数式処理ソフトによる2変数関数描画法

上　木　政　美*

The method of drawing figure of bivariate function by using the symbolic formula manipulations software

Masami UEKI

要　旨

本校では3年次に偏微分・重積分について講義する。その際、2変数関数の図を学生に見せることは，理解を深める助けになる。しかし，2種類以上の関数の交わった部分の形は描くことがかなり難しい。本論文では数式処理ソフトを使い，グラフィックスを効率よく描く方法を探る。

Abstract

We lectures on the partial differentiation and multiple integral in this college in the third grade. In that case, it is very helpful to show the students figures of bivariate function for their understanding of the theory. However, shape in the part where more than two kinds of functions intersect is considerably difficult drawing. We searches for the method of efficiently drawing the graphics by using the symbolic formula manipulations software in this paper.

1．はじめに

苫小牧高専では3年次より偏微分，重積分教材を講義する。その際，指導上難儀するのが2変数関数の具体的な図の提示である。関数の式を見ただけでは学生（教師も）はなかなかそのイメージをつかめない。問題がどの部分の体積や表面積を指しているのか，やはり図を描かなくてはならないが，黒板に描くには根気と技術を必要とする。だが，今は便利な道具，数式処理ソフトがある。ところが，関数によっては以外と適切なグラフィックスを描くことの難しさに気づく。つまり，メッシュ等で表現される3Dのグラフィックスは1つの関数についてはその形状を知るよい助けになるが複数の関数が組み合わさったもの等ではかえって分かりにくいものである。そこで学習者にとって分かりやすい3Dの図の作成について探ってみた。

2．研究の方法・内容

使用したソフトはMathematica3.0である。まずは具体例を教科書（裳華房　微分積分）より幾つか選んでみよう。

1）球面 $x^2+y^2+z^2=4$ と円柱面 $x^2+y^2=2x$ で囲まれた立体の体積 V を求めよ。
　ただし $x,\ y,\ z\geq 0$ とする。

2）xy 平面上の円 $x^2+y^2=4$ の周上の各点を通り z 軸に平行に引いた直線によってできる直円柱の $z\geq 0$ の部分を V とするとき，V が2つの平面 $z=0$，$z=y$ によって切り取られる立体の体積を求めよ。

3）放物柱面 $z=1-x^2$，円柱面 $x^2+y^2=1$ および平面 $z=0$ で囲まれた立体の体積。

4）円柱面 $x^2+y^2=4$ と $x^2+z^2=4$ で囲まれた立体の体積を求めよ。

いずれも立体の体積を求める問題である。実力のある学生ならどんな図形のどの部分の体積かある程度イメージがつかめるかもしれないが，数学が苦手のものには困難であろう。そして，むしろ我々教師は数学

＊　助教授　一般教科

の苦手な学生にもわかるように授業をすべきである。

そうなれば当然，参考に図を示すことが望まれる。ところが教科書も例題等では立体斜視図を載せている場合が多いが，問い，練習問題等では図は省略されている。やむを得ず学生は形をある程度想像しながら，あるいは形はよくわからないが計算だけはできるというのが現実なのではないか？そこで上の例から参考になる図を描く方法を探ってみよう。

> 例１　球面 $x^2+y^2+z^2=4$ と円柱面 $x^2+y^2=2x$ で囲まれた立体の体積 V を求めよ。
> ただし $x,\ y,\ z \geq 0$ とする。

そのまま数式処理ソフトで描けば球は図１，円柱は図２のようになり，その後イメージを膨らませることになる。あるいはそれらを合成した図として描かせるしかないが，図３は，わかりやすい図といえるだろうか？

```
g1=ParametricPlot3D[
    {2 Cos[t] Cos[u],2 Sin[t] Cos[u],2 Sin[u]},
    {t,0,2Pi},{u,-Pi/2,Pi/2}]
```

