格子網構造の解析モデル化について
—弾性床上梁の解として—

澤　田　知　之*・近　藤　　崇**・石　倉　建　治***

On Analytical Modulation of Gridwork Net
— as a solution of beam on elastic foundation —

Tomoyuki SAWADA, Takashi KONDO and Kenji ISHIKURA

要　旨

本稿では，格子網構造における主要部材である外枠に注目し，弾性床上に設置された梁としての解を2，3の境界条件について示したもので，模型実験に備えた解析解として報告するものである。

Abstract

It is reported that some solutions of beam on elastic foundation as the main member of Gridwork Net structure for the aim of the model test induced several boundary condition in future.

1．まえがき

格子網構造は，写真と図－1に示すように，消波工ブロックを散逸させずそれ自体が消波構造物になる。またブロック周辺の砂は波に削り取られ格子網と一体となり，全体がほぼ一様に沈下して安定する。

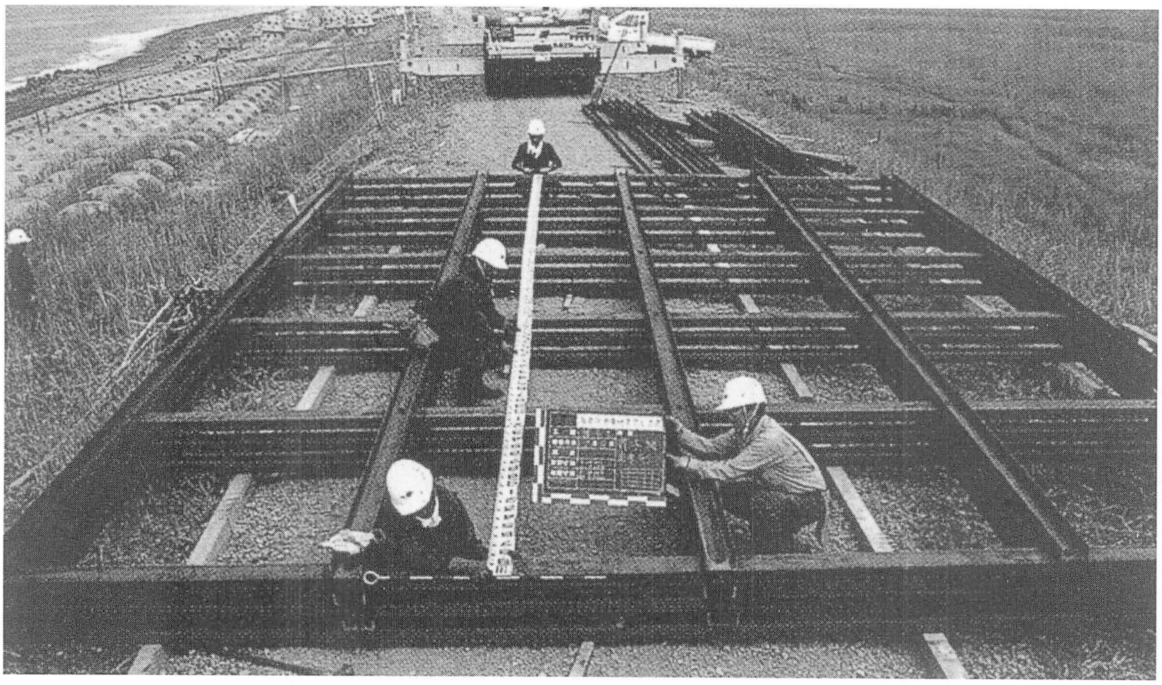
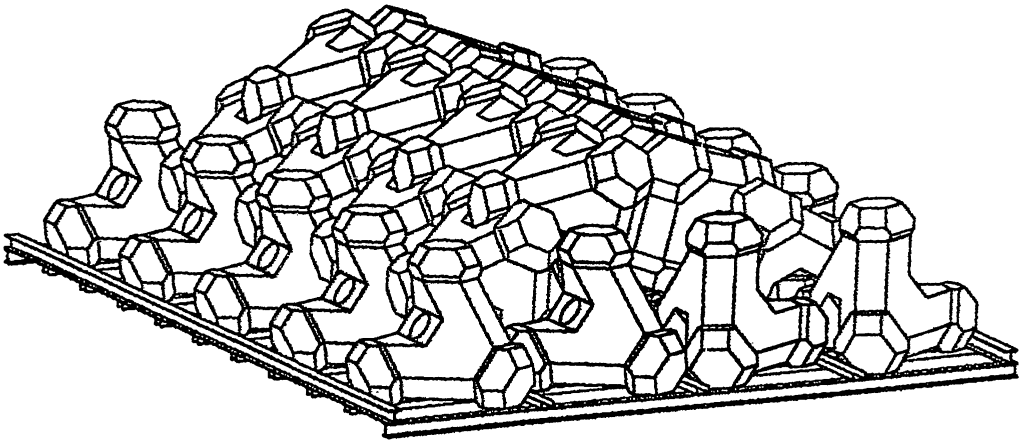


写真　格子網構造の概要（10.0m×7.058m）

*　教授　環境都市工学科
**　助手　環境都市工学科
***　　創建工業株式会社（SOKEN）



図－1　写真の斜視図

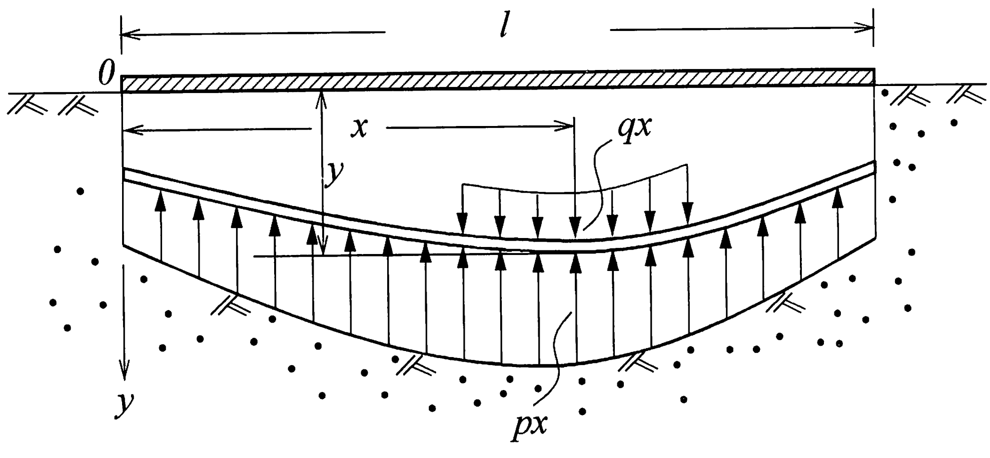
形状としては溝形鋼，山形鋼またはH形鋼を縦横に並べ，交差点をボルト締めし，網目1.5m～2.0m程度，網の一也の大きさは10m前後の大型餅網となっている。

