講義：フーリエ解析

石　信　一*

Note on Fourier Analysis

Shin-ichi Ishi

要　旨

応用数学の授業改善の一方策として，シラバス用の授業教材の作成を試みた。

Abstract

We have made and showed a lecture-note about Fourier expansions and transformations and theirs applications to partial differential equations according to syllabus to improve upon the scheme of teaching in Applied Mathematics.

フーリエ解析は，フーリエ級数展開とフーリエ変換を用いた解析のことです。フーリエ解析は，広範囲の応用がありますが，この授業の目的は，第一に，与えられた関数をフーリエ級数展開やフーリエ変換できるようにすることであり，第二に，これらを用いた微分方程式の解法，特に，数理科学に現れる二階の定数係数偏微分方程式（一次元熱伝導方程式（拡散方程式），一次元波動方程式（弦の振動方程式），ポテンシャル方程式（二次元ラプラス方程式））の解法を習得することにあります。

第1週　フーリエ解析の準備

フーリエ解析（フーリエ級数展開とフーリエ変換）の学習に必要となる事柄について復習しましょう。

[復習1] フーリエ解析では，三角関数を含む定積分の計算が必要になります。そこで，三角関数の和を積及び積を和に直す公式を示しておきましょう。

指数関数と三角関数の間には，

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i\sin x, \qquad i=\sqrt{-1} \tag{1}$$

の関係式(オイラーの公式)があります。これらを逆に解けば，

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) \tag{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right) \tag{3}$$

を得ます。指数則

$$e^{i(x\pm y)} = e^{ix}\,e^{\pm iy}$$

を三角関数に書き換えると，

$$\cos(x\pm y)+i\sin(x\pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y + i(\sin x\cos y \pm \sin y\cos x),$$

実部と虚部を別々に示せば，和を積に書き換える公式

$$\cos(x\pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$$
$$\sin(x\pm y) = \sin x\cos y \pm \sin y\cos x$$

になっています。そして，それらを逆に解けば，三角関数の積を和に書き換える公式を得ます：

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x+y)+\cos(x-y)\}$$
$$\sin x\sin y = -\frac{1}{2}\{\cos(x+y)-\cos(x-y)\}$$
$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\{\sin(x+y)+\sin(x-y)\}$$

[問題] 次の定積分を計算せよ（m, n は整数）。

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx$　(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx$

*　一般教科　助教授

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$　(4) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx$

［復習2］ 二次元ベクトル（平面ベクトル）$\boldsymbol{A}$ は，$x-y$ 直交座標系の単位直交基底ベクトル (orthonormal basic vector)，

$$i=(1,0),\quad |i|=\sqrt{1^2+0^2}=1$$

と

$$j=(0,1),\quad |j|=\sqrt{0^2+1^2}=1$$

を用いて，

$$\boldsymbol{A}=ai+bj \tag{4}$$

と書けます。直交性は，ベクトルの内積によって表現されます。即ち，内積が零

$$i\cdot j=<i,j>=0 \longrightarrow i\perp j \tag{5}$$

のとき，「ベクトル i，j は直交」していると言います。ベクトルの内積を表す記号は，ここでは，・あるいは，<，>を用います。ここに，記号 | | は，ベクトルの大きさを表します：

$$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{a^2+b^2}$$

スカラー係数 a，b は，上式(4)の両辺に単位直交基底ベクトル i (j) をかけて，内積をとれば，

$$\boldsymbol{A}\cdot i=<\boldsymbol{A},i>=a\cdot 1+b\cdot 0=a$$

$$\boldsymbol{A}\cdot j=<\boldsymbol{A},j>=a\cdot 0+b\cdot 1=b$$

と書けます。これらを用いて，(4)式は，

$$\boldsymbol{A}=<\boldsymbol{A},i>i+<\boldsymbol{A},j>j$$

と書き換えられます。

三次元ベクトル（空間ベクトル）$\boldsymbol{A}$ は，3つの単位直交ベクトル $\{i,j,k\}$ によって，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=ai+bj+ck\\&=<\boldsymbol{A},i>i+<\boldsymbol{A},j>j+<\boldsymbol{A},k>k\end{aligned}$$

と書けます。このことを，「ベクトル $\boldsymbol{A}$ の単位直交基底ベクトル $\{i,j,k\}$ による展開」と呼びましょう。この類推によって，N 次元ベクトル $\boldsymbol{A}$ は，N 個の単位直交基底ベクトル $\{e_n\}_{1,2,\ldots,N}$

$$<e_m,e_n>i=\delta_{mn}=\begin{cases}0\ (m\neq n)\\1\ (m=n)\end{cases} \tag{6}$$

によって（δ_{mn} は，クロネッカーのデルタ（記号）），

$$\boldsymbol{A}=\sum_{n=1}^{N}c_n e_n \tag{7}$$

と展開できます。このとき，スカラー係数（展開係数）c_n は，上式(7)の両辺に e_n をかけて，内積をとれば，

$$<\boldsymbol{A},e_n>=c_n. \tag{8}$$

ベクトルの大きさは，($|\boldsymbol{A}|\geq 0$)

$$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{<\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}>}=\sqrt{\sum_{n=1}^{N}|c_n|^2}.$$

あるいは，上式の両辺を二乗すれば，

$$|\boldsymbol{A}|^2=<\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}>=\sum_{n=1}^{N}|c_n|^2. \tag{9}$$

第2週　フーリエ級数展開

フーリエ展開の表式を与えて，展開係数を求める計算練習をします。

今，(7)式でのベクトルの基底ベクトルによる展開の全くの類推として，ベクトル $\boldsymbol{A}$ を周期 2π の関数 $f(x)$†，単位直交ベクトル e_n を単位直交基底関数（あるいは正規直交基底関数）$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$ に置き換えと，

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$$

と書けます。展開係数 c_n は，上式の両辺に正規直交基底関数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-inx}$ をかけて，内積をとれば，

$$c_n=<f(x),\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}>=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-inx}dx$$

