カオスダイナミクスを用いた大域的最適化手法

三　上　　　剛*

An Optimization Technique by Chaotic Dynamics

Tsuyoshi MIKAMI

Abstract

This paper proposed the new optimization technique by chaotic dynamics. In recent years, there have been proposed many optimization techniques by using probabilistic search dynamics, such as Genetic Algorithms, Simulated Annealing and so on. However, these methods are not always sufficient as an optimization technique because their behaviors are stable at the local optimum. In order to settle such problems, I focused on a chaotic behavior and the function enhancing by Monte Carlo Method. The chaotic behavior has a property of escaping from the local optimum and the function enhancing indicates an optimal region in advance. So, I construct the hybrid method for global optimization, which is searching a solution by chaotic dynamics and converging into global optimum specified by the function enhancing.

1．はじめに

移動ロボットの最適経路探索，障害物回避などの経路プランニングは，一般に，指数関数的な探索空間の爆発を生む最適化問題であり，局所解へトラップされることから大域的最適化が困難とされている。このような問題において，大域的最適解，または工学的に意味のある準最適解を確実にかつ高速に発見することが必要不可欠となる。しかし現実には，工学的に無意味な局所解も多数含んでいるため，決定論的な探索手法では，このような意味をなさない局所解への収束を避けることができず，また，SA などの確率的な手法では，局所解への収束をさけるためには非現実的な長時間が必要とされている。以上の点を改善する手法として，近年，カオス的最適化法が注目されている[6]，[7]，[8]，[9]。本論では，多峰性関数の最適化問題に対して，大域的最適解を高速で獲得する手法を提案する。また一方で，カオス的最適化法は，適切な探索パラメータを設定することが困難であり，他の最適化手法と比べて実用性の点で大きく立ち後れている原因となっている。本論では，GA を用いた探索パラメータの自動調整法を提案し，その特性について検証する。

*　助　手　情報工学科

2．関数の整形

最適化問題における解の大域的最適性は，全探索領域における他の解と比較することによって初めて判断できる。つまり，必然的に大域的な探索を行う必要があり，探索の初期においては，最適解を発見しても，その保証が得られない。

このような保証を得るために従来手法では，長時間かけて全域探索を行っていた。この点を改善するために本稿では，評価関数を指数関数的に釣り上げる手法について着目し[1]，局所解と最適解を明確に差別化することを考える。その結果，最適解の存在領域ではピーク値をとり，それ以外の領域ではほぼ０に近い値を取るようになる（図１，２参照)。

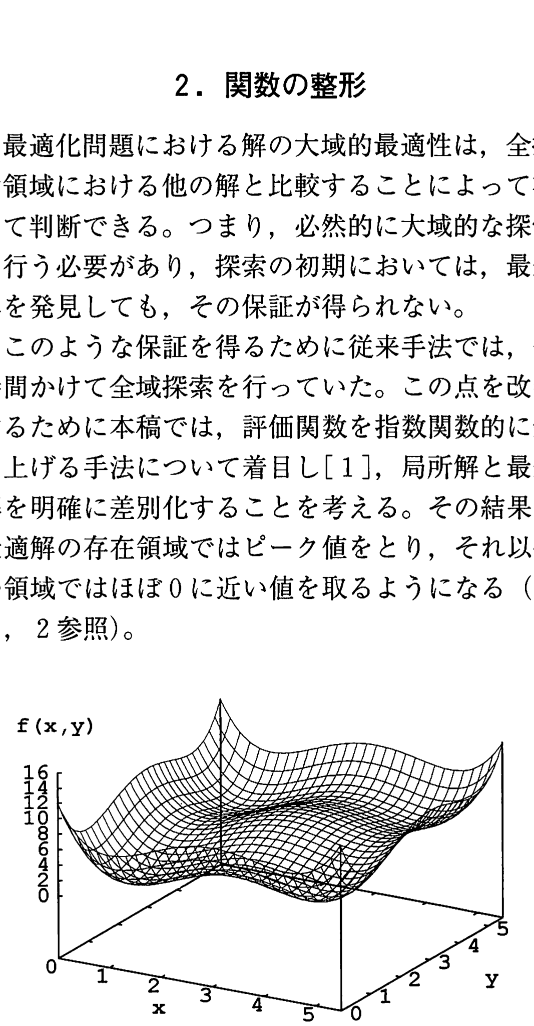

図１．整形前の評価関数（(５)式)