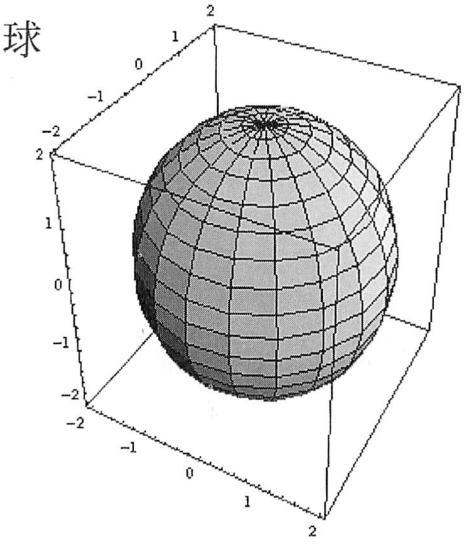


図１

```
g2=ParametricPlot3D[
    {Cos[t]+1, Sin[t],u},
    {t,0,2Pi},{u,-3,3},
ViewPoint->{2.599, 1.865, 1.104}]
```

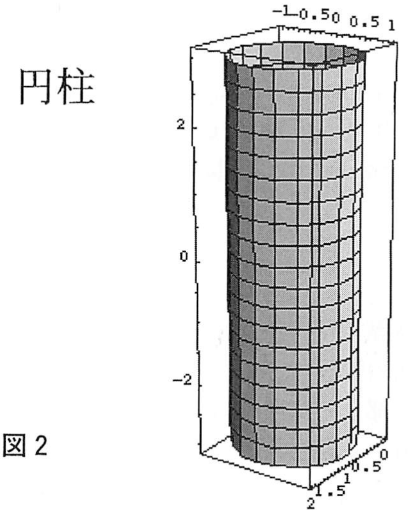


図２

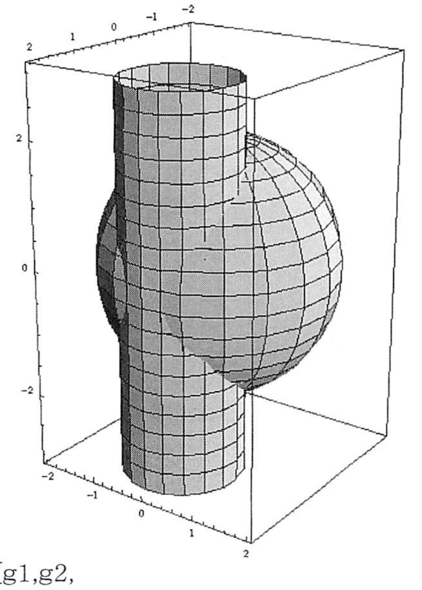


図３

```
Show[g1,g2,
ViewPoint->{2.599, 1.865, 1.104}]
```

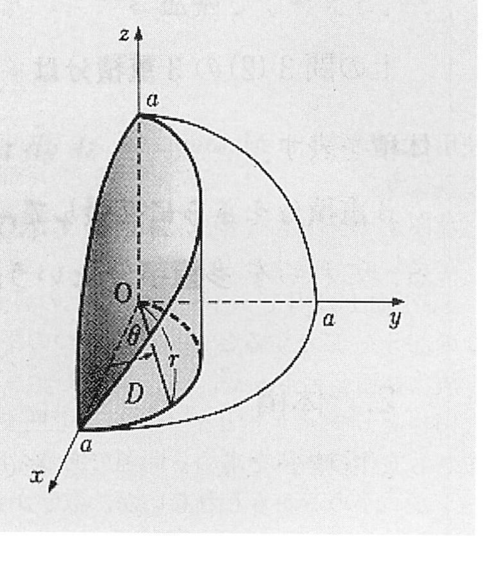


図４

```
g1=ParametricPlot3D[{{2Cos[t],2Sin[t],0},{0,
2Cos[t/2],2Sin[t/2]},{2Sin[t/2],0,
     2Cos[t/2]}},{t,0,2Pi},ViewPoint->{2.81
4, 1.077, 1.540}]

g2=ParametricPlot3D[{Cos[u]+1,Sin[u],0},
{u,0,Pi},
 ViewPoint->{2.814, 1.077, 1.540}]

g3=ParametricPlot3D[{Cos[v]+1,Sin[v],Sqrt
[4-Sin[v]^2-(Cos[v]+1)^2]},{v,0,Pi},
ViewPoint->{2.814, 1.077, 1.540}]

g4=Show[Graphics3D[{Hue[0.5],Line[{{0,-
2,0},{0,2,0}}],
     Line[{{-2,0,0},{2,0,0}}],Line[{{0,0,-2},{0,
0,2}}]}],
  ViewPoint->{2.814, 1.077, 1.540}]

Show[g1,g2,g3,g4]
```