と書けます。関数の内積は，ベクトルの場合と異なって，上記のごとく定積分によって定義されま

$f(x)$ が偶関数 $\longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=2\int_{0}^{\pi}f(x)dx$

$f(x)$ が奇関数 $\longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$

† 関数 $f(x)$ の満たす条件：

(1)関数は周期 2p の周期関数：$f(x)=f(x+2np)$，n は整数

(2)有限区間では区分的に連続で，有限個の点を除き微分可能

(3)不連続点での値は，$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

す。しかし，便宜上，記号は同じものを用いることにします（関数が複素関数値をとる場合も含めて，一般的な内積の定義式は，

$$< f(x), g(x) > = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

です。$(\overline{\ \ })$ は複素共役です)。

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}\right\}_{n=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm\infty}$ の組を正規直交基底関数系 (System of orthonormal basic functions) と言います。係数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ を規格化因子という。基底関数の規格化と直交性は，内積の計算

$$< \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} > = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx = \delta_{mn} \tag{10}$$

によって確認できます。ベクトルの場合と同様に，内積（定積分の値）が零の時，**基底関数は直交**するといいます。

フーリエ展開の表式を次の形に書き換えておくのが便利です：

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{11}$$

の展開係数 c_n は，

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \tag{12}$$

となります。また，前述の指数関数と三角関数の関係式

$$e^{\pm inx} = \cos nx \pm i \sin nx$$

によって，三角関数を用いたフーリエ級数展開は，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx + b_n \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right)$$

で、$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right\}_{n=1,2,\cdots\infty}$ が

正規直交基底関数系になっています。展開係数 a_n, b_n は，

$$a_0 = < f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 1 > = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_0 = < f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx > = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nxdx$$

$$b_0 = < f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx > = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nxdx$$

と書けます。

同様に，三角関数を用いたフーリエ展開と展開係数の表式も次のように書き換えておくにが便利です：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx = b_n \sin nx) \tag{13}$$

展開係数 a_n, b_n は，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \tag{14}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \tag{15}$$

と書けます。この表式を，**実数型フーリエ級数展開**と呼びます。これに対して，前者を**複素型フーリエ級数展開**といいます。このとき，係数 c_n と a_n, b_n の間には，

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\ c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{a_n + ib_n}{2},\ c_0 = \frac{a_0}{2} \tag{16}$$

の関係があります。あるいは，これらを逆に解いて，

$$a_n = c_n + c_{-n},\ b_n = i(c_n - c_{-n}),\ a_0 = 2c_0 \tag{17}$$

[例題] 周期関数 $f(x) = |\sin x|$ $(|x| < \pi)$ を複素型及び実数型フーリエ級数展開せよ。

解. 複素型フーリエ係数 c_n は，

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{2i} e^{ix} - e^{-ix})\right| e^{-inx} dx$$

$$= \frac{2}{2\pi}\frac{1}{2i}\int_{0}^{\pi}\left((e^{i(1-n)x} - e^{-i(1+n)x})\right)dx = \frac{1}{i2\pi}\times(\mathrm{I})$$

$$(\mathrm{I}) = \frac{1}{i}\left[\frac{1}{1-n} e^{i(1-n)x} + \frac{1}{1+n} e^{-i(1+n)x}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{i}\left\{\frac{1}{1-n}(e^{i\pi})^{1-n} + \frac{1}{1+n}(e^{-i\pi})^{1+n} - \left(\frac{1}{1-n} + \frac{1}{1+n}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{i}\left\{\frac{1}{1-n}(-1)^{1-n} + \frac{1}{1+n}(-1)^{1+n} - \left(\frac{1}{1-n} + \frac{1}{1+n}\right)\right\}$$

$$= -\frac{2}{i}\frac{2}{1-n^2} = \begin{cases} \dfrac{4}{i(n^2-1)} & (n = \text{偶数}) \\ 0 & (n = \text{奇数}) \end{cases}$$

よって，

$$c_{2ni} = \frac{1}{i2\pi}\frac{4}{i(2m)^2-1} = -\frac{1}{2\pi}\frac{4}{(2m)^2-1},\ c_0 = \frac{2}{\pi}$$

複素型フーリエ展開は，

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2m)^2-1} e^{i2mx} \tag{18}$$

と書けます（$\sum$の $'$ は，$m = 0$ の項を除くことを意味する)。

また，実数型フーリエ展開の展開係数 a_{2m} は，

$$a_{2m} = c_{2m} + c_{-2m} = -2\frac{2}{\pi}\frac{1}{(2m)^2-1}$$

よって，実数型フーリエ展開は，

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m)^2-1}\cos 2mx \tag{19}$$

と書けます。

［問題１］ 次の周期関数をフーリエ級数展開せよ。

(1) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi \\ -1, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$

(2) $f(x) = |x| \ (|x| \leq \pi)$

［問題２］ 上述のフーリエ展開は，関数の周期が $[-\pi, \pi) = 2\pi$ であったが，一般的な区間（周期）$[-p, p) = 2p$ と $[a, b) = b - a$ のときのフーリエ級数展開を作れ。

第３週　フーリエ級数展開の復習

フーリエ級数展開の表式について復習しておきましょう。周期関数 $f(x)(=f(x+2n\pi)$ が三角関数の列によって，

$$f(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \cdots$$
$$+ b_1\sin x + + b_2\sin 2x + a_3\sin 3x + \cdots$$

と展開可能としましょう。展開係数 a_n, b_n を決める為に，両辺に $\cos nx(\sin nx)$ をかけて，積分区間を $[-\pi, \pi)$ として積分します（項別に積分可能を仮定しています）。$\cos nx$，$\sin nx$ の直交性

$$<\cos mx, \cos nx> = \pi\delta_{mn}$$
$$<\sin mx, \sin nx> = \pi\delta_{mn}$$
$$<\sin mx, \cos nx> = 0$$

から，零でない項は，

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx = a_n\pi.$$

よって，展開係数 a_n は，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

と書けます。同様にして，展開係数 b_n は，

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

初項 a_0 は，特別で，

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0\sum_{n=1}^{N} dx = a_0 2\pi$$