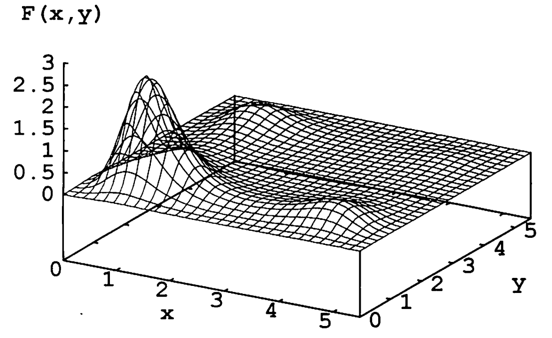

図2．整形後の評価関数（$\gamma=0.2$, $e_0=2.0$）

このように解の最適性を明示的に指標化すると，最適解の存在領域を特定できるため，探索ダイナミクスをこの領域内で安定化させることにより，従来のような長時間探索を行う必要がなくなる。関数の整形は，以下の式を用いる[13]。

$$E(\boldsymbol{x})=\frac{e^{\gamma(e(\boldsymbol{x})-e_0)}}{\int_U e^{\gamma(e(\boldsymbol{x})-e_0)}d\boldsymbol{x}} \tag{1}$$

ここで $e(x)$ は評価関数であり，$E(x)$ は，最適解近傍でピーク値をとる関数である。これにより，探索の初期において解を発見したとしても，大域的最適性としての評価値が高ければ，それを工学的に意味のある最適解として直ちに保証することが出来る。なお，分母の積分計算はモンテカルロ法を用いて，探索の初期段階において計算する。そのため，ある程度は全域探索によって評価値のサンプリングを行わなければならない。しかし，この積分値は局所解と最適解との差を増大させた時，その相対的な大小関係を計算機の有限範囲内で表すために用いるため，厳密な精度を要求されない。したがって，サンプリング数はわずかであっても整形の効果は十分現れる。

3．カオス的最適化とアニーリング計画

カオス的最適化は，カオスの有する確率的な挙動を生かした解の探索手法であり，様々な形態の手法が提案されている。本論では，谷の提案したカオス的最急降下法[6]（Chaotic Steepest Descent Method；CSD Method）を基本とした手法を提案することにした。CSD 法は以下の式で与えられる。

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}+f_0(\dot{\boldsymbol{x}},\omega t)=-\alpha\nabla e(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

CSD 法は，局所解へ漸近収束する安定性と，局所解から脱出して新たに探索を始める不安定性を周期的に発生させることで，従来の決定論的探索法の有するリヤプノフ安定性を部分的に崩し，局所解への吸収を妨げる効果をもつ。カオスの効果は，漸近収束した際，局所解と漸近解との微少な差を増幅させ，その後の振る舞いを確率的な挙動にするところにある。

