

倒立振子の振り上げ制御

木 村 太

Swinging up Control of Inverted Pendulum

Futoshi KIMURA

Abstract

This paper present a control method of Inverted Pendulum including a swinging up control. In this control, the optimal regulator was applied to a swinging up control and an inverted control. In a swinging up control, a reference value of Pendulum was set up to the sine wave that amplitude becomes big. As a result, the angle of Pendulum and the position of a cart were controlled finely.

1. はじめに

細い棒の一端を支点として、この棒が倒れないようにバランスを取る遊びがある。これは通常の振子を逆さまにしたもので倒立振子 (Inverted Pendulum) と呼ばれている。通常の振子は棒を傾けても元の状態に戻るが、倒立振子では垂直に立っている棒の角度をわずかに変動させても倒れてしまい、元の状態には戻らない。制御工学的には前者は安定なシステムであり、後者は不安定なシステムであると言える。

この様な特徴を持つ倒立振子は、制御工学における不安定システムの代表的な例であり、最適制御やロバスト制御などの制御方法の有効性を確かめる制御対象として多く用いられている。本学科でも最適レギュレータや適応制御による倒立振子の制御を卒業研究として行っており、最適制御についてはその有効性を実験装置により確認することが可能となっている。

一般的に倒立振子制御では振子が立っている状態(初期値がない場合)、またはわずかに倒れている状態(初期値がある場合)から目標位置まで振子を倒さずに移動させることを目的としている。

そこで今回は真下にある振子の振り上げを含めた倒立制御を目的として制御系の設計を行い、その有効性を実験により検討したのでここに報告する。

2. 倒立振子装置の概要

図1に倒立振子装置の構成を示す。振子の一端は台車に取り付けられており、自由に回転することができる。台車はサーボモータによって駆動されるベルトに固定されており、左右に移動することができる。ベルトのプーリ、および振子の回転軸にはそれぞれポテンシオメータが接続されており、前者からは台車の位置が、後者からは振子の振れ角が電圧値として検出される。コントローラでは検出された台車位置、振子角度に加えサンプリング時間毎の差分で求められる台車速度、振子角速度から操作量を算出し、サーボモータへ指令電圧を与える。

本装置は倒立振子実験の他、図1のように振子を倒した場合には、振れ角を抑えながら台車を移動させる、いわゆるクレーン制御の実験も可能である。

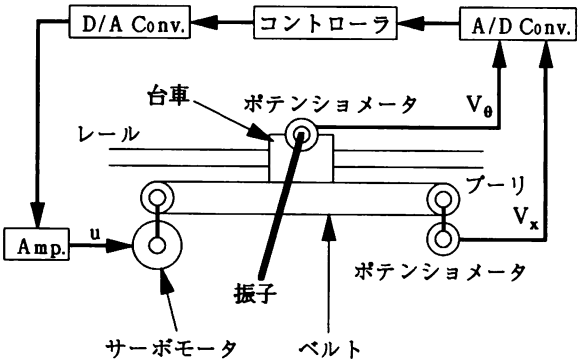


図1 倒立振子装置構成

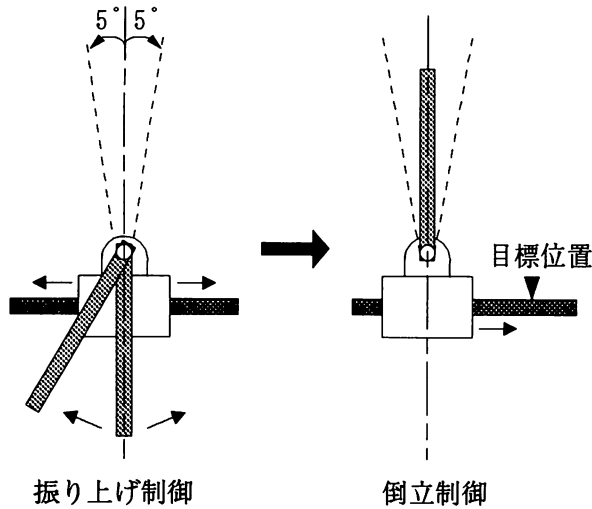


図2 制御方法

3. 制御系の設計

振り上げを含めた制御の流れを図2に示す。振子は最初鉛直方向に吊り下げられており、この状態から台車を左右に移動させて振子を振り上げる。(以下これを振り上げ制御と呼ぶ)この制御では振子の角度を目標値とし、これに追従するように制御を行っている。振子が垂直方向に対して $\pm 5^\circ$ 以内に入ると制御を切り替え、振子の倒立を維持しながら台車を目標位置まで移動させる。(以下これを倒立制御と呼ぶ)