よって，

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\right)$$

$a_0 \to \frac{a_0}{2}$ とすれば，$n=0$ を含めて a_n の表式で書けるので都合がよいことがわかります。

周期を $2\pi \to 2p$ に代えれば，フーリエ展開は（座標を $\frac{2\pi}{2p}$ 倍すればよい），

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{\pi x}{p} + a_2\cos\frac{2\pi x}{p} + a_3\cos\frac{3\pi x}{p} + \cdots$$
$$+ b_1\sin\frac{\pi x}{p} + b_2\sin\frac{2\pi x}{p} + b_3\cos\frac{3\pi x}{p} + \cdots$$

展開係数 a_n, b_n は，

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx \tag{20}$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx \tag{21}$$

となります。

フーリエ展開を求めることは，要は展開係数 a_n, b_n を計算することです。

［例題］ 次の周期関数をフーリエ級数展開せよ（周期 $2p$）。

(1) $f(x) = x(-p \leq x < p)$ (2) $f(x) = x(0 \leq x < 2p)$
(3) $f(x) = x^2(-p \leq x < p)$ (4) $f(x) = x^2(0 \leq x < 2p)$

解.

(1) 関数 $f(x)$ は奇関数。従って，$a_n = 0$。

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} x\sin\frac{n\eta}{p}xdx = \frac{2}{p}\int_0^p x\sin\frac{n\pi}{p}dx = \frac{2}{p}\mathrm{I})$$

$$(\mathrm{I}) = -\left(\frac{p^2}{n\pi}\cos n\pi - 0\right) = -\frac{p^2}{n\pi}(-1)^n = (-1)^{n+1}\frac{p^2}{n\pi}$$

$$= \left[-\frac{p}{n\pi}x\cos\frac{n\pi}{p}x\right]_0^p + \frac{p}{n\pi}\int_0^p\cos\frac{n\pi}{p}xdx$$

$$b_n = \frac{2}{p}\times(-1)^{n+1}\frac{p^2}{n\pi}$$

$$x = \frac{2p}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{p}x \tag{22}$$

(2) 関数 $f(x)$ は奇でも偶関数でもない。

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_0^{2p} x\cdot 1dx = 2p$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} x\cos\frac{n\pi}{p}xdx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} x\sin\frac{n\pi}{p}xdx = -\frac{2p}{n\pi}$$

$$x = p - \frac{2p}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\sin\frac{n\pi}{p}x$$

(3) 関数$f(x)$は偶関数。従って，$b_n=0$。

$$a_0=\frac{2}{p}\int_0^p x^2\cdot 1dx=\frac{2p^2}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{p}\int_0^p x^2\cos\frac{n\pi}{p}xdx=(-1)^n\frac{4p^2}{(n\pi)^2}$$

$$b_n=0$$

$$x^2=\frac{p^2}{3}+\left(\frac{2p}{\pi}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos\frac{nx}{p}x \tag{23}$$

(4) 関数$f(x)$は奇でも偶関数でもない。

$$a_0=\frac{1}{p}\int_0^{2p}x^2\cdot 1dx=\frac{8p^2}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{p}\int_0^{2p}x^2\cos\frac{n\pi}{p}xdx=\frac{4p^2}{(n\pi)^2}$$

$$b_n=\frac{1}{p}\int_0^{2p}x^2\sin\frac{n\pi}{p}xdx=-\frac{4p^2}{(n\pi)^2}$$

$$x^2=\frac{4p^2}{3}$$
$$+\frac{4p^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n^2\pi}\cos\frac{nx}{p}x-\frac{1}{\pi}\sin\frac{n\pi}{p}x\right)$$

さて，上記例題(3)の x^2のフーリエ展開(23)の各項を書き下すと，

$$\frac{p^2}{3}-\left(\frac{2p}{\pi}\right)^2\left(\cos\frac{\pi x}{p}-\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{p}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{p}-\cdots\right)$$

で，各項を微分してみると

$$\frac{4p}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{p}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{p}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{p}-\cdots\right)$$
$$=\frac{4p}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{p}$$

となります。これは，例題(1)の x のフーリエ展開(22)を2倍したものです。このように，関数$f(x)$が周期2πの区間で連続で，$f'(x)$も連続であれば,$f(x)$フーリエ展開の各項を微分すれば,$f'(x)$のフーリエ展開が得られることになります。然らば，x^2のフーリエ展開の各項を積分すれば,$\frac{x^3}{3}$のフーリエ展開が得られるだろうか：

$$\int_0^x\frac{p^2}{3}dx=\frac{p^2}{3}x$$

$$\left(\frac{2p}{nx}\right)^2\int_0^x\cos\frac{n\pi}{p}xdx=\left(\frac{2p}{n\pi}\right)^3\sin\frac{n\pi x}{p}$$

項別積分した項の和をとれば，

$$\frac{p^2}{3}x+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{p}{n\pi}\right)^3\sin\frac{n\pi x}{p}$$

$$=\frac{p^2}{3}2p\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{p}$$
$$+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{p}{n\pi}\right)^3\sin\frac{n\pi x}{p}$$
$$=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left\{\frac{p^3}{n\pi}-6\left(\frac{p}{n\pi}\right)^3\right\}\sin\frac{n\pi x}{p}$$

で，x^3のフーリエ展開は，

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left\{\frac{p^3}{n\pi}-6\left(\frac{p}{n\pi}\right)^3\right\}\sin\frac{n\pi}{p}x$$

ですから，期待通り，$\int_0^x x^2dx=\frac{x^3}{3}$ のフーリエ展開になっています。関数 $f(x)$が周期2πの区間で連続で，$f(x)$のフーリエ展開を項別積分して得られるフーリエ展開は，$f(x)$の積分のフーリエ展開になります。