周辺の部材の断面2次モーメントは内側格子部材より大きくなっている。よって，外枠の梁に注目し，解析は弾性床上梁と解析モデル化して取り扱うこととする。本報告は，弾性床上梁としての2，3の特殊の境界条件を有する場合の解析例を示し，今後の実験を行う際への一助とする為のものである。

2．弾性床上に在る梁

[2－1　つり合いの方程式]

鉛直荷重を受ける梁がその全長に亘って弾性床に接する場合は，梁のたわみ（y）は弾性床よりの上向き反力によって幾分妨げられる。この反力 P_x は梁のたわみの進行に伴って次第に増加し，たわみ曲線がある定った形を成し全系統が平衡の状態を保つに至れば P_x もまた定った分布状態となるものである（図－2）。



図－2

P_x の値は未定であるがたわみ（y）が大きい所程 P_x の値も大きいことは明白で普通 P_x は y に正比例するものと仮定できる。即ち地盤反力係数（K）をある正の定数とすれば，任意の点の P_x は

$$P_x = K \cdot y$$

で表わされ，その方向は荷重 q_x と正反対である。よってこの場合の梁は q_x の他に－Ky なる外力を受けるものと考えられるから，つり合い方程式は

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) = q_x - Ky$$

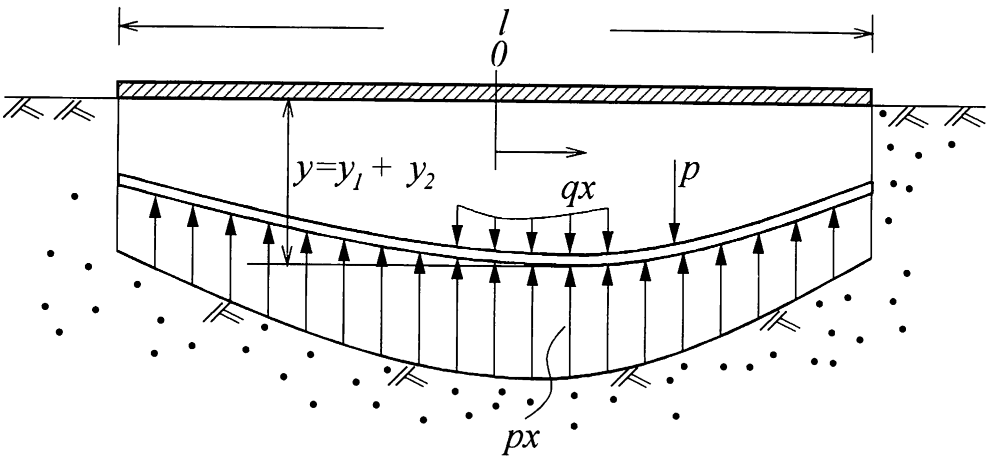
となる。故に，EI ＝一定となる場合は

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{K}{EI}y=\frac{q}{EI}f(x),\ q_x=qf(x) \qquad (1)$$

を得る。以下に，この種の梁の２，３の特殊の境界条件を有する場合の計算例を示す。

［２－２　両端自由なる梁で任意荷重を受ける場合の一般解］

図－３に示すように座標軸の原点を径間の中点に取り，



図－３

y_1及びy_2を各々変数 x の偶関数および奇関数とする時，任意の荷重を受ける梁のたわみが

$$y=y_1+y_2$$

で表わされるものと仮定すれば，y に対する境界条件を満足する為にy_1とy_2は各々，両端で曲げモーメント及び剪断力が無いことより，

$$\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}\right)_{x=\pm l/2}=0 \qquad (2) \qquad\qquad \left(\frac{d^3y_1}{dx^3}\right)_{x=\pm l/2}=0 \qquad (3)$$

$$\left(\frac{d^2y_2}{dx^2}\right)_{x=\pm l/2}=0 \qquad (4) \qquad\qquad \left(\frac{d^3y_2}{dx^3}\right)_{x=\pm l/2}=0 \qquad (5)$$

となる様に選ばなければならない。

条件(2)(3)とは

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{ql^2}{EI}\sum_m a_m\left\{m^2\pi^2\left((-1)^{\frac{m}{2}}-\cos\frac{m\pi}{l}x\right)\right\}$$

$$m=2,4,6\cdots\cdots$$

従って

$$\frac{d^3y_1}{dx^3}=\frac{ql}{EI}\sum_m m^3\pi^3\sin\frac{m\pi}{l}x$$

とおくことによって満足される。これより

$$y_1=\frac{ql^4}{EI}\sum_m a_m\left\{\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2}m^2\pi^2\left(\frac{x}{l}\right)^2+\cos\frac{m\pi}{l}x+c_1\frac{x}{l}+c_0\right\}$$

