3e^t+2e^{2t}\right)$

(5) $sY(s)-y(0)+Y(s)-2\dfrac{1}{s}Y(s)=0$

$(s^2+s-2)Y(s)=s,\quad Y(s)=\dfrac{s}{s^2+s-2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{2}{s+2}\right)$

$L^{-1}(Y(s))=y(t)=\dfrac{1}{3}\left(e^t+2e^{-2t}\right)$

(平成９年11月28日受理)