フーリエ展開において基底関数として三角関数列

$$\{\sin(nx),\cos(nx)\}_{n=0,1,2,\cdots}$$

あるいは，指数関数列 $\{e^{\pm inx}\}_{n=0,\pm1,\pm2,\cdots}$をとる意味について考察しよう。

三角関数 $A\sin(nx)+B\cos(nx)$は，微分方程式

$$y''(x)+\lambda y(x)=0 \tag{24}$$

によって規定されている関数である。この微分方程式に，閉区間$[-\pi,\pi)$の両端で，

$$y(-\pi)=y(\pi),\ \left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=-\pi}=\left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=\pi}$$

という条件(周期境界条件)を課すと，解をもつには定数λ

$$\lambda_n=n^2$$

に制限がつき，それに対応した解として，

$$\sin(nx),\ \cos(nx)$$

を得る。このとき，λ_nを**固有値**，対応する関数y_nを**固有関数**という。(24)を固有値方程式といい，固有値や固有関数を求める問題を固有値問題を解くという。正規直交化

$$\langle y_m,y_n\rangle=\delta_{mn}$$

した関数列（固有関数列）を$\{y_n(x)\}_{n=1,2\cdots}$ で表すと，$[-\pi,\pi)$における任意の関数$f(x)$を，

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n y_n(x),\quad c_n=<f(x),y_n>$$

と，固有関数列によって展開したものがフーリエ級数であるといえる。

[例題] 一次元振動子問題：$my''(t)+ky(t)=0$ を境界条件 $y(0)=y(a)=0$ の下で解け（ここに，m は振動子の質量，k はバネ定数，$y(t)$ は変位とすれば，$ky(t)$ は復元力です）。

解. $y''(t)+\omega^2 y(t)=0$ ($\omega^2=\frac{k}{m}$: ω は角振動数)

解は，$A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)$ を仮定して，

$$y(0)=B=0$$
$$y(a)=A\sin\omega a=0\longrightarrow\omega=\frac{n\pi}{a}\ (n=1,2,\cdots)$$

よって，解は，$y(t)=A\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ と書ける。$n=1$を振動子の基本振動とすれば，$n\geq 2$ はそれの倍振動となる。このことから，フーリエ展開は，任意の振動を単振動に分解するという表現が用いられる。

第4週　フーリエ級数の幾つかの性質

ベクトルの大きさ($|A|$) を $\sqrt{<A,A>}$ で表したように，関数$f(x)$の大きさ(?)を$\sqrt{<f(x),f(x)>}$で定義します。しかし，これを $|f(x)|$ と書くのではなく，$\|f(x)\|$ と書いて，関数の**ノルム**‡と言います：

$$\|f(x)\|=\sqrt{<f(x),f(x)>}=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx}\tag{25}$$

式の簡素化の為，以下，関数$f(x)$の（複素型）フーリエ展開を

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\xi_n$$

ここに，

$$\xi_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx},\ c_n=<f,\xi_n>$$

と略記します。上式(25)の両辺を二乗すれば，（ベクトルの式に $|A|^2=<A,A>=\sum_{n=1}^{N}|c_n|^2$ 対応する式として）

$$\|f(x)\|^2=<f(x),f(x)>=\sum_{n=\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

‡ノルムの満たす性質（→ノルム空間）：
N1) $\|f(x)\|\geq 0$
N2) $\|f(x)+g(x)\|\leq\|f(x)\|+\|g(x)\|$
N3) $\|cf(x)\|=c\|f(x)\|$ (cは定数)

を得ます。この関係式を**パーセバル(Parseval)**の等式と言います。この式は，

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\xi_n|^2dx$$
$$=\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\sum_{n=-N}^{N}c_n\xi_n|^2dx=0$$

と同じ内容の別の表式になっています（級数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\xi_n$ は $f(x)$ に$[-\pi,\pi)$で平均二乗収束するという。このとき，直交関数系ξ_nは完備（あるいは，完全）であると言う）。

上式の有限級数（展開係数を d_n として）を計算しましょう：

$$\varepsilon_N=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\sum_{n=-N}^{N}d_n\xi_n|^2dx\ (\geq 0)\tag{26}$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-\sum_{n=-N}^{N}d_n\xi_n)\overline{(f(x)-\sum_{m=-N}^{N}d_m\xi_m)}dx$$

$$=<f,f>-\sum_{m=-N}^{N}\overline{d_m}<f_i,\xi_m>-\sum_{n=-N}^{N}d_n<\xi_n,f>$$

$$+\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=-N}^{N}\overline{d_m}d_n<\xi_m,\xi_n>$$

$$=<f,f>-\sum_{m=-N}^{N}\overline{d_m}c_m-\sum_{n=-N}^{N}d_n\overline{c_n}+\sum_{n=-N}^{N}|d_n|^2$$

$$=<f,f>+\sum_{m=-N}^{N}|d_n-c_n|^2-\sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2$$

となります。従って，ε_Nは $d_n=c_n$ のとき最小値をとります。言い換えれば，係数d_nがフーリエ係数のとき最小値をとります。また，$\varepsilon_N\geq 0$であるから

さらに，Nは任意の実数($N\to\infty$)において成り

$$<f,f>\geq\sum_{n=1}^{N}|c_n|^2\tag{27}$$

立つので，

$$<f,f>\geq\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2\tag{28}$$

と書けます。この不等式を**Besselの不等式**とい

§三角関数を用いたフーリエ展開での Bessel 不等式の表式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx\geq\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

います。等号のときがパーセバル(Parseval)の等式です。
< f,f >が，確定値（有限値）をとるとすれば，

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} 0 \tag{29}$$

でなければなりません。これを Cauchy-Riemann の定理といいます。

第5週　フーリエ級数の応用

フーリエ級数展開を利用して，ここでは，次の型の偏微分方程式の解を見つけよう(c^2は定数)：

熱伝導方程式 $$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \tag{30}$$

波動方程式 $$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \tag{31}$$

ポテンシャル方程式 $$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{32}$$

上記，微分方程式の解法の手順を，熱伝導方程式を典型として示そう。偏微分方程式の解法は，適当な条件（以下では，境界条件(A)と初期条件(B)）の下で，解を見いだすのが普通である。