図５

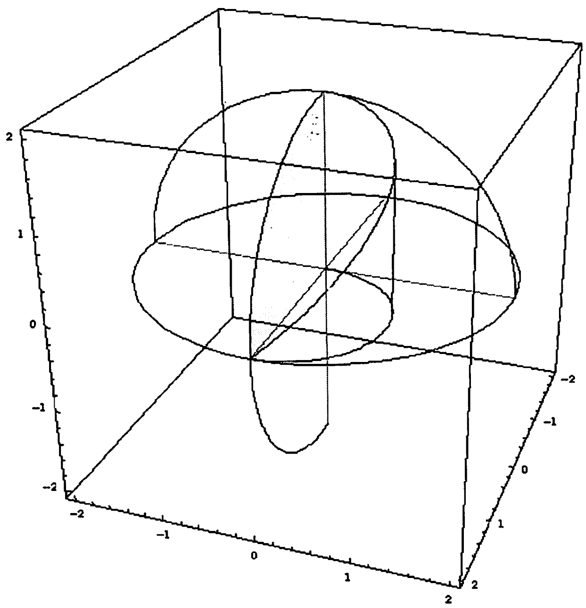


図４は教科書にのっている図である。実に簡潔でわかりやすいことに気づくと同時にどうやったらこんな図が描けるのか，疑問に思うだろう。10年前ならたぶん職人芸の世界だったのではないか，製図器などを駆使しながら一枚一枚描いたのだろう。しかし，現在は高性能のコンピュータならびに Mathematica 等の数式処理ソフトがある。なんとかこの程度の図なら描けるのではないかと考えた。そして，完成したのが図５である。しかし，この図を描くのには実はかなりの時間を要している。色々な部品（もちろん方程式になおしたもの）を一枚ずつ描き合成するのである。しかもどの視点から見たときに一番わかりやすいかなどを検討するのである。打ち込んでいるコマンドをみても時間がかかることは想像できるであろう。そこで少しでも効率化できないものかと考えた。問題としてでてきそうな図形の種類を調べると，せいぜい，平面（多面体を含む），球，円柱，放物柱面，楕円柱面，円錐，単葉双曲面，双葉双曲面，楕円面，楕円放物面，双曲放物面とそれらの組み合わせであることがわかる。そこで今回はよく登場する平面，球，円柱について取り上げてみよう。

※　平面（多面体を含む）について

平面はそれのみならメッシュ状でも形がわかるが，他の図形と組み合わせた場合メッシュではわかりにくい。むしろ透明で輪郭（いくつかの直線）がわかること，他の図形との交線（曲線多し）がわかることが重要である。

※　球について

球もそれのみならメッシュ状でも形がわかるが，他の図形と組み合わせた場合メッシュではわかりにくい。むしろ透明で輪郭（いくつかの円）がわかること，他の図形との交線（曲線）がわかることが重要である。

※　円柱について

円柱もそれのみならメッシュ状でも形がわかるが，他の図形と組み合わせた場合メッシュではわかりにくい。むしろ透明で輪郭（いくつかの円と直線）がわかること，他の図形との交線（曲線多し）がわかることが重要である。

前述の例よりもう１つ図の完成手順を詳しく追ってみよう。

例２　xy 平面上の円 $x^2+y^2=4$ の周上の各点を通り z 軸に平行に引いた直線によってできる直円柱の $z\geq 0$ の部分を V とするとき，V が２つの平面 $z=0$，$z=y$ によって切り取られる立体の体積を求めよ。

図６がテキストの図，図７が数式処理ソフトの図である。テキストの図は実に簡潔でわかりやすいが，数式処理ソフトの図もかなりわかりやすい図になっていると思う。それでは数式処理ソフトによって簡潔な図ができるまでを説明しよう。