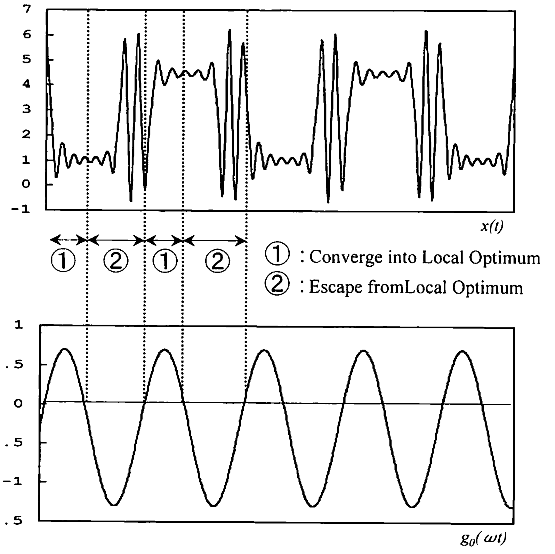

図3．CSD 法の安定，不安定のメカニズム

また，このようなカオス的な挙動を徐々に抑えていき，最終的にある一つの解（大域的最適解）に収束させる手法も提案されている。これは，いわゆる SA におけるアニーリング計画をカオス的挙動に適用したものであるが，この手法では，大域的最適解への収束を実現するために長時間かけて徐々に冷却しなければならない。つまり，結局は解の保証を得るために長時間探索を行う必要がある。本稿では，冷却スケジュールを長時間かけて行うのではなく，最適解近傍で急冷させる手法を実現する。ような冷却を実現するために，整形後の関数値を適用することを試みた。CSD 法における第二項の式を以下のような式として提案する。

$$\begin{aligned}f_0(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},\omega t)=&\{f_1(\omega t)+g(E(\boldsymbol{x}))\}\dot{\boldsymbol{x}}\\&+d_2\dot{\boldsymbol{x}}^2\mathrm{sgn}(\dot{\boldsymbol{x}})\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{cases}g(E(\boldsymbol{x}))=\dfrac{g_0}{1+e^{-E(\boldsymbol{x})+g_0}}\\ g_0=\min|f_1(\omega t)|\end{cases} \tag{4}$$

ここでf_1は周期的な関数であり，この値が正の時は探索ダイナミクスは安定化し局所解へ収束するのに対し，負の値の時は，ダイナミクスは不安定化し，局所解から離れていく。本手法では$f_1(\omega t) = d0\sin \omega t + d_1$をこのような周期関数とする。また，$f_1$に加えて$g(F(x))$の項を付与した。$g(E(x))$は，最適解でピーク値をもつ関数Ｅに安定限界値で閾値をとるシグモイド関数で変換したものである。したがって，最適解近傍において$g(E(x))$の値は常に安定限界値g_0となり，$f_1 + g(E(x)) > 0$が成立するため，最適解近傍における収束ダイナミクスを実現できる。

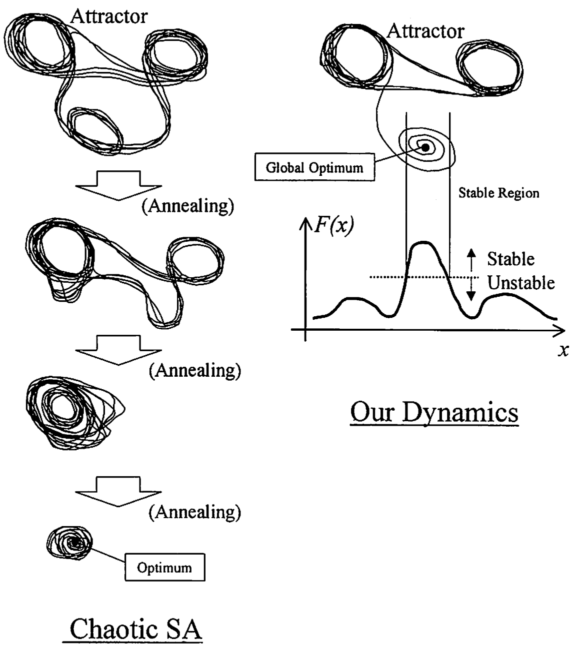

図４．従来のアニーリング手法と本提案手法

４．実験結果

今回用いた評価関数は，以下のような式である。

$$
\begin{aligned}
e(x) &= 0.25(x^4+y^4) - 2.83(x^3+y^3) \\
&+ 10.5(x^2+y^2) - 13.5(x+y) \\
&+ 12.0 \qquad (5)
\end{aligned}
$$