このy_1が x の偶関数なる為には$c_1=0$でなければならない。よって，

$$\begin{aligned} y_1&=\frac{ql^4}{EI}\sum_m a_m\left\{\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2}m^2\pi^2\left(\frac{x^2}{l^2}-\frac{1}{12}\right)+\cos\frac{m\pi}{l}x+c_0\right\}\\ &=\frac{ql^4}{EI}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{l^2}-\frac{1}{12}\right)\sum_r(-1)^{\frac{r}{2}}r^2\pi^2a_r+\sum_m a_m\cos\frac{m\pi}{l}x+c_0\sum_r a_r\right\} \qquad (6)\end{aligned}$$

$$m,r=2,4,6\cdots\cdots$$

と書くことが出来る。
同様に奇関数 y_2 に対しては

$$\frac{d^2y_2}{dx^2}=\frac{ql^2}{EI}\sum_n b_n n^2\pi^2\left\{-(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(4\frac{x^3}{l^3}-3\frac{x}{l}\right)-\sin\frac{n\pi}{l}x\right\}$$

従って

$$\frac{d^3y_2}{dx^3}=\frac{ql}{EI}\sum_n b_n n^2\pi^2\left\{-3(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(4\frac{x^2}{l^2}-1\right)-n\pi\cos\frac{n\pi}{l}x\right\}$$

とおけば条件(4)(5)が満足されるから

$$y_2=\frac{ql^4}{EI}\sum_n b_n\left\{-(-1)^{\frac{n-1}{2}}n^2\pi^2\left(\frac{x^5}{5l^5}-\frac{x^3}{2l^3}+\frac{5x}{16l}+c_1\frac{x}{l}\right)+\sin\frac{n\pi}{l}x\right\}$$

$$=\frac{ql^4}{EI}\left\{-\left(\frac{x^5}{5l^5}-\frac{x^3}{2l^3}+\frac{5x}{16l}+c_1\frac{x}{l}\right)\sum_i(-1)^{\frac{i-1}{2}}i^2\pi^2b_i+\sum_n b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right\} \tag{7}$$

$$n,\ i=1,3,5\cdots\cdots$$

を得る。
　係数 a_m, b_n を決定する為に

　$y=y_1+y_2$ を(1)に代入して両辺を $\frac{q}{EI}$ で割れば,

$$\sum_m m^4\pi^4a_m\cos\frac{m\pi}{l}x+\sum_n n^4\pi^4b_n\sin\frac{n\pi}{l}x-\frac{24}{l}x\sum_i(-1)^{\frac{i-1}{2}}i^2\pi^2b_i$$

$$+\frac{Kl^4}{EI}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{l^2}-\frac{1}{12}\right)\sum_r(-1)^{\frac{r}{2}}r^2\pi^2a_r+\sum_m a_m\cos\frac{m\pi}{l}x+c_0\sum_r a_r\right.$$

$$\left.-\left(\frac{x^5}{5l^5}-\frac{x^3}{2l^3}+\frac{5x}{16l}+c_1\frac{x}{l}\right)\sum_i(-1)^{\frac{i-1}{2}}i^2\pi^2b_i+\sum_n b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right\}=f(x)$$

しかるに

$$\frac{x^2}{y^2}-\frac{1}{12}=4\sum_m\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{m^2\pi^2}\cos\frac{m\pi}{l}x \qquad (m=2,4,6\cdots\cdots)$$

$$\frac{x}{l}=4\sum_n\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\frac{x^5}{5l^5}-\frac{x^3}{2l^3}+\frac{5x}{16l}=96\sum_n\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^6\pi^6}\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (n=1,3,5\cdots\cdots)$$

また

$$f(x)=\frac{R_0}{2}+\sum_m R_m^{(1)}\cos\frac{m\pi}{l}x+\sum_n R_n^{(2)}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$(m=2,4,6\cdots\cdots)(n=1,3,5\cdots\cdots)$$

但し,

$$R_0=\frac{2}{l}\int_{-l/2}^{l/2}f(x)dx,\quad R_m^{(1)}=\frac{2}{l}\int_{-l/2}^{l/2}f(x)\cos\frac{m\pi}{l}xdx,$$

$$R_n^{(2)}=\frac{2}{l}\int_{-l/2}^{l/2}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

これらの関係を前式に代入すれば,

$$\sum_m\left[a_m\left(m^4\pi^4+\frac{Kl^4}{EI}\right)+\frac{2Kl^4}{EI}\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{m^2\pi^2}\sum_r(-1)^{\frac{r}{2}}r^2\pi^2a_r\right]\cos\frac{m\pi}{l}x\quad+\frac{Kl^4}{EI}c_0\sum_r a_r$$

$$+\sum_n\left[b_n\left(n^4\pi^4+\frac{Kl^4}{EI}\right)-\left\{\frac{96(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi^2}+\frac{Kl^4}{EI}\quad\times\left(\frac{96(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^6\pi^6}+\frac{4c_1(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi^2}\right)\right\}\right.$$

$$\left.\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}}i^2\pi^2b_i\right]\sin\frac{m\pi}{l}x=\frac{R_0}{2}+\sum R_m^{(1)}\cos\frac{m\pi}{l}x+\sum R_n^{(2)}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

上式両辺を π^4 で除して定数項および余弦級数の項を比較すれば

$$\left.\begin{aligned}
&c_0\sum_r a_r = \frac{R_0}{2\pi^4\lambda^4}\\
&a_m = \frac{1}{\rho_m}\left(\frac{R_m^{(1)}}{\pi^4} - \frac{2\lambda^4(-1)^{\frac{m}{2}}}{m^2\pi^2}\sum_r(-1)^{\frac{r}{2}} r^2\pi^2 a_r\right)\\
&\qquad\qquad m,\ r = 2,\ 4,\ 6\cdots\cdots\\
&\text{但し}\\
&\rho_m = m^4+\lambda^4,\quad \lambda^4 = \frac{Kl^4}{EI\pi^4}
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

同様に正弦級数の項を比較すれば

$$b_n = \frac{1}{\rho_n}\left\{\frac{R_n^{(2)}}{\pi^4} + \frac{96(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^6\pi^6}\left(1+\frac{\lambda^4}{n^4}+\frac{c_1\pi^4\lambda^4}{24}\right)\sum_i(-1)^{\frac{i-1}{2}} i^2\pi^2 b_i\right\}$$