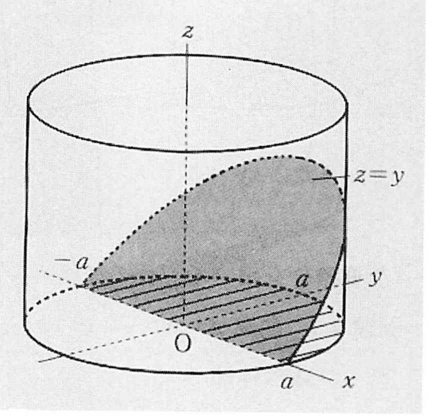


図６

１）平面の描画：平面は基本的には４本の直線で構成することであり，当然方程式によってその４本の直線を適当に選ぶ必要がある。

２）円柱の描画：円柱は底面（上下）等を構成するいくつかの円と２本の直線（円柱の側面をあらわす）を方程式によって適当に選ぶ必要がある。

３）交線の描画：交線は平面と円柱の方程式を連立させた曲線である。

４）合成：以上を別々に描き一枚の図として合成する。

５）その他：座標軸はあった方がわかりやすいので部品としてつねに用意しておく，ＢＯＸはないほうがよいときもある。

```
g11=ParametricPlot3D[{{2Cos[t],2Sin[t],2}
              ,{2Cos[t],2Sin[t],0},{2Cos[t],2Sin[t],3}},{t,0,
2Pi},
   ViewPoint->{5.000, -4.000, 3.000}]
g13=Show[Graphics3D[{Line[{{3,-3,-3},{-3,-3,-3}}],
Line[{{3,3,3},{-3,3,3}}],
      Line[{{-3,3,3},{-3,-3,-3}}],Line[{{3,3,3},{3,-3,-
3}}]}],
   ViewPoint->{5.000, -4.000, 3.000}]
g131=Show[
   Graphics3D[{Hue[0.1],
      Line[{{-1.24939009510884857`,-1.561737618886
06073`,
         3},{-1.24939009510884857`,-1.561737618886
06073`,0}}],
      Line[{{1.25,1.6,3},{1.25,1.6,0}}]}],ViewPoint->{5.0
00, -4.000, 3.000}]
g141=pointListPlot3D[
       Table[{2Cos[v],2Sin[v],2 Sin[v]},{v,0, Pi,Pi/50}]
,ViewPoint->{5.000, -4.000, 3.000}]
g0=Show[Graphics3D[{Hue[0.7],Line[{{0,-3,0},{0,3,
0}}],
      Line[{{-3,0,0},{3,0,0}}],Line[{{0,0,-3},{0,0,3}}]}],
   ViewPoint->{5.000, -4.000, 3.000}]
Show[g0,g11,g13,g141,g131,Boxed->False,
       ViewPoint->{5.000, -4.000, 3.000},Axes->None]
```

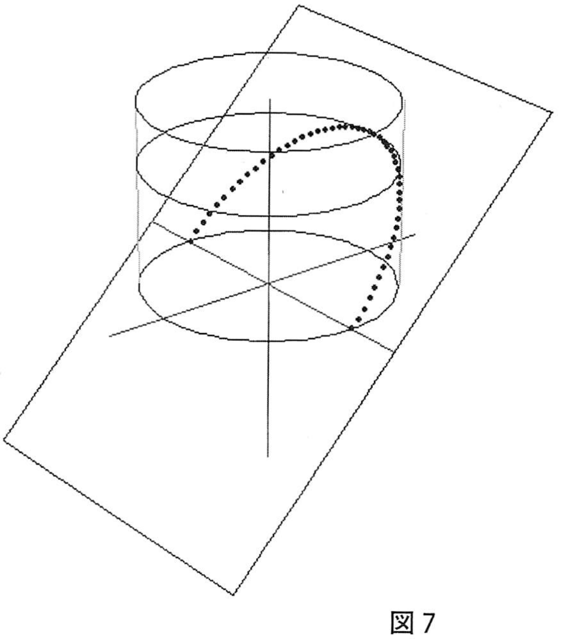


図７

表１に具体的な作業をまとめてみた。これらの一連の手順をマニュアル操作でやるには根気と時間が必要である。完全なプログラム化はできないまでも，種類別に図形を描く部分は自動化し部品として用意してみたいと考え，まず手順をアルゴリズム化してみた。それが表２である。ここでは代表的な図形を４種に絞り込んである。特に「球」については表３として取り上げてあるが，けっこう細かい考察が必要であることに気づかれるであろう。