今回コントローラには振り上げ、倒立制御ともに状態フィードバック制御の一つである最適レギュレータを用いた。以下、具体的な制御系の設計について述べる。

なお、最適制御を用いた倒立制御については、文献¹⁾²⁾や卒業論文³⁾など多数報告されているので、本報では割愛させていただく。

3. 1 数式モデルと状態方程式

吊り下げられた振子の挙動は力学的な運動であり、数式モデルとして表すことができる。図3は移動中の台車と棒に働く力を表しており、これより台車および振子の運動方程式は次式となる。

台車系：

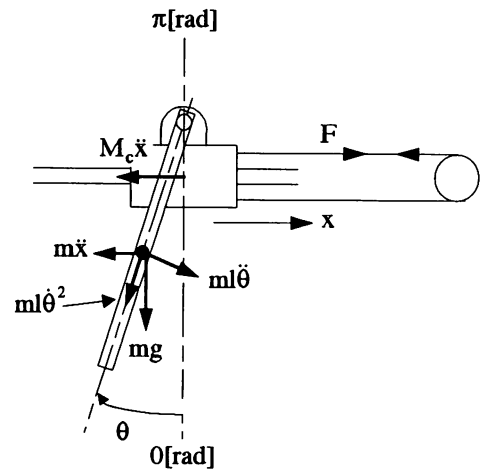
$$F = M_c \ddot{x} + m \ddot{x} - ml \ddot{\theta} \cos \theta + ml \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (1)$$

振子系：

$$J \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta - ml^2 \ddot{\theta} + si \ddot{x} \cos \theta - c_3 \dot{\theta} \quad (2)$$

ただし、 $c_3[\text{N} \cdot \text{s}/\text{rad}]$ ：棒の軸摩擦係数

$$\text{ここで、振子の角度の変動が微小な場合} \quad \cos \theta \simeq 1, \sin \theta \simeq \theta, \dot{\theta}^2 \sin \theta \simeq 0 \quad (3)$$



$M_c[\text{kg}]$: 台車系の質量, $m[\text{kg}]$: 棒の質量
 $2l[\text{m}]$: 棒の長さ
 $J[\text{kgm}^2]$: 棒の重心まわりの慣性モーメント
 $\theta[\text{rad}]$: 真下方向からの棒の傾き角
 $x[\text{m}]$: 台車の重心位置, $F[\text{N}]$: 台車に働く力

図3 台車と棒に働く力

と近似することができるから、これを(1),(2)式に代入すると、

$$F = (M_c + m) \ddot{x} - ml \ddot{\theta} \quad (4)$$

$$-ml \ddot{x} + (J + ml^2) \ddot{\theta} + mgl \theta + c_3 \dot{\theta} = 0 \quad (5)$$

を得る。

一方操作量 $u[\text{V}]$ によって発生するモータの力は次式で表せるので、

$$F = -c_2 \dot{x} + c_1 u \quad (6)$$

ただし、 $c_1[\text{N}/\text{V}]$ ：モータの電圧-トルク係数、 $c_2[\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}]$ ：台車系の摩擦係数

(4)式は(7)式のようにになる。

$$(M_c + m) \ddot{x} - ml \ddot{\theta} + c_2 \dot{x} = c_1 u \quad (7)$$

(5),(7)式から $\ddot{x}$, $\ddot{\theta}$ を求めると次式のようにになる。

$$D \ddot{x} = -m^2 l^2 g \theta - c_2 (J + ml^2) \dot{x} - c_3 ml \dot{\theta} + c_1 (J + ml^2) u \quad (8)$$

$$D \ddot{\theta} = -(M_c + m) mgl \theta - c_2 ml \dot{x} - c_3 (M_c + m) \dot{\theta} + c_1 ml u \quad (9)$$

$$\text{ただし、} D = (M_c + m) J + M_c ml^2 \quad (10)$$

いま、状態変数として(11)式のように選ぶと、制御対象の状態方程式、および出力方程式はそれぞれ(12),(13)式となる。

$$\mathbf{x}(t) = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}]^T \quad (11)$$