しかるに

$$1+\frac{\lambda^4}{n^4} = \frac{\rho_n}{n^4}$$

故に

$$\left.\begin{aligned}
&b_n = \frac{R_n^{(2)}}{\pi^4\rho_n} + \frac{4(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi^2}\left(\frac{24}{n^4\pi^4}+\frac{c_1\lambda^4}{\rho_n}\right)\sum_i(-1)^{\frac{i-1}{2}} i^2\pi^2 b_i\\
&\qquad\qquad n,\ i = 1,\ 3,\ 5\cdots\cdots\\
&\text{但し}\\
&\rho_n = n^4+\lambda^4
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

(8)の両辺に $(-1)^{\frac{m}{2}} m^2\pi^2$ を乗じ m を r と見なして $\sum_r$ を求めると

$$\left(1+\frac{2\lambda 4}{\pi^2}\sum_r\frac{1}{\rho_r}\right)\sum_r(-1)^{\frac{r}{2}} r^2\pi^2 a_r = \frac{1}{\pi^2}\sum_r\frac{(-1)^{\frac{r}{2}} r^2 R_r^{(1)}}{\rho_r}$$

しかるに

$$1+\frac{2\lambda^4}{\pi^2}\sum_r\frac{1}{\rho_r} = 1+\frac{\pi\lambda}{2\sqrt{2}}\left(S_0^{(0)}-\frac{2\sqrt{2}}{\pi\lambda}\right) = \frac{\pi\lambda}{2\sqrt{2}}S_0^{(0)}$$

故に

$$\frac{\pi\lambda}{2\sqrt{2}}S_0^{(0)}\sum_r(-1)^{\frac{r}{2}} r^2\pi^2 a_r = \frac{1}{\pi^2}\sum_r\frac{r^2R_r^{(1)}}{\rho_r}$$

同様に(9)より,

$$\left\{1-4\sum_i\left(\frac{24}{i^4\pi^4}+\frac{c_1\lambda^4}{\rho_i}\right)\right\}\sum_i(-1)^{\frac{i-1}{2}} i^2\pi^2 b_i = \frac{1}{\pi^2}\sum_i\frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}} i^2R_i^{(2)}}{\rho_i}$$

上式中

$$\sum_i\frac{96}{i^4\pi^4} = 1 \qquad 4\lambda^4\sum_i\frac{1}{\rho_i} = \frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}U_0^{(0)}$$

故に

$$-\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}U_0^{(0)}\,c_1\sum_i(-1)^{\frac{i-1}{2}} i^2\pi^2 b_i = \frac{1}{\pi^2}\sum_i\frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}} i^2R_i^{(2)}}{\rho_i}$$

よって次の結果を得る。

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_r(-1)^{\frac{r}{2}}r^2\pi^2a_r=\frac{2\sqrt{2}}{\pi^3\lambda S_0^{(0)}}\sum_r\frac{(-1)^{\frac{r}{2}}r^2R_r^{(1)}}{\rho_r}\\
&c_1\sum_i(-1)^{\frac{i-1}{2}}i^2\pi^2b_i=-\frac{\sqrt{2}}{\pi^3\lambda U_0^{(0)}}\sum_i\frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}i^2R_i^{(2)}}{\rho_i}\\
&\text{但し,}\\
&S_0^{(0)}=\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\pm\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\\
&U_0^{(0)}=\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\mp\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

又，式(8)より

$$\sum_m a_m\cos\frac{m\pi}{l}x=\sum_m\frac{1}{\rho_m}\left(\frac{R_m^{(1)}}{\pi^4}-\frac{2\lambda^4(-1)^{\frac{m}{2}}}{m^2\pi^2}\sum_r(-1)^{\frac{r}{2}}r^2\pi^2a_r\right)\cos\frac{m\pi}{l}x$$

上式中

$$\frac{2\lambda^4}{\pi^2}\sum_m\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{m^2\rho_m}\cos\frac{m\pi}{l}x=-\frac{2\lambda^4}{\pi^2}\sum_m\frac{1}{m^2\rho_m}\cos m\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{l}\right)\qquad m=2,4,6\cdots\cdots$$

$$=\frac{2\lambda^4}{\pi^2}\frac{\pi}{4\sqrt{2}\lambda^5}\left\{S_{\frac{1}{2}+\xi}+\sqrt{2}\,\pi\lambda\left(\frac{x^2}{l^2}-\frac{1}{12}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}\pi\lambda}S^{(-2)}_{\frac{1}{2}+\xi}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{l^2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{但し}\left(-\frac{1}{2}\leqq\frac{x}{l}=\xi\leqq\frac{1}{2}\right)$$

故に，

$$\sum_m a_m\cos\frac{m\pi}{l}x=\frac{1}{\pi^4}\sum_m\frac{R^{(1)}{}_m}{\rho_m}\cos\frac{m\pi}{l}x-\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}\pi\lambda}S^{(-2)}_{\frac{1}{2}+\xi}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{l^2}-\frac{1}{12}\right)\right\}\sum_r(-1)^{\frac{r}{2}}r^2\pi^2a_r$$

上式と(8)及び(9)の各第1式に示す $c_1\sum_r a_r$ と $\sum_r(-1)^{\frac{r}{2}}r^2\pi^2a_r$ との値を(6)に代入すれば

$$\left.\begin{aligned}
&y_1=\frac{q}{K}\left\{\lambda^4\sum_m\frac{R_m^{(1)}}{\rho_m}\cos\frac{m\pi}{l}x-\frac{\lambda^2\sum_r\frac{(-1)^{r/2}r^2R_r^{(1)}}{\rho_r}}{S_0^{(0)}}S^{(-2)}_{\frac{1}{2}+\xi}+\frac{R_0}{2}\right\}\\
&\text{但し}\\
&S^{(-2)}_{\frac{1}{2}+\xi}=S^{(2)}_{\frac{1}{2}+\xi}=\frac{1}{D}\left\{\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\xi\right)-\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\xi\right)\right.\\
&\qquad\left.-\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\xi\right)+\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\xi\right)\right\}\\
&D=\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}-\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}
\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