表1

図７ができるまでのながれ

事前にマニュアル操作で部品等の概形を描き、おおよその形、大きさ、適切な視点等を把握しておく

平面の描画

① 適当な4頂点の決定
円柱を表す円の半径が2なので、それより少し大きめの平面を考えた。
∴ 4頂点 (3,3,3) , (3,−3,−3) , (−3,3,3) , (−3,−3,−3) を決定。

② 4頂点を直線で結ぶ

↓

円柱の描画

① 適当な円の決定
円柱を表す式（ $x^2+y^2=4$, z は任意の実数）と平面の方程式 $y=z$ より高さを z=0 , 2 , 3として円を3個描き円柱を表現

② 側面を表す2直線の決定
視点によってもっとも円柱の外側になるようにx , y 座標を計算高さを z=0 , 3 として4点を算出、2直線を描く

↓

交線の描画

① 連立方程式 $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=y \end{cases}$ を解く

② 解を、パラメータ表示 $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \\ z=2\sin t \end{cases}$ で表現

③ $0 \leq t \leq \pi$ の範囲で描く。わかりやすくするため破線とした。

↓

座標軸の描画

① 予め x , y , z 軸を示すための3直線を準備

② 問題の図形の大きさを考慮、原点からの距離を3とした。

↓

図の合成

① 以上の図形を合成して1つの図として完成

表2 アルゴリズムのイメージ

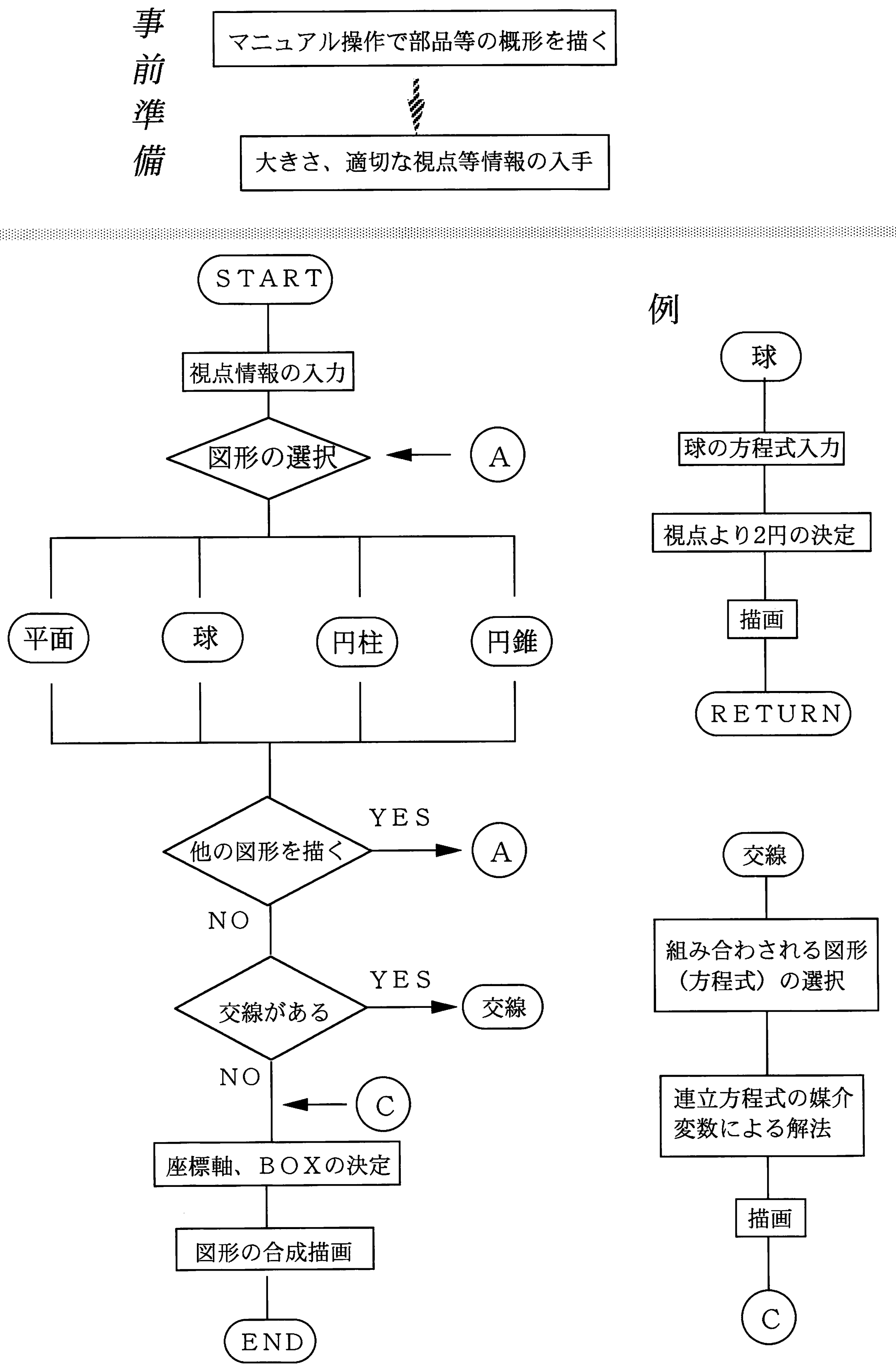
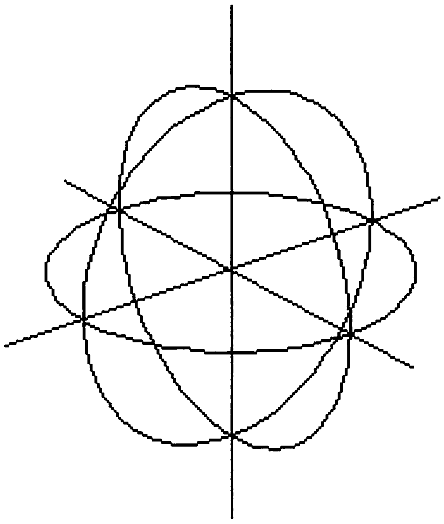