この関数は，二つの局所解を内包する評価関数である。探索パラメータは，$m = 2.0$，$d_0 = 1.0$，$d_1 = -0.3$，$d_2 = 0.2$，$\omega = 0.3$，$\alpha = 1.0$と設定した。図５，６に本手法を用いたときの探索過程の時間変化を示す。(５)式および，整形後の(５)式のランドスケープは，図１，図２のようになる。整形に要するパラメータは，$\gamma = -0.2$，$e_0 = 2.0$である。従来のアニーリング法では，多数の解を何度も遍歴し，局所解への収束を徐々に妨げながら最適解へと収束していく（図４(a)参照）。つまり，冷却する過程において最適解を幾度も訪れることになる。本手法を用いることによって，最適解へ一度でも接近すると直ちに安定化し，収束させることが可能となる（図４(b)参照）。実験の結果，図７，８にその様子が確認できる。

この手法の問題点は，パラメータγ，e_0の適切な設定方法がないことである。理想的には，$\gamma \rightarrow$

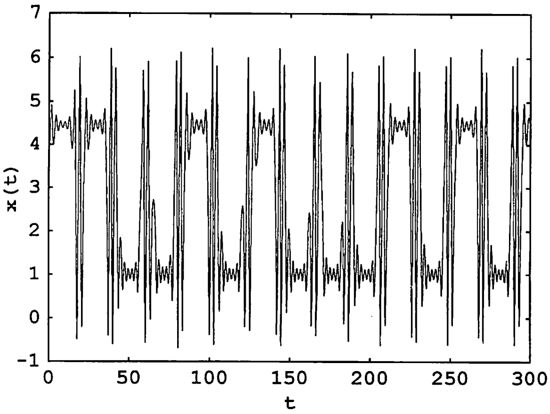

図５．CSD 法を用いた探索の時間経過（x）

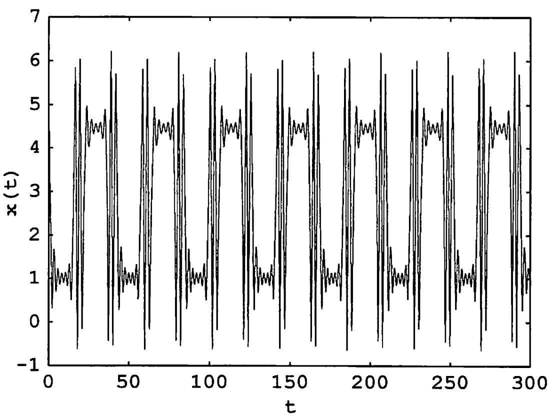

図６．CSD 法を用いた探索の時間経過（y）

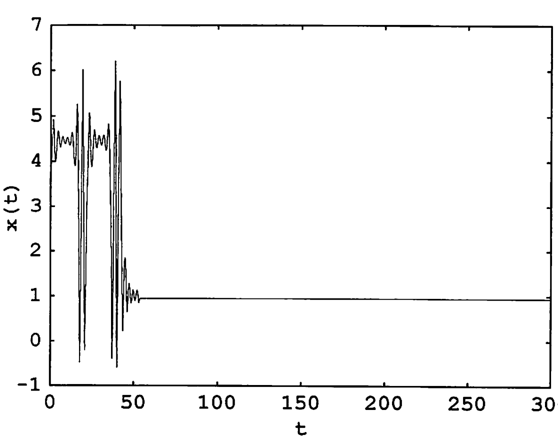

図７．本手法を用いた探索の時間経過（x）

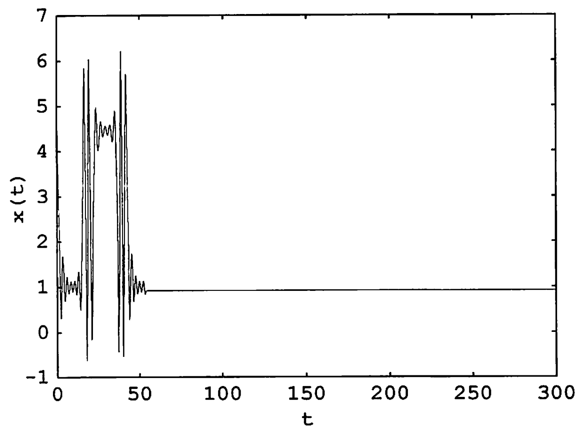

図8．本手法を用いた探索の時間経過（y）

∞とすれば関数整形のみで最適解が求まるが，現実には計算機のオーバーフローが起きてしまうため，有限領域で値を止めなくてはならない。したがって，必然的に大域的最適解のみならず，局所解においてもピークが残るケースも考えられ，局所解で収束してしまう可能性が高い。この問題点については現在検討を進めている。