また，(9)より

$$\sum_n b_n\sin\frac{m\pi}{l}x=\sum_n\left\{\frac{R_n^{(-2)}}{\pi^4\rho_n}+\frac{4(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2\pi^2}\left(\frac{24}{n^4\pi^4}+\frac{c_1\lambda^4}{\rho_n}\sum_i(-1)^{\frac{i-1}{2}}\times i^2n^2b_i\right\}\sin\frac{m\pi}{l}x\right.$$

$$=\frac{1}{\pi^4}\sum_n\frac{R_n^{(2)}}{\rho_n}\sin\frac{n\pi}{l}x+\left(\frac{x^5}{5l^5}-\frac{x^3}{2l^3}+\frac{5x}{16l}+c_1\frac{x}{l}-\frac{1}{2\sqrt{2}\pi\lambda}U^{(-2)}_{\frac{1}{2}+\xi}\right)\times\sum_i(-1)^{\frac{i-1}{2}}i^2\pi^2b_i$$

上式と(7)及び(10)より次の結果を得る。

$$y_2 = \frac{q}{K}\left(\lambda^4 \sum_n \frac{R_n^{(2)}}{\rho_n} \sin\frac{n\pi}{l} x + \frac{\lambda^2 \sum_i \frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}} i^2 R_i^{(2)}}{\rho_i}}{U_0^{(0)}} U^{(-2)}_{\frac{1}{2}+\xi} \right) \qquad n,\ i = 1,\ 3,\ 5\cdots\cdots$$

但し

$$U^{(-2)}_{\frac{1}{2}+\xi} = U^{(2)}_{\frac{1}{2}+\xi} = \frac{1}{D'}\left\{\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\xi\right) + \cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\xi\right) - \sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\xi\right) - \sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\xi\right)\right\}$$

$$D' = \cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}} + \cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}} \qquad (12)$$

荷重係数 f(x) が与えられると，R_0，$R_m^{(1)}$，$R_m^{(2)}$ も分かる為 $y = y_1 + y_2$ は決定される。

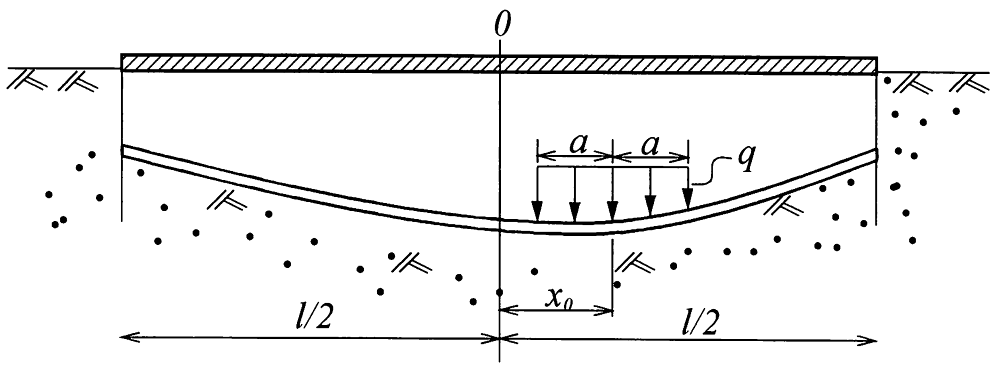
[2－3　両端自由な梁で部分的分布荷重を受ける場合の解]

図－4 に示す様な部分的分布荷重に対しては，

$$R_0 = \frac{4q}{l}$$

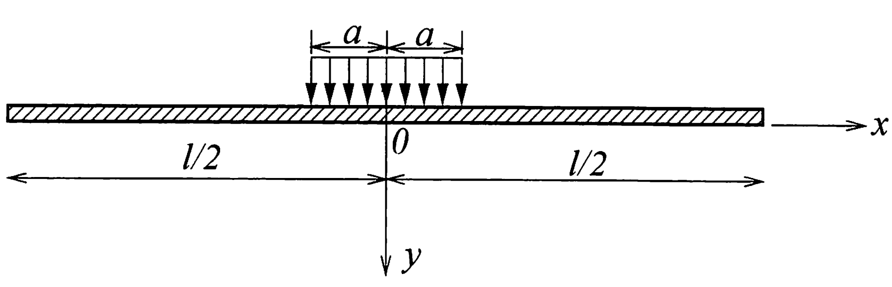
$$R_m^{(1)} = \frac{4}{m\pi} \cos\frac{m\pi}{l} x_0 \sin\frac{m\pi}{l} a \qquad (m = 2,\ 4,\ 6\cdots\cdots)$$

$$R_r^{(2)} = \frac{4}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{l} x_0 \sin\frac{n\pi}{l} a \qquad (n = 1,\ 3,\ 5\cdots\cdots) \qquad (13)$$



図－4

図－5 に示す様に



図－5

$x_0 = 0$ 即ち原点 0 を通る鉛直線に関して対称的に分布された荷重に対しては，

$R_n^{(2)} = 0$　　従って　$y_1 = 0$

また

$$R_m^{(1)} = \frac{4}{m\pi}\sin\frac{m\pi}{l}x$$

より

$$\lambda^2\sum_r \frac{(-1)^{\frac{r}{2}}\ r^2R_r^{(1)}}{\rho_r} = \frac{4\lambda^2}{\pi}\sum_r \frac{(-1)^{\frac{r}{2}}r}{\rho_r}\sin\frac{r\pi}{l}a \qquad (r = 2,\ 4,\ 6\cdots\cdots)$$

$$= \frac{4\lambda^2}{\pi}\sum_r \frac{r}{\rho_r}\sin n\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{l}\right) = S^{(1)}_{\frac{1}{2}+\alpha} \quad \left(\alpha = \frac{a}{l}\right)$$

$$\lambda^4\sum_m \frac{R_m^{(1)}}{\rho_m}\cos\frac{m\pi}{l}x = \frac{4\lambda^4}{\pi}\sum_m \frac{1}{m\rho_m}\sin m\pi\alpha\cdot\sin m\pi\xi$$

$$= \frac{2\lambda^4}{\pi}\sum_m \frac{1}{m\rho_m}\{\sin m\pi(\alpha+\xi)+\sin m\pi(\alpha-\xi)\} \qquad (m = 2,\ 4,\ 6\cdots\cdots)$$