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F} \mathbf{x}(t) + \mathbf{g} u(t) \quad (12)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{c} \mathbf{x}(t) \quad (13)$$

ただし、

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-m^2 l^2 g}{D} & \frac{-(J+ml^2)c_2}{D} & \frac{-mlc_3}{D} \\ 0 & \frac{-(M_c+m)mgl}{D} & \frac{-mlc_2}{D} & \frac{-(M_c+m)c_3}{D} \end{bmatrix}$$
$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(J+ml^2)c_1}{D} \\ \frac{mlc_1}{D} \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

なお、装置の物理パラメータは表1のとおりである。

表1 倒立振子装置の物理パラメータ

Mc	台車系の質量[kg]	5.54
m	棒の質量[kg]	0.07
J	棒の重心まわりの慣性モーメント[kg・m ²]	1.216×10 ⁻³
l	棒の回転軸から重心までの長さ[m]	1.15×10 ⁻¹
c1	モータの電圧－トルク係数[N/V]	23.12
c2	台車系の摩擦係数[N・s/m]	21.91
c3	棒の軸摩擦係数[N・s/rad]	2.454×10 ⁻⁴
電圧－位置変換係数[V/m]		21.56
電圧－角度変換係数[V/rad]		3.33

次にコンピュータによるデジタル制御を行うため、状態方程式を離散化すると次式を得る。

$x(k+1)Ax(k)+bu(k)$ (15)

$y(k)=cx(k)$ (16)

ただし、 $A=e^{FT_s}$, $b=\int_0^{T_s} e^{F\tau}d\tau \cdot g$ (17)

上式においてkはk番目のサンプル値を、Tsはサンプリング時間を表す。

3. 2 コントローラ的设计

コントローラ的设计には操作量uの計算式を決定する構造设计与、計算式で使われる数値を決定するパラメータ设计がある。以下、それぞれの设计について述べる。

(1)構造设计 本制御の目的は振子の角度を目標値に追従させること、および希望の過渡特性を実現させることにある。従ってコントローラは状態フィードバック制御とし、レギュレータの構成とした。

次節でも述べるが、レギュレータ系は状態量を速やかに減衰させるためのものであり、目標値と状態量の制御偏差を0にすることはできない。しかし、今回は目標振れ角と偏差があっても倒立制御に移行する角度まで振り上げられればよいので、この構成を用いた。

レギュレータにおける操作量の計算式を(18)式に示し、状態フィードバックを含めた制御システムを図4および(19)式に示す。

$u(k)=-k_{f1}x_1(k)+k_{f2}\{\theta_r(k)-x_2(k)\}-k_{f3}x_3(k)-k_{f4}x_4(k)-k_0u(k-1)$ (18)

ただし、 $k_{f1} \sim k_{f4}, k_0$: フィードバック係数、
 θ_r [rad] : 振れ角の目標値
 $x(k+1)=Ax(k)+bu(k-1)$ (19)

ここで、(18)式において1サンプル前の操作量u(k-1)を用いているのは、演算遅れを考慮したものである。また、図4中の差分による推定とは、台車の速度、振子の角速度を(20)式のように1サンプル前の台車位置、振れ角との差分から計算し、推定していることを表す。(速度、角速度センサを設けていないため)

$$\left. \begin{aligned} x_3(k) &= \frac{x_1(k)-x_1(k-1)}{T_s} \\ x_4(k) &= \frac{x_2(k)-x_2(k-1)}{T_s} \end{aligned} \right\}$$