[例題Ⅰ] 熱伝導方程式(30)を次の条件の下で解け(A,B,Cは定数)。

（A）境界条件　$f(0,t) = f(a,t) = 0$
（B）初期条件　$f(x,0) = g(x)$

方程式の解と条件の意味として，解 $f(5,t)$ を座標5と時間 t での熱伝導体の温度分布とすれば，境界条件は，伝導体の $5 = 0, a$ の両端での等温条件，初期条件は，時刻 $t = 0$での温度分布を表している．

{Ⅰ} 変数分離解 $T(t)X(x)$ を仮定する

$$f(x,t) = T(t)X(x) \tag{33}$$

分離解を原式(30)に代入すれば（微分は，′，″で示す），

$$c^2T(t)X''(x) = T'(t)X(x)$$

上式を変数分離すれば，

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{c^2T(t)}$$

となります。ここに，左辺は変数 x，右辺は t のみの関数です。それらが等しいということは，変数 x にも t にも依らない定数でなければなりません。この定数を $-\lambda^2$で表すと，

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{c^2T(t)} = -\lambda^2$$

この定数を分離定数と呼びます。
分離定数は，境界条件の考察から負でなければなりません。

{Ⅱ} 分離解 $T(t)X(x)$ を常微分方程式に帰着させて解く

上式より，解くべき常微分方程式は，

$$T'(t) + c^2\lambda^2T(t) = 0 \tag{34}$$

$$X''(x) + \lambda^2X(x) = 0 \tag{35}$$

となります。方程式(34)の解は，直ちに書き下せて，

$$T(t) = Ae^{-c^2\lambda^2t} \tag{36}$$

方程式(35)の解を見いだすには，境界条件(A)

$$f(0,t) = X(0)T(t) = 0,\ f(a,t) = X(a)T(t) = 0$$

を考慮しなければなりません。境界条件を $X(x)$ について書き換えれば，

$$X(0) = X(a) = 0$$

この条件下で方程式(35)式，$X''(x) + \lambda^2X(x) = 0$ を解きます。この一般解は，

$$X(x) = B\cos\lambda x + C\sin\lambda x$$

で，境界条件を考慮すると，

$$X(0) = B = 0,\ X(a) = C\sin\lambda a = 0$$

で，後者から分離定数 λ が，

$$\lambda a = n\pi\ (\text{nは整数}),\ \lambda\frac{n\pi}{a}$$

と決まり，

$$X(x) = C\sin\frac{n\pi}{a}x.$$

こうして，変数分離解（特解）$T(t), X(x)$の型が決まります。

{Ⅲ}「重ね合わせの原理」によって解の一般解を作る

原方程式の一般解は，上記の変数分離解（特解）の重ね合わせ（一次結合）で，

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-c^2\lambda^2t}\sin\lambda x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(c\frac{n\pi}{a}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{37}$$

と書けます。ここに，係数 b_n は，初期条件から，

$$f(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

この式は $g(x)$ の sin のフーリエ展開ですから，係数 b_n は，

$$b_n = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$$

と決まります。よって，求める解は，

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx\right\} \times e^{-\left(c\frac{n\pi}{a}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{38}$$

[問題] 熱伝導方程式 $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t} = 3\dfrac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$ を次の条件の下で解け：

（A）境界条件　$f(0,t) = f(2,t) = 0$

（B）初期条件　$f(x,0) = x$

[[**解.**]]上記の解法において，$a = 2,\ c^2 = 3,\ g(x) = x$ とおいた場合で，解を書き下すには，b_n のみ計算すればよい：

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = (-1)^{(n+1)}\frac{4}{n\pi}$$

よって，解は，

$$f(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n+1)}\frac{1}{n}e^{-3\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

となります。

[例題Ⅱ] 波動方程式(31)を次の条件の下で解け（A, B, C は定数）。

（A）境界条件　$f(0,t) = f(a,t) = 0$

（B）初期条件　$f(x,0) = g(x),\ f'(x,0) = G(x)$

方程式の解の意味として，解 $f(x,t)$ を座標 x と時間 t での波動の伝播の様子を表します。境界条件は $x=0, a$ で波動は固定され，初期条件は，時刻 $t=0$ での波動の分布とその速度分布を表している

｛Ⅰ｝ 変数分離解を仮定する

上記の手順に従って，

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\lambda^2$$

｛Ⅱ｝ 分離解 $T(t)X(x)$ を常微分方程式に帰着させて解く

$$T''(t) + c^2\lambda^2 T(t) = 0 \tag{39}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \tag{40}$$

解くべき常微分方程式は，

$$T(t) = A\cos c\lambda t + B\sin c\lambda t. \tag{41}$$

となります。方程式(39)の一般解は，

方程式(40)の解は，境界条件（A）を考慮して，上述のごとく，

$$X(x) = C\sin\frac{n\pi}{a}.$$

｛Ⅲ｝「重ね合わせの原理」によって解の一般解を作る

解は，上記の変数分離解（特解）の重ね合わせ（一次結合）で，

$$\begin{aligned} f(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos c\lambda t + b_n\sin c\lambda t)\sin\lambda x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(c\frac{n\pi t}{a}\right) + b_n\sin\left(c\frac{n\pi t}{a}\right)\right\} \\ &\quad\times\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \end{aligned} \tag{42}$$

と書けます。ここに，係数 a_n, b_n は，初期条件から次のように決まります：

$$f(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$f'(x,0) = G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\frac{n\pi}{a}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

これらの式は，$g(5), G(5)$ の sin のフーリエ展開ですから，係数 a_n, b_n は，

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$$

$$\frac{n\pi}{a}b_n = \frac{2}{a}\int_0^a G(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$$

となります。得られた 係数 a_n, b_n を(42)式に代入すればよい。

[問題]　波動方程式 $\dfrac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = 3\dfrac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$ を次の条件の下で解け：