よって

$$\lambda^4\sum_m \frac{R_m^{(1)}}{\rho_m}\cos\frac{m\pi}{l}x = 1 - 2\alpha - \frac{1}{2}\left(S^{(-1)}_{\alpha+\xi} + S^{(-1)}_{\alpha-\xi}\right),\ \xi \leq \alpha$$

$$= -2\alpha - \frac{1}{2}\left(S^{(-1)}_{\alpha+\xi} - S^{(-1)}_{\xi+\alpha}\right),\ \xi \geq \alpha$$

また　$\frac{R_0}{2} = 2\alpha$

これ等の結果を(11)に代入すれば

$$\left.\begin{aligned}
y = y_1 &= \frac{q}{K}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(S^{(-1)}_{\alpha+\xi} + S^{(-1)}_{\alpha-\xi}\right) - \frac{S^{(1)}_{\frac{1}{2}+\alpha}}{S^{(0)}_0}\cdot S^{(-2)}_{\frac{1}{2}+\xi}\right\},\ \xi \leq \alpha \\
&= \frac{q}{K}\left\{-\frac{1}{2}\left(S^{(-1)}_{\alpha+\xi} - S^{(-1)}_{\xi-\alpha}\right) - \frac{S^{(1)}_{\frac{1}{2}+\alpha}}{S^{(0)}_0}\cdot S^{(-2)}_{\frac{1}{2}+\xi}\right\},\ \xi \geq \alpha \\
\text{但し,}\quad & \\
\frac{S^{(-1)}_{\frac{1}{2}+\alpha}}{S^{(0)}_0} &= \frac{\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\alpha\right) - \sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}{\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}} + \sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}} \\
S^{(-1)}_{\alpha+\xi} &= \frac{\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(1-\alpha-\xi\right)\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\alpha+\xi\right) - \cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(1-\alpha-\xi\right)\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\alpha+\xi\right)}{\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}} - \cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}}
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

$S^{(-1)}_{\alpha-\xi}$ 及び $S^{(-1)}_{\xi-\alpha}$ は $S^{(-1)}_{\alpha+\xi}$ の $\alpha+\xi$ の代りに各々 $\alpha-\xi$ 及び $\xi-\alpha$ とおいたもので $S^{(-2)}_{\frac{1}{2}+\xi}$ は(11)に示す通りである。

ここで，特に $\alpha = 1/2$，即ち荷重が全径間に一様に分布された場合は

$$S^{(1)}_{\frac{1}{2}+\alpha} = S^{(1)}_1 = 0$$

$$S^{(-1)}_{\alpha+\xi} + S^{(-1)}_{\alpha-\xi} = S^{(-1)}_{\frac{1}{2}+\xi} + S^{(-1)}_{\frac{1}{2}+\xi} = 0$$

従って(14)の第1式より $\xi \geq \alpha$ なる ξ の全ての値に対して

$$y = \frac{q}{K} = \text{const.}$$

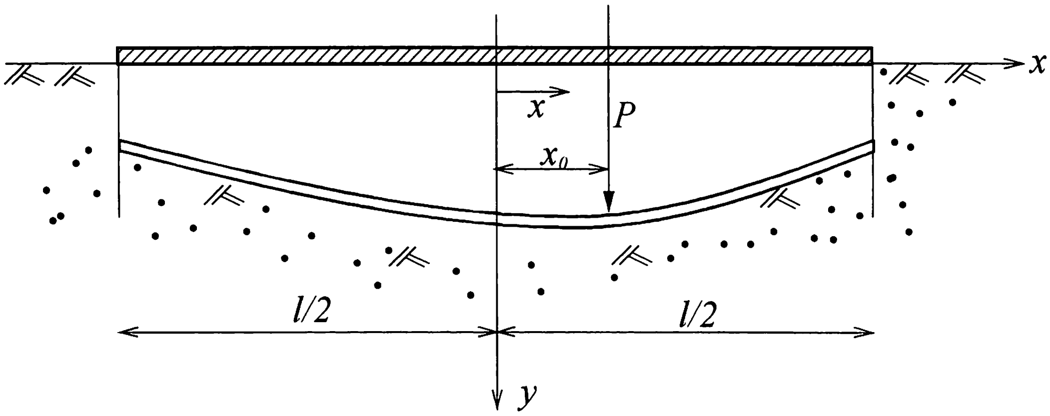
第2式に於ては $\alpha = 1/2$ であれば $\xi = 1/2$ となるから

$$(y)_{\xi=1/2} = \frac{q}{K}$$

を得る。よって分布荷重が全径間に載る梁は全体として一様に沈下することになり，曲りを生じないことが判る。

[2－4　両端自由な梁で1点集中荷重を受ける場合の解]

これは図－6に示す場合であり，



図－6

この場合に対しては

$$R_0=\frac{4a}{l}\cdot\frac{P}{2aq}=\frac{2P}{ql}$$

$$R_m^{(1)}=\lim_{a\to 0}\frac{P}{2qa}\frac{4}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{l}x_0\sin\frac{m\pi}{l}a=\frac{2P}{ql}\cos\frac{m\pi}{l}x_0$$

$$R_m^{(2)}=\frac{2P}{ql}\sin\frac{m\pi}{l}x_0$$

$$\lambda^2\sum_r\frac{(-1)^{\frac{r}{2}}r^2R_r^{(1)}}{\rho_r}=\frac{2P\lambda^2}{2ql}\sum_r\frac{(-1)^{\frac{r}{2}}r^2}{\rho_r}\cos\frac{r\pi}{l}x_0$$

$$=-\frac{\pi\lambda P}{2\sqrt{2}ql}S^{(2)}_{\frac{1}{2}+\xi_0}\qquad\left(-\frac{1}{2}\leqq\xi_0\leqq\frac{1}{2}\right)$$

$$\lambda^4\sum_m\frac{R_m^{(1)}}{\rho_m}\cos\frac{m\pi}{l}x=\frac{2P\lambda^2}{ql}\sum_m\frac{1}{\rho_m}\cos\frac{m\pi}{l}x_0\cdot\cos\frac{m\pi}{l}x$$

$$=\frac{P\lambda^4}{ql}\sum_m\frac{1}{\rho_m}\left\{\cos m\pi(\xi_0+\xi)+\cos m\pi(\xi_0-\xi)\right\}$$

$$=\frac{P}{ql}\left\{\frac{\pi\lambda}{4\sqrt{2}}(S^{(0)}_{\xi_0+\xi}+S^{(0)}_{\xi_0-\xi})-1\right\}\qquad(-\xi_0\leqq\xi\leqq\xi_0)$$