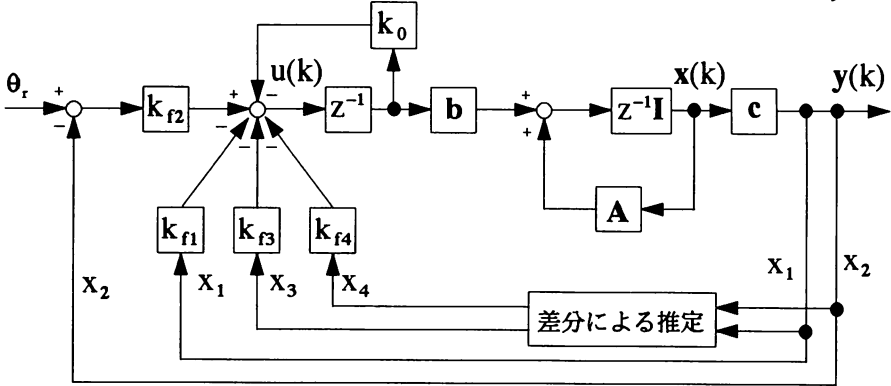


図4 制御システム構成図

なお、倒立制御については操作量を次式で計算している。

$$u(k) = k_{f1} \{x_{ref} - x_1(k)\} - k_{f2} x_2(k) - k_{f3} x_3(k) - k_{f4} x_4(k) - k_0 u(k-1) \quad (21)$$

ただし、 $x_{ref}[m]$ ：台車の目標位置

(2)パラメータ設計 本制御では状態変数の個数が多いため、直接システムの極を指定する方法は困難と考え、最適制御を採用した。

最適制御とは(22)式に示される2次形式評価関数を最小にするようなパラメータを求める方法である。

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \{x^T(k)Qx(k) + Ru^2(k)\} \quad (22)$$

$$\text{ただし、} Q = \text{diag}[q_1, q_2, q_3, q_4] \quad (23)$$

ここで、 Q, R はそれぞれ状態変数、操作量に対する重みである。重み Q を大きくすると、状態量の速応性が増し、大きな操作量が必要となる。一方、重み R を大きくすると操作量は抑えられるが、状態量の収束速度が遅くなり、両者はトレードオフの関係となっている。本制御では、台車位置(x_1)、振り角度(x_2)、操作量(u)の応答を評価すればよいので、 q_1, q_2, u のみに重みを持たせた。今回は振り上げ、倒立制御ともに次の数値とした。

$Q = [100, 100, 0, 0]$ 、 $R = 10$ (文献³⁾による)

最適レギュレータのフィードバック係数は(24)、(25)式から得られる。

$$\begin{aligned} [k_{f1}, k_{f2}, k_{f3}, k_{f4}] &= K_f A \\ k_0 &= K_f b \end{aligned} \quad (24)$$

$$K_f = (R + b^T P b)^{-1} b^T P A \quad (25)$$

(25)式において行列 P は、(26)式で表される離散型リカッチ方程式を満たす正定行列である。

$$P = Q + A^T P A - A^T P b (R + b^T P b)^{-1} b^T P A \quad (26)$$

3. 3 振子の目標角度について

本装置において台車が移動できる距離は約1[m]であり、なるべく少ない移動量で振子を振り上げなければならない。従って、本制御では振子を左右に振らせ、さらにその振幅を徐々に大きくするような振り上げ方法を考えた。このため、振子の目標角度は次式とした。

$$\theta_r(t) = \theta_m (1 - e^{-\frac{t}{\tau_s}}) \sin(2\pi f_s t), t = k \cdot T_s \quad (27)$$

ただし、 $\theta_m[\text{rad}]$ ：最大振幅、 $\tau_s[\text{s}]$ ：時定数
 $f_s[\text{Hz}]$ ：周波数

θ_m などの具体的な数値については次章で述べる。

4. シミュレーションおよび実験結果と考察

振り上げを含めた倒立振子のシミュレーションに先立ち、振子の目標信号の設定について検討を行った。

図5は振り上げ制御のみを行った場合の過渡応答である。サンプリング時間は20[msec]、目標信号は $\theta_m = \pi[\text{rad}]$ 、 $\tau_s = 1[\text{s}]$ 、 $f_s = 1[\text{Hz}]$ としている。