5．探索パラメータの自動調整

5－1．カオス探索とパラメータ

カオスダイナミクスを用いた探索法は，適切な探索パラメータの設定が困難とされている。それは，カオスを有効に発生させるパラメータの値がsensitiveであることと，調整すべきパラメータの数が多いことに起因する。本研究で用いたCSD法では，パラメータは六つ存在する（m，d_0，d_1，d_2，ω，ϵ）。局所カオスを用いたカオス探索法では，CSD法以外の探索法においても同様の問題が指摘されている。たとえば藤田ら[7]は，最急降下法に間欠性カオスを導入した探索法を提案しているが，パラメータ調整に関してはヒューリスティックな調整法が示されているのみである。このような問題点を改善する決定的な手法は現在のところ報告されておらず，カオス探索法が実用面で大きく立ち後れている理由の一つである。本論では，GAを用いてパラメータ調整の困難性を改善する手法について提案する。

5－2．GAによる自動調整アルゴリズム

GA（Genetic Algorithm）は，生物の進化，自然選択の原理を計算機内における解の候補へ適用することにより，環境に最も適した解（すなわち，設計者にとって最も望ましい解）が生き残るという，確率的な多点探索法である[3]。GAの利点は設計が容易であることと，探索パラメータのsensitivityがカオス探索に比べて低く，ヒューリスティックに基づいて設定されたパラメータであれば，準最適解への収束がほぼ実現可能であることが挙げられる。すなわち，本節で提案する自動調整アルゴリズムは，sensitivityの高いカオス探索パラメータを直接設定するのではなく，GAを介することで，探索パラメータの調整を比較的容易なものにするというものである。

CSD法において，探索ダイナミクスの最も望ましいbehaviorは以下の3点に集約される。

1．解への収束，発散を繰り返す。

2．可能な限り広域探索を実現する。

3．迅速に局所解へ収束可能。

以上の3点を満足させるために，GA探索におけるFitnessを以下のような関数で定義する。

$$F_0^i = \frac{\sum_{t=0}^{T_m-1} |\delta x_t^i|}{1 + |\sum_{t=0}^{T_m-1} \delta x_t^i|}$$

$$\delta x_t^i = x_t^i - x_{t-h}^i \tag{6}$$

T_mはi番目の染色体が評価値を得るのに必要な探索時間であり，hはルンゲクッタ法の刻み幅である。つまり，時間発展に伴ってx_t^iの挙動が大きくなるとF_0^iの値は大きくなり広域探索が実現できる。さらに，差分δx_t^iの総和をとり，その絶対値を分母に与えることで，局所解への収束を実現する。

また，安定性，不安定性を周期的に発生させる必要があるためにF_1^iを追加し，計算機のオーバーフローを防ぐためにF_2^iを追加する。

$$F_1^i = \begin{cases} worst & (d_0 < d_1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{7}$$

$$F_2^i = \begin{cases} worst & (x_t^i > Overflow) \\ worst & (x_t^i < \text{-}Overflow) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{8}$$

ただし，*worst*は十分小さい負の値とし，*Overflow*は計算機が扱うことの出来る最大値とする。式(6)，(7)，(8)より，i番目の染色体に適用されるFitnessを(9)式で定義する。

$$F^i = F_0^i + F_1^i + F_2^i \tag{9}$$

5－3．実験結果

カオス探索の対象とする評価関数は以下の式を用いた。

$$e(x) = -10\cos\omega t + \frac{x^2}{2} \tag{10}$$

この関数の大域的最適解は $x=0$ であり，$\pm 2\pi$ に局所解が存在する。CSD 法の探索パラメータ ω，ϵ はそれぞれ，0.1，1.0で固定し，自動調整の対象を m，d_0，d_1，d_2 の四つに限定した。GA のパラメータは，突然変異確率0.01，交叉確率0.25，個体数100と設定し，選択法はエリート保存戦略を用いた。100世代まで進化を行わせた結果，得られたパラメータは，$m=6.129$，$d_0=-8.847$，$d_1=-8.847$，$d_2=0.596$ となった。これらの値を CSD 法に適用した結果，図10のような探索過程が実現された。