（A）境界条件　$f(0,t) = f(2,t) = 0$

（B）初期条件　$f(x,0) = x,\ f'(x,0) = 1$

[**解.**] a_n は上記に同じ。従って，以下 b_n を求める $(a=2, c^2=3)$。

$$\frac{n\pi}{2} b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 1 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = -\frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1)$$

$$b_n = -\frac{4}{(n\pi)^2}((-1)^n - 1)$$

よって，解は，

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^{(n+1)}\frac{4}{n\pi}\cos\left(\sqrt{3}\,\frac{n\pi t}{2}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{4}{(n\pi)^2}((-1)^2 - 1)\sin\left(\sqrt{3}\,\frac{n\pi t}{2}\right)\right\} \times \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$$

となります。

[**例題Ⅲ**] ポテンシャル方程式(32)を次の条件の下で解け(A, B, C は定数)。

境界条件 $f(0,y) = f(a,y) = 0$
$f(x,0) = g(x)$, $f(x,b) = 0$

{Ⅰ} 変数分離解 $X(x)Y(y)$ を仮定する

上記の手順に従って，

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2$$

{Ⅱ} 分離解 $X(x)Y(y)$ を常微分方程式に帰着させて解く

解くべき常微分方程式は，

$$Y''(y) - c^2\lambda^2 Y(y) = 0 \tag{43}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \tag{44}$$

となります。方程式(43)の一般解は，

$$Y(y) = Ae^{-\lambda y} + Be^{\lambda y}.$$

境界条件 $f(x,b) = X(x)Y(b) = 0$ を考慮すれば，

$$Y(b) = 0 = Ae^{-\lambda b} + Be^{\lambda b},\ B = -A\frac{e^{-\lambda b}}{e^{\lambda b}} = -Ae^{-2\lambda b}$$

で，解は，

$$Y(y) = A\left(e^{-\lambda y} - e^{-\lambda(b-y)}\right) = 2Ae^{-\lambda b}\sinh\lambda(b-y)$$
$$= A'\sinh\lambda(b-y) \tag{45}$$

と書けます（A´は新たな定数）。方程式(44)の解は，境界条件を考慮して，

$$X(x) = C\sin\frac{n\pi}{a}.$$

{Ⅲ}「重ね合わせの原理」によって解の一般解を作る

解は，上記の変数分離解（特解）の重ね合わせ（一次結合）で，

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh\left(\frac{n\pi(b-y)}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{46}$$

と書けます。ここに，係数 a_n は条件から，

$$f(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh\left(\frac{n\pi b)}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

(b´は新たな定数。) この式は，g (x) の sin のフーリエ展開ですから，係数 b_n は，

$$b'_n = \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) b_n = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$$

と決まります。

[**問題**] $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$ を次の条件の下で解け：

（A）境界条件 $f(0,t) = f(2,t) = 0$

（B）初期条件 $f(x,0) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$, $f'(x,2) = 0$

[**解.**] $g(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ だから，$(a=b=2)$ 上式に従って，

$$b'_n = 1 \longrightarrow b_n = \frac{1}{\sinh(n\pi)}$$

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sinh(n\pi)}\sinh\left(\frac{n\pi(2-y)}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

第6週　フーリエ変換

周期関数 $f(x)$（周期 $[-p, p) = 2p$）の複素型フーリエ級数の展開係数 c_n の表式

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-p}^{p} f(x)e^{-i\frac{n\pi}{p}x}dx$$

において，周期 $p \to \infty$ のとき，$\dfrac{n\pi}{p} = t$, $c_n = F(t)$ とすると，上式は，

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}dx \tag{1}$$

と書けます。ここに，$F(t)$ を $f(x)$ のフーリエ変換と言います。$p\to\infty$ の意味するところは，周期関数 $f(x)$ の展開が周期を持たない関数の展開に移ったことになります。なお，定数 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ の取り扱いは，フーリエ級数の規格化因子の取り扱い同様，本質的ではありません。

フーリエ変換(1)式をフーリエ級数展開の連続版として定義しましょう。複素型フーリエ展開を，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\frac{n\pi}{P}x} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-p}^{p} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{P}x} dx \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\frac{n\pi}{P}x} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

と表しました。離散変数 n を連続変数 t への書き換え $\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \to \int_{-\infty}^{\infty} dt\right)$ を次のように行います：

$$
\frac{n\pi}{p} = t_n \text{ とおけば，} t_{n+1} - t_n = \Delta t = \frac{\pi}{p} \qquad (3)
$$

を上式(2)に代入すれば，

$$
f(x) = \sum_{n=\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-it_n x} dx \right\} e^{it_n x}
$$

ここで，$p\to\infty$ とすれば，$t_n\to t$，$\Delta t\to dt$ と連続変数 t になります。よって，上式は，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx \right\} e^{itx} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx \right\} e^{-itx} dt \\
&\overset{(1)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{itx} dt \qquad (4)
\end{aligned}
$$

この式をフーリエ逆変換，あるいは，反転公式と言います。

反転公式の「反転」の意味は，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) e^{-it\zeta} d\zeta \right\} e^{itx} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} {}^{-it(\zeta-x)} dt \right\} d\zeta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) \delta(\zeta - x) d\zeta = f(x)
\end{aligned}
$$

よりわかります。ここに，デルタ関数(δ 関数)を天下り的に用いました。

以下において，フーリエ変換・逆変換を，

$$
F(t) = \mathscr{F}(f(x)), \qquad f(x) = \mathscr{F}^{-1}(F(t)) \qquad (5)
$$

で，$f(x)$, $F(t)$ の対

$$
f(x) \Longleftrightarrow F(t)
$$

を「フーリエ変換対」と呼びます。

[課題] 複素型フーリエ展開から次の実数型フーリエ変換式を作れ。

$$
f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\infty} a(t) \cos txdt + \int_0^{\infty} b(t) \sin txdt \right) \qquad (6)
$$

ここに，

$$
a(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos txdx \qquad (7)
$$

$$
b(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin txdt \qquad (8)
$$

$a(t)$，$b(t)$ をフーリエ余弦及び正弦変換と言います。

[例題] 次の関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(t)$ を計算せよ。

(1) $f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| < \frac{1}{2}) \\ 0 & (|x| > \frac{1}{2}) \end{cases}$

(2) $f(x) = e^{-2|x|}$　(3) $f(x) = e^{-x^2}$

フーリエ変換の定数 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ は省略してあります。

解.