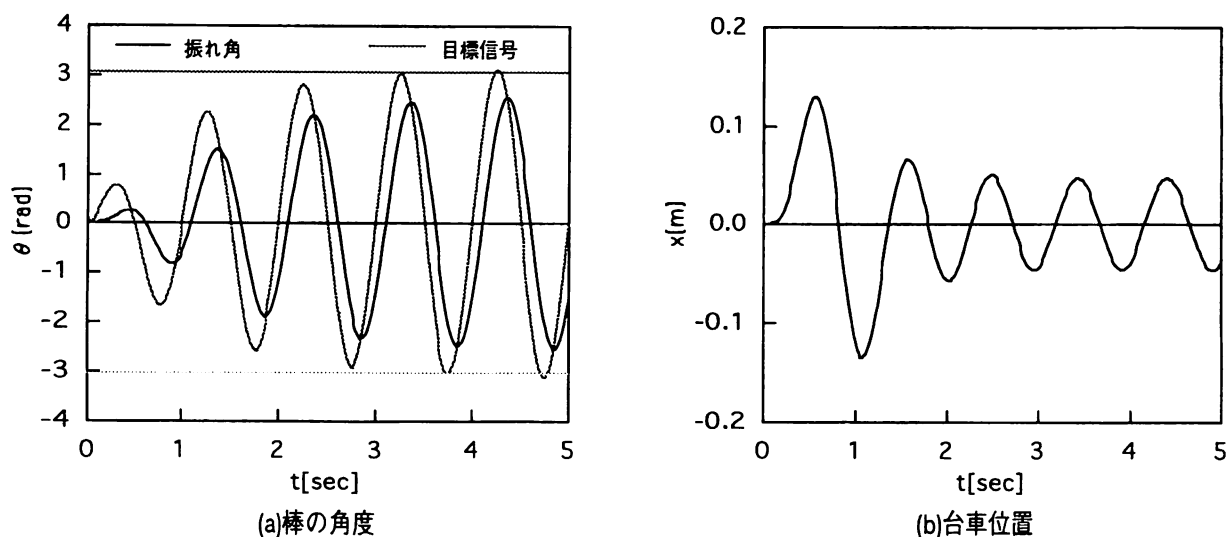


図5 振り上げ時の過渡応答

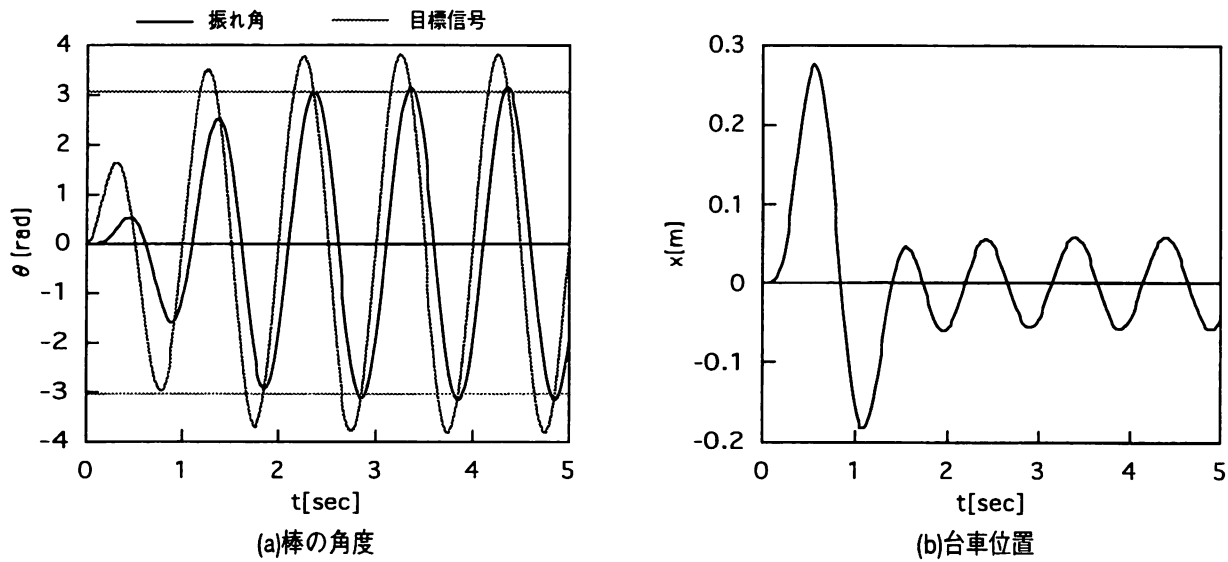


図6 振り上げ時の過渡応答

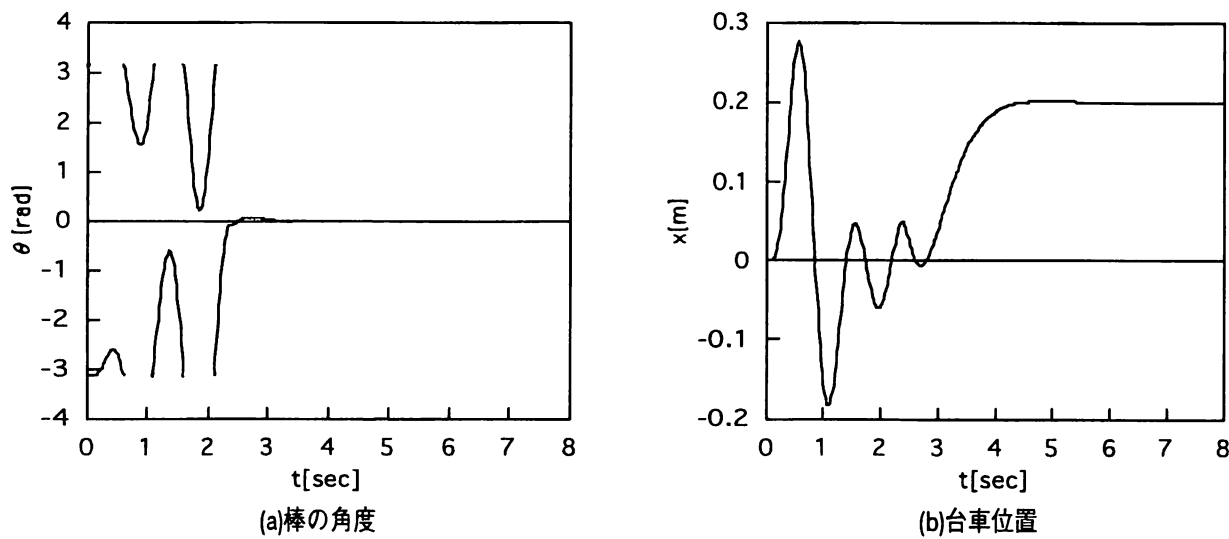


図7 シミュレーション結果

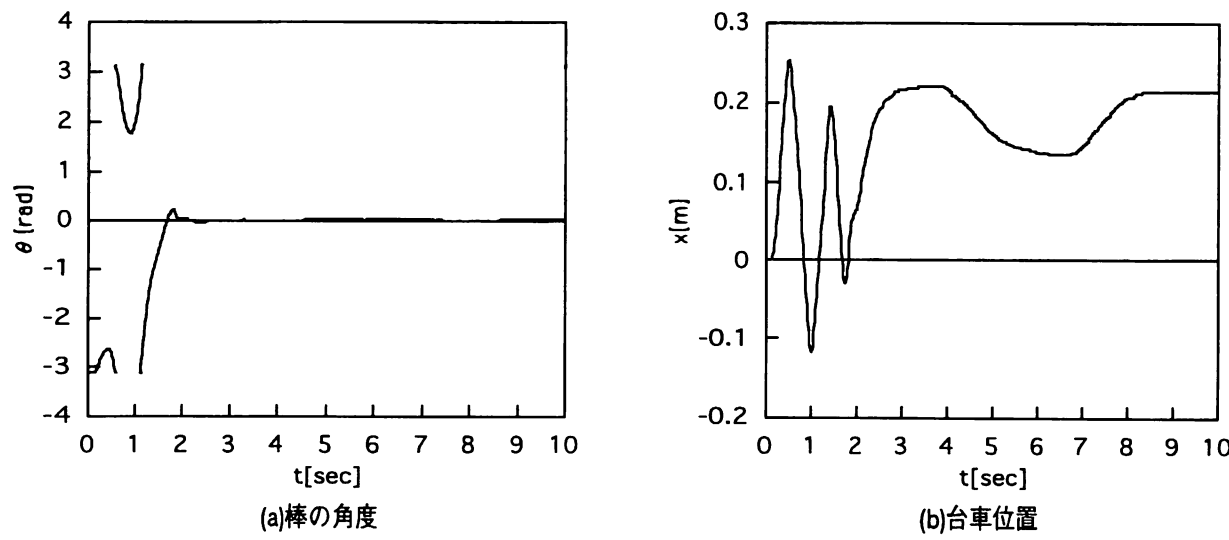


図8 実験結果

結果を見ると振子の角度は目標信号に遅れながら従っているものの偏差が残っており、倒立制御に移行できるまで振り上がっていない。(破線の直線が倒立制御に移行できる角度を示す。)これは前章で述べたように、コントローラをレギュレータで構成したためである。(27)式のような時変の目標値に対して偏差を無くすためには、数次のサーボ系を追加するなど、コントローラを複雑にしなければならない。しかしながら本制御では偏差の有無は重要ではなく、少ない台車移動で振り上がることを優先したため、目標信号を調整して振り上がるようにした。

図6は $\theta_m = 3.82[\text{rad}]$ 、 $\tau_s = 0.5[\text{s}]$ 、 $f_s = 1[\text{Hz}]$ としたシミュレーション結果である。