よって次の⒂を得る。

$$y_1=\frac{P\pi\lambda}{2\sqrt{2}Kl}\left\{\frac{1}{2}(S^{(0)}_{\xi_0+\xi}+S^{(0)}_{\xi_0-\xi})+\frac{S^{(2)}_{\frac{1}{2}+\xi_0}}{S^{(0)}_0}\cdot S^{(-2)}_{\frac{1}{2}+\xi}\right\}\qquad(-\xi_0\leqq\xi\leqq\xi_0)$$

但し

$$\frac{S^{(2)}_{\frac{1}{2}+\xi_0}}{S^{(0)}_0}=\frac{\left\{\begin{array}{l}\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\xi_0\right)\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\xi_0\right)-\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\xi_0\right)\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\xi_0\right)\\-\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\xi_0\right)\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\xi_0\right)+\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\xi_0\right)\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\xi_0\right)\end{array}\right\}}{\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}+\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}}$$

$$S^{(0)}_{\xi_0+\xi}=\frac{\left\{\begin{array}{l}\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}(1-\xi_0-\xi)\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}(\xi_0+\xi)+\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}(1-\xi_0-\xi)\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}(\xi_0+\xi)\\+\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}(1-\xi_0-\xi)\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}(\xi_0+\xi)+\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}(1-\xi_0-\xi)\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}(\xi_0+\xi)\end{array}\right\}}{\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}-\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}}$$

⒂

$S^{(0)}_{\xi_0-\xi}$ は上式に示す $S^{(0)}_{\xi_0+\xi}$ において $\xi_0+\xi$ の代りに $\xi_0-\xi$ とおいたものである。

同様に $R^{(2)}_m$ に対しては

$$\lambda^2\sum_i \frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}} i^2 R^{(2)}_i}{\rho_i} = \frac{2P\lambda^2}{ql}\sum_i \frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}\cdot i^2}{\rho_i}\sin\frac{i\pi}{l}x_0$$

$$= \frac{P\pi\lambda}{2\sqrt{2}ql}U^{(2)}_{\frac{1}{2}+\xi_0} \qquad \left(-\frac{1}{2}\leq\xi_0\leq\frac{1}{2}\right)$$

$$\lambda^4\sum_n \frac{R^{(2)}_n}{\rho_n}\sin\frac{n\pi}{l}x = \frac{P\lambda^4}{ql}\sum_n \frac{1}{\rho_n}\{\cos n\pi(\xi_0-\xi)-\cos n\pi(\xi_0-\xi)\}$$

$$= \frac{P\pi\lambda}{2\sqrt{2}ql}(U^{(0)}_{\xi_0-\xi}-U^{(0)}_{\xi_0+\xi}) \qquad (-\xi_0\leq\xi\leq\xi_0)$$

これ等の関係を(12)に代入すると次の式を得る。

$$\left.\begin{aligned}
&y_2 = \frac{P\pi\lambda}{2\sqrt{2}Kl}\left(U^{(0)}_{\xi_0-\xi}-U^{(0)}_{\xi_0+\xi}+\frac{U^{(2)}_{\frac{1}{2}+\xi_0}}{U^{(0)}_0}\cdot U^{(-2)}_{\frac{1}{2}+\xi}\right) \qquad (-\xi_0\leq\xi\leq\xi_0)\\
&\text{但し}\\
&U^{(0)}_{\xi_0+\xi} = \frac{\left\{\begin{aligned}&\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}(1-\xi_0-\xi)\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}(\xi_0+\xi)-\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{\pi}}(1-\xi_0-\xi)\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}(\xi_0+\xi)\\&+\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}(1-\xi_0-\xi)\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}(\xi_0+\xi)-\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}(1-\xi_0-\xi)\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}(\xi_0+\xi)\end{aligned}\right\}}{\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}+\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}}\\
&\frac{U^{(2)}_{\frac{1}{2}+\xi_0}}{U^{(0)}_0} = \frac{\left\{\begin{aligned}&\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\xi_0\right)\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\xi_0\right)+\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\xi_0\right)\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\xi_0\right)\\&-\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\xi_0\right)\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\xi_0\right)-\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\xi_0\right)\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\xi_0\right)\end{aligned}\right\}}{\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}-\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}}
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

$U^{(0)}_{\xi_0-\xi}$ は $U^{(0)}_{\xi_0+\xi}$ において $\xi_0+\xi$ の代りに $\xi_0-\xi$ とおいたものである。

次に区間 $\frac{1}{2}\leq\xi\leq\xi_0$ に対しては,

$$\left.\begin{aligned}
&y_1 = \frac{P\pi\lambda}{2\sqrt{2}Kl}\left\{\frac{1}{2}(S^{(0)}_{\xi_0+\xi}+S^{(0)}_{\xi_0-\xi})+\frac{S^{(2)}_{\frac{1}{2}+\xi_0}}{S^{(0)}_0}\cdot S^{(-2)}_{\frac{1}{2}+\xi}\right\}\\
&y_2 = \frac{P\pi\lambda}{2\sqrt{2}Kl}\left(U^{(0)}_{\xi-\xi_0}-U^{(0)}_{\xi_0+\xi}+\frac{U^{(2)}_{\frac{1}{2}+\xi_0}}{U^{(0)}_0}\cdot U^{(-2)}_{\frac{1}{2}+\xi}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