(1)

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 e^{-itx} dx \\
&= \left[\frac{1}{-it} e^{-itx} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{-it} (e^{-it\frac{1}{2}} - e^{it\frac{1}{2}}) \\
&= \frac{1}{it} (e^{-i\frac{1}{2}} - e^{-i\frac{1}{2}}) = \frac{1}{it} 2i \sin\frac{t}{2} \\
&= \frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{t\to 0} \frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} = 1, \ \lim_{t\to\pm\infty} \frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} = 0
$$

$F(0) = 1$。t 軸を横切る点は，$\sin\frac{t}{2} = 0$，即ち，$\frac{t}{2} = n\pi$，（nは整数）．

$t = 2n\pi.$

この結果を以下のように拡張します：

今，$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$ とすれば，$f(x)$ を長方形パルス（rectangular pulse）と呼び，$\mathrm{rect}_a(x)$ で表わします。(従って，例題(1)の$f(x)$ は，$\mathrm{rect}_{\frac{1}{2}}(x)$ と書けます。）この$\mathrm{rect}_a(x)$ のフーリエ変換対は，

$$
\mathrm{rect}_a(x) \Longleftrightarrow 2\frac{\sin at}{t} \qquad (9)
$$

となります。

(2) $f(x) = e^{-2|x|}$

$$
F(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{2x} e^{-itx} dx + \int_0^{\infty} e^{-2x} e^{-itx} dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{2-it}\, e^{(2-it)x}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{-1}{2+it}\, e^{-(2+it)x}\right]_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{2-it}\,(1-0) + \frac{-1}{2+it}\,(0-1) \\
&= \frac{1}{2-it} + \frac{1}{2+it} = \frac{4}{2^2+t^2}F(0) = 1, \quad \lim_{t\to\pm\infty} \frac{4}{2^2+t^2} = 0
\end{aligned}
$$

上記の結果を一般化した関数$f(x)=e^{-a|x|}$のフーリエ変換対は,

$$e^{-a|x|} \Longleftrightarrow \frac{2a}{t^2+a^2} \tag{10}$$

と書けます。

関数 $e^{-a|x|}$ を，Heaviside関数 $H(x)$ を使って,

$$e^{-a|x|} = e^{-ax}\, H(x) + e^{ax}\, H(-x)$$

と分解できます。右辺の各関数のフーリエ変換対は,

$$e^{-a|x|}\, H(x) \Longleftrightarrow \frac{1}{it+a} \tag{11}$$

$$e^{ax}\, H(-x) \Longleftrightarrow \frac{1}{-it+a} \tag{12}$$

でなければなりません。

(3)

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, e^{-itx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{t}{2})^2-\frac{t^2}{4}}\, dx \\
&= e^{-\frac{t^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, e^{-itx}\, dx \overset{x+i=\frac{t}{2}=z}{=} e^{-\frac{t^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\, dz \\
&= e^{-\frac{t^2}{4}} \sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

複素関数論は未習ですから，上記の方法に代わるものとして，次のような微分方程式を利用した方法を採用します：

$$
\begin{aligned}
\frac{dF(t)}{dt} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(-ix)e^{-itx}\, dx = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{de^{-x^2}}{dx}\right) e^{-itx}\, dx \\
&= \frac{i}{2}\left\{\left[e^{-x^2}\, e^{-itx}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(-it)e^{-itx}\, dx\right\} \\
&= -\frac{t}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, e^{-itx}\, dx = -\frac{t}{2}F(t)
\end{aligned}
$$

変数分離して積分すれば,

$$\log F(t) = -\frac{t^2}{4} + c \quad (\mathrm{c{=}constant})$$

よって，フーリエ変換 $F(t)$

$$F(t) = e^{-\frac{t^2}{4}+c} = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{t^2}{4}} \quad (F(0) = \sqrt{\pi} = e^c)$$

を得ます。

一般化したガウス関数のフーリエ関数対は,

$$e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \Longleftrightarrow e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \tag{13}$$

と書けます。ここに，定数 σ は，例えば，正規分布の標準偏差です。

[問題] 次の関数のフーリエ変換を求めよ。

(1) $H(x) = \begin{cases} 1 & (x>0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$

(2) $\Lambda(x) = \begin{cases} 1-\dfrac{|x|}{a} & (|x|<a) \\ 0 & (|x|>a) \end{cases}$

第7週　フーリエ変換続き

フーリエ変換を用いて微分方程式を解く準備として，微分された関数（導関数）と畳み込み（合成積）のフーリエ変換の表式を与えましょう。

微分された関数(f^n)のフーリエ変換（フーリエ変換の定数 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ は省略)は,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}(f') &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, e^{-itx}\, dx \\
&= \left[f(x)\, e^{-itx}\right]_{-\infty}^{\infty} + it\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-itx}\, dx \\
&= itF(t)
\end{aligned} \tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}(f') &= \int_{-\infty}^{\infty} f''(x)\, e^{-itx}\, dx \\
&= \left[f'(x)\, e^{-itx}\right]_{-\infty}^{\infty} + it\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, e^{-itx}\, dx \\
&\overset{(14)}{=} (it)^2 F(t)
\end{aligned} \tag{15}
$$

こうして，n 階微分した関数のフーリエ変換対は,

$$f^{(n)}(x) \Longleftrightarrow (it)^n F(t) \tag{16}$$

と書けます。

畳み込み積($*$)の定義式は,

$$f * g \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy \tag{17}$$

$$\overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy \tag{18}$$

で，そのフーリエ変換は(但し，$\mathscr{F}(f(x)) = F(t)$，$\mathscr{F}(g(x)) = G(t)$として),

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}(f * g) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy\right\} e^{-itx}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, e^{-it(x-y)}\, dx\right\} g(y)\, e^{-ity}\, dy \\
&\overset{x-y=X}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(X)\, e^{-itX}\, dX \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{-ity}\, dy \\
&= F(t)\, G(t)
\end{aligned}
$$