振子の角度は目標信号に対して偏差はあるが倒立制御のレベルまで達している。また、台車の移動量も $30[\text{cm}]$ 以内に収まっており、良好な結果が得られている。

この目標信号を用い、台車目標位置を $0.2[\text{m}]$ として倒立振子制御のシミュレーションおよび実験を行った。シミュレーション結果を図7に、実験結果を図8に示す。なお、図7、8において振子の角度は垂直に立った状態を $0[\text{rad}]$ とし、台車位置は制御開始地点を $0[\text{m}]$ としている。

両方の結果を比較すると、振子角度については振れ角を徐々に大きくしながら振り上がり、倒立制御に移行して倒立が維持されていることがわかる。しかしながら、装置実験の方が早く倒立制御に移行している。これは、振り上げ制御において数式モデルを導出する際に、非線形項を微小角近傍で線形近似したことによると思われる。また、台車位置についても実験では目標位置から大きくふらついている。これについては、実験装置のたつきや、モータを含む駆動系の摩擦力の影響によるものと考えられる。

5. おわりに

振り上げ動作を含めた倒立振子を制御対象として、制御系の設計および実験を行った。制御系の設計では、振り上げ制御と倒立制御に分けてコントローラを設計し、それぞれ最適レギュレータで構成した。

その結果、時変の角度目標信号を与えることで少ない台車移動量で振り上がり、振子を倒立させることができた。しかし、振り上げ制御における非線形項の近似により、シミュレーションと実験に違いが生じた。これについては非線形系の制御系設計が必要であり、今後の課題として残された。

本報で述べた振り上げ制御は、安定な状態から不安定な状態へ移行し、安定状態を維持すると言った制御である。一般的には安定から不安定への移行はシーケンス制御などを用いるが、装置の大きさや重量に制限がある場合には、これを使用できないこともある。従って、数個のアクチュエータで全ての量的な制御を行うためには、今回示したような制御方法も有効であると思われる。

最後に制御プログラムの開発、測定にご協力いただいた岸田太一君(第29期)、高坂亘君(第30期)、和田将威君(第30期)に感謝の意を表する。

参考文献

- 1) 上野敏行・森下巖:「デジタル制御工学」オーム社(1987)
- 2) 美多勉・原辰次・近藤良:「基礎デジタル制御」コロナ社(1988)
- 3) 尾崎賢一:苫小牧工業高等専門学校準学士論文(1993)
- 4) 兼田雅弘・山本幸一郎:「デジタル制御工学」共立出版(1989)

(平成9年11月28日受理)