GA により最適化されたパラメータを用いてカオス探索を行うと，±100近くにも及ぶ広範囲を探索し，なおかつ局所解へ急速に漸近収束している様子が確認できる。図10における縦軸の範囲を，［－8，8］と設定したグラフを図11に示す。この結果から，収束先が大域的最適解のみならず，局所解 $\pm 2\pi$ にも漸近収束している様子が確認できるため，CSD 法の特性である遍歴的な探索が実現されているといえる。

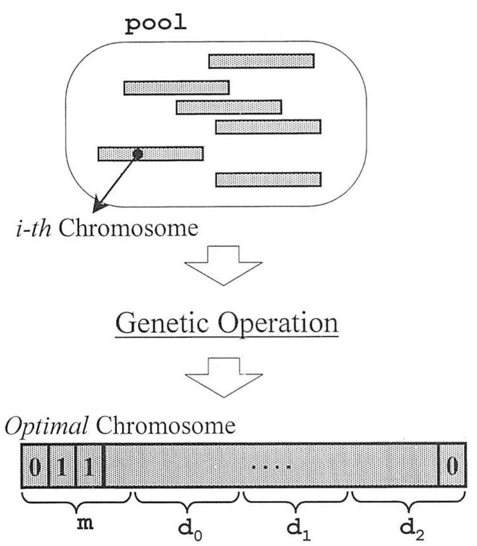

図９．GA による CSD 法のパラメータ調整

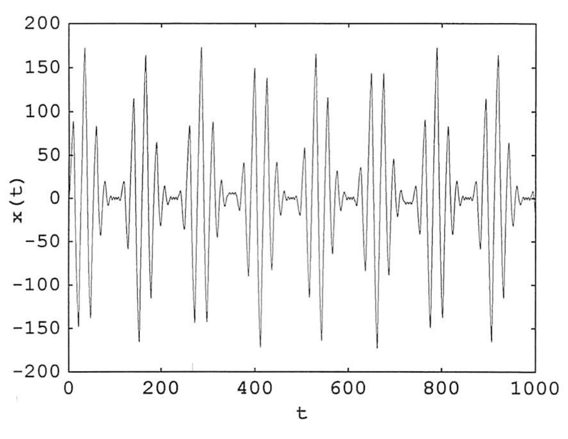

図10．最適なパラメータによる CSD 法の探索過程

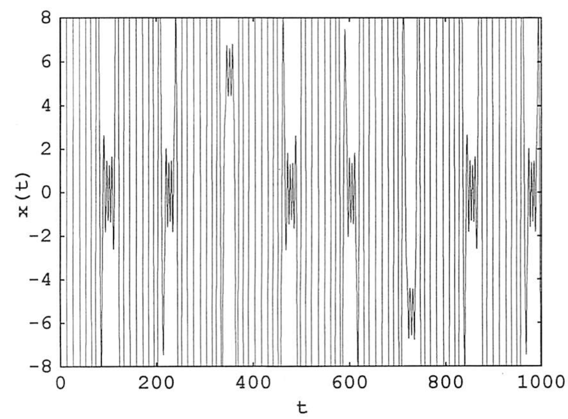

図11．最適なパラメータによる CSD 法の探索過程（$-8 < x < 8$）

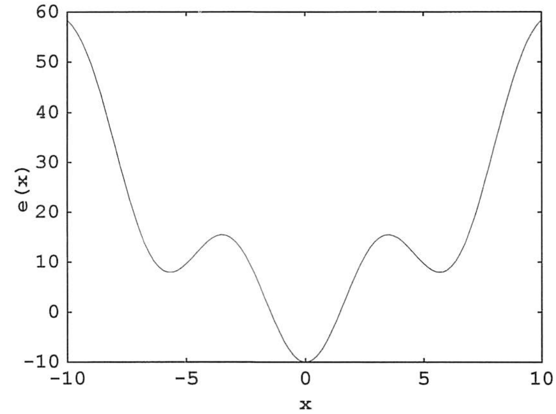

図12．評価関数（式(10)）のランドスケープ

6．おわりに

本稿では最適化問題において，高速になおかつ確実に最適解を獲得する手法について述べた。具体的には，CSD 法を用いた探索法と関数の釣り上げ整形について着目した。CSD 法によるカオス的なダイナミクスは，局所解への永続的な収束を避ける効果を持ち，関数の整形は，解の最適性を明示的に指標化することが出来る。これら双方を融合させることにより，最適性の高い解を短時間で獲得する手法を提案した。また，カオス探索法の問題点であるパラメータ調整の困難さについ

て，GA を用いた自動調整が可能であることを示した。今後，これらの手法について，より詳細な特性の検証を行う必要がある。現在，GA でパラメータ調整を行わせると，カオスの特性がどのように変化するか，検証を進めている。

GA によるパラメータの自動抽出は，動的な評価関数を対象とした最適化問題に対して有効に働くものと期待できる。このような最適化問題は，自律移動ロボットの研究分野で意欲的な研究が行われており，人間のように環境の変動に対して臨機応変に最適な行動計画を立案できるようなロボットの構築を理想としている。現在，最も一般的なアプローチとしては，強化学習法を用いた適応手法が主流であるが[12]，決定的な手法とはなり得ていない。今後，ニューラルネット等の学習則に本手法を用いることで，動的環境への適応行動の獲得を試みる。

参考文献

[1] 三上他，“関数整形を用いたカオス的最適化手法”，精密工学会北海道支部学術講演会講演論文集，pp.48-49,1999

[2] Chen, L., et al., “Chaotic Simulated Annealing by a Neural Network Model with Transient Chaos”, Neural Networks, vol.8, no.6, pp.915-930, 1995