上式中 $\xi_0=0$ とすると

$$\left.\begin{aligned}
&y_2 = 0\\
&y = y_1 = \frac{P\pi\lambda}{2\sqrt{2}Kl}\left(S^{(0)}_{\xi}+\frac{S^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{S^{(0)}_0}\cdot S^{(-2)}_{\frac{1}{2}+\xi}\right)\\
&\text{但し,}\\
&\frac{S^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{S^{(0)}_0} = \frac{\cosh\frac{\pi\lambda}{2\sqrt{2}}\cdot\sin\frac{\pi\lambda}{2\sqrt{2}}-\cos\frac{\pi\lambda}{2\sqrt{2}}\sinh\frac{\pi\lambda}{2\sqrt{2}}}{\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}+\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}}\\
&S^{(0)}_{\xi} = \frac{\left\{\begin{aligned}&\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}(1-\xi)\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi+\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}(1-\xi)\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi\\&+\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}(1-\xi)\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi+\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}(1-\xi)\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi\end{aligned}\right\}}{\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}-\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}}
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

上式より $l=\infty$ に対する y の式を次のように誘導することができる。即ち計算の結果

$$S_\xi^{(0)} = \cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi \sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi - \sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi \cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi$$
$$+\frac{1}{\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}-\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}}\left\{\left(\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}+\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\right)\cdot\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi\right.$$
$$\left.-\left(\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}-\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi\cdot\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi\right\}$$

$$S_{\frac{1}{2}+\xi}^{(-2)} = \frac{2}{\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}-\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}}\left\{\left(\cosh\frac{\pi\lambda}{2\sqrt{2}}\sin\frac{\pi\lambda}{2\sqrt{2}}-\sinh\frac{\pi\lambda}{2\sqrt{2}}\cos\frac{\pi\lambda}{2\sqrt{2}}\right)\right.$$
$$\left.\times\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi-\left(\cosh\frac{\pi\lambda}{2\sqrt{2}}\sin\frac{\pi\lambda}{2\sqrt{2}}+\sinh\frac{\pi\lambda}{2\sqrt{2}}\cos\frac{\pi\lambda}{2\sqrt{2}}\right)\times\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi\right\}$$

$$S_\xi^{(0)} = \frac{S_{\frac{1}{2}}^{(-2)}}{S_0^{(0)}}\cdot S_{\frac{1}{2}+\xi}^{(-2)} = \cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi\cdot\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi-\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi\cdot\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi$$
$$+\left\{\frac{\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}-\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}-\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}-\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}}{\left(\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}-\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\right)\left(\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}-\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\right)}+\frac{\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}-\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}}{\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}-\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}}\right\}$$
$$\times\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi$$
$$+\left\{\frac{1-\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}}{\left(\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}-\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\right)\left(\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}+\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\right)}-\frac{\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}-\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}}{\cosh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}-\cos\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}}\right\}$$
$$\times\sinh\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi\cdot\sin\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}\xi$$

$\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}}=4\sqrt{\frac{Kl}{4EI}}=\delta l$ とおけば，上式中，ξ に関する各関数は l を含まないから

$$\lim_{l\to\infty}\left(S_\xi^{(0)}+\frac{S_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{S_0^{(0)}}S_{\frac{1}{2}+\xi}^{(-2)}\right) = \cosh\delta x\cdot\sin\delta x-\sinh\delta x\cdot\cos\delta x$$
$$+\{0+1\}\cosh\delta x\cos\delta x+\{0-1\}\sinh\delta x\sin\delta x$$
$$=(\cosh\delta x-\sin\delta x)(\sin\delta x+\cos\delta x)$$

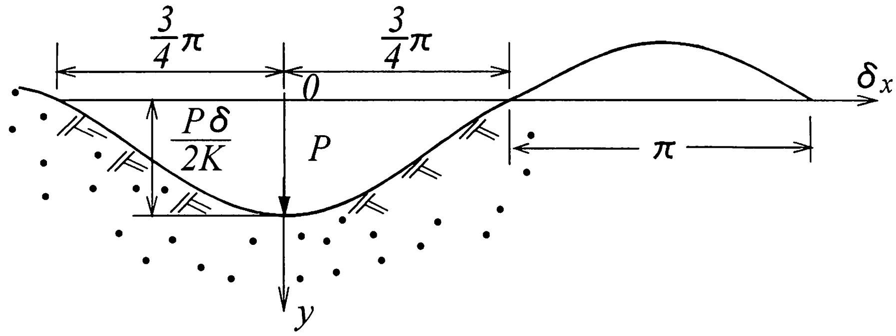
よって次の解式を得る。

$$\left.\begin{aligned} &y=\frac{P}{8EI\delta}e^{-\delta x}(\sin\delta x+\cos\delta x),\ x\geq 0\\ &\text{但し，}\\ &\delta=4\sqrt{\frac{K}{4EI}}=\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2}l}\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

上式のよって表わされる y は図－7に示す様に，減衰波形を成す。

$$\sin\delta x+\cos\delta x = \sin\delta x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta x\right)$$
$$=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\delta x-\frac{\pi}{4}\right)$$

故に $y=0$ に対する x の値を x_n で表わせば，



図－7

$$\delta x_n - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}(2n-1)$$

$$\delta x_n = \frac{\pi}{4}((4n-1) \qquad n = 1, 2, 3 \cdots\cdots$$

即ち δx_n の最小値は$\frac{3\pi}{4}$となる。

区間$\frac{3\pi}{4} \leq \delta x \leq \frac{7\pi}{4}$における y は負となるからこの部分の弾性床の反力も負（下向き）となる。

参考文献

1）I. N. SNEDDON, Fourier Transforms, McGraw-Hill Book Company, INC., 1951.

2）大槻喬，平岡寛二監訳，工学のための応用フーリエ積分，オーム社，1977.

3）S. P. Timoshenko and J. M. Goodier, Theory of Elasticity, McGRAW-HiLL Book Company, INC., 1970.

（平成10年11月30日受理）