となります。従って，畳み込み積($*$)のフーリエ変換対は,

$$f * g \Longleftrightarrow F(t)\, G(t) \tag{19}$$

と表します。この公式が，微分方程式の解を求める（逆変換の）際に強力な武器になります。

第8週　フーリエ変換の応用

フーリエ変換を用いて，フーリエ級数展開を用

いて解いたと同じ型の偏微分方程式(30, 31, 32)を解きます。フーリエ展開においては，対象となる関数は周期関数でしたが，フーリエ変換では，その制限はありません。従って，微分方程式を解くときの境界条件は，

$$f(x,t) \xrightarrow{x\to\pm\infty} 0 \tag{20}$$

とするのが普通です。以下では，いつでもこのことを仮定しています。
フーリエ変換による微分方程式の解法の手順を，熱伝導方程式を典型として示そう。

[例題Ⅰ] 熱伝導方程式 $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}=c^2\dfrac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$ を次の初期条件

初期条件　$f(x,0)=g(x)$

の下で解け。

解.
解 $f(x,t)$ の x についてのフーリエ変換（以下，$\mathscr{F}$ 変換と略記する）を

$$\mathscr{F}_x(f(x,t))=F(s,t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)e^{-isx}\,dx$$

とする。従って，初期条件 $g(x)$ の $\mathscr{F}$ 変換は，

$$g(s,0)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x,0)e^{-isx}\,dx$$

と書けます。

[Ⅰ] 原方程式を x についてフーリエ変換する

$$\mathscr{F}\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right)=c^2\,\mathscr{F}\left(\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right) \tag{21}$$

フーリエ変換と微分の演算子の順序交換が可能であることを仮定すれば，

$$\frac{dF(s,t)}{dt}=c^2(is)^2F(s,t)=-c^2s^2F(s,t) \tag{22}$$

と書けます。このように，偏微分方程式の場合には，$\mathscr{F}$ 変換した方程式は代数方程式でなく，一般的に（常）微分方程式になります。

[Ⅱ] フーリエ変換した微分方程式を解く

上式(22)の解は，変数分離で容易に求まります。

$$F(s.t)=A(s)e^{-c^2s^2t}$$

初期条件を考慮すれば，

$$F(s.t)=g(s,0)e^{-c^2s^2t}$$

[Ⅲ] 逆変換 $\mathscr{F}^{-1}$変換）して解を求める

$$\mathscr{F}^{-1}(Fs,t))=f(x,t)=g(x)*e^{-\frac{x^2}{4c^2t}}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-\frac{|x-y|}{4c^2t}}\,dy$$

[例題Ⅱ] 波動方程式 $\dfrac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$ を次の初期条件

初期条件　$f(x,0)=g(x),\ f'(x,0)=G(x)$

の下で解け。

解.

[Ⅰ] 原方程式を x についてフーリエ変換する

$$\mathscr{F}\left(\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t}\right)=c^2\,\mathscr{F}\left(\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{d^2F(s,t)}{d^2t}=c^2(is)^2F(s,t)=-c^2s^2F(s,t)$$

[Ⅱ] フーリエ変換した微分方程式を解く

上式の微分方程式の解は，既知で，

$$F(s,t)=A(s)e^{icst}+B(s)e^{-icst}.$$

初期条件を考慮すれば，

$$F(s,0)=g(s,0)=A(s)+B(s)$$
$$F'(s,0)=G(s,0)=ics\{A(s)-B(s)\}$$

係数 $A(s)$，$B(s)$ は，上式の連立方程式を解いて，

$$A=\frac{1}{2}g(s)+\frac{1}{2cis}G(s)$$
$$B=\frac{1}{2}g(s)-\frac{1}{2cis}G(s)$$

A,Bを$F(s,t)$に代入すれば，

$$F(s,t)=\left\{\frac{1}{2}g(s)+\frac{1}{2cis}G(s)\right\}e^{icst}$$
$$+\left\{\frac{1}{2}g(s)-\frac{1}{2cis}G(s)\right\}e^{-icst} \tag{23}$$

[Ⅲ] 逆変換（$\mathscr{F}^{-1}$変換）して解を求める

$$\mathscr{F}^{-1}(F(s,t))$$
$$=f(x,t)$$
$$=\left\{\frac{1}{2}g(x)+\frac{1}{2c}\int_0^x G(x)\,dx\right\}*\delta(x+ct)$$
$$+\left\{\frac{1}{2}g(x)-\frac{1}{2c}\int_0^x G(x)\,dx\right\}*\delta(x-ct)$$
$$=\frac{1}{2}\{g(x+ct)+g(x-ct)\}$$
$$+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(x)\,dx \tag{24}$$

［例題Ⅲ］ポテンシャル方程式 $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=0$ を次の条件

境界条件 $f(x,y)\xrightarrow{x^2+y^2\to\infty} 0$

初期条件 $f(x,0)=g(x)$

の下で解け。

解.

［Ⅰ］原方程式を x についてフーリエ変換する

$$\mathscr{F}\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right)+\mathscr{F}\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right)=0$$

$$(is)^2 F(s,t)+\frac{d^2 F(s,y)}{dy^2}=0$$

［Ⅱ］フーリエ変換した微分方程式を解く

上式の微分方程式の解は，既知で，

$$F(s,t)=A(s)\,e^{sy}+B(s)\,e^{-sy}.$$

境界条件から，$A(s)=0$ でなければならない。
また，初期条件を考慮すれば，

$$F(s,0)=g(s,0)=B(s).$$

よって，$B(s)$を$F(s,t)$に代入すれば，

$$F(s,t)=g(s,0)\,e^{-sy}$$

［Ⅲ］逆変換（$\mathscr{F}^{-1}$変換）して解を求める

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}(F(s,y))&=f(x,y)\\&=g(x)*\frac{y}{x^2+y^2}\\&=\int_0^\infty\frac{y}{|x-u|^2+y^2}\,g(u)\,du\end{aligned}\tag{25}$$

（平成11年11月22日受理）