[3] Goldberg, D., “Genetic Algorithms : Search, Optimization and Machine Learning”, The MIT Press, 1989

[4] Devaney, R.L., “An Introduction to Chaotic Dynamical Systems”, Addison-Wesley (1989)

[5] 佐藤他．“カオス的想起に基づく表情モデルの生成”，電気学会研究会資料，SC-94-7, pp.1-10 (1994)

[6] 谷，“カオス的最急降下法を適用したニューラルネットにおける学習および記憶想起の動特性について”，電子情報通信学会論文誌，Vol.J74-A No.8, pp.1208-1215 (1991)

[7] 藤田他，“間欠性カオスを用いた大域的最適化手法”，電子情報通信学会論文誌，Vol.J78-A No.11, pp.1485-1493 (1995)

[8] 徳田他，“最適化問題を解くカオス的力学系の学習”，電子情報通信学会論文誌，Vol.J81-A No.3, pp.377-388 (1998)

[9] 内田他，“カオス的最急降下法を用いた最小値探索とＢＰ法への応用”，電子情報通信学会論文誌，Vol.J78-A No.11, pp.1516-1518 (1995)

[10] Tani, J., “Model-Based Learning for Mobile Robot Navigation with Dynamical Systems Perspective”, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, part B, vol.26, no.3, pp.421-436 (1996)

[11] Hayakawa, Y., et al. “Effects of chaotic noise on the performance of a neural network model for optimization problems”, Physical Review, vol.51, no.4, pp.2693-2696 (1995)

[12] Mikami, S., et al. “Prediction Based Reinforcement Learning for Dynamic Environment”, Intelligent Engineering Systems Through Artificial Neural Networks 7, pp.139-144, The MIT Press (1997)

[13] 津田，“モンテカルロ法とシミュレーション”，培風館(1969)

(平成11年11月30日受理)