表３

球の描画法

図８



g1=ParametricPlot3D[{{0,2Cos[t],2Sin[t]},{2Cos[t],0,2Sin[t]},
{2Cos[t],2Sin[t],0}},{t,0,2Pi},ViewPoint->{5.000, -4.000, 3.000}]

図8は各座標軸に垂直な3円で球を表現した例だが、うまく球が表現できていない。

図９

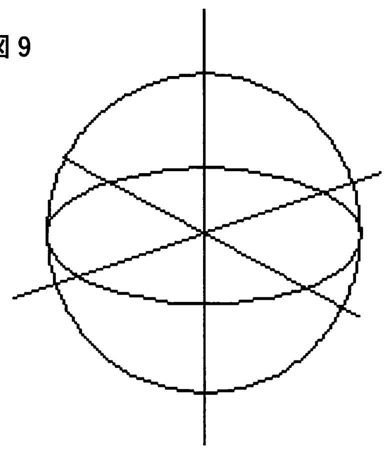
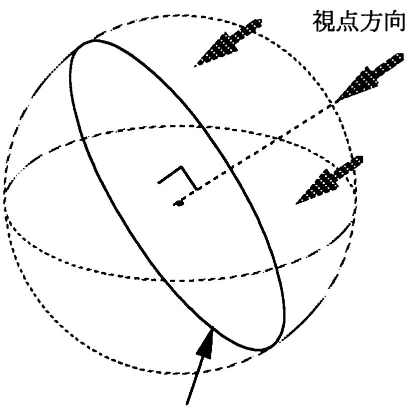


図9ではｘｙ平面上の円と球の輪郭を表す円の2円で球を表現してみた。球を表すにはこれが一番いいようだ。しかし、この輪郭を表す円は作図が意外と難しいことに気づく。

g1=ParametricPlot3D[{
2Cos[t],2Sin[t],0},{t,0,2Pi},
ViewPoint->{5.000, -4.000, 3.000}]

図10



例えば球の方程式が $x^2+y^2+z^2=4$
視点方向のベクトル成分が（５，－４，３）
であるとき（Mathematica では視点はその座標ではなくその方向を示すベクトルらしい）

図10のような視点方向に垂直な円を描くことになるがその方程式は次の連立方程式の解をパラメータで表現したものになる。

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ 5x-4y+3z=0 \end{cases}$$

g2 = ParametricPlot3D $\Big[$

$\{\{\frac{4}{205}\left(12t-5\sqrt{2}\sqrt{82-25t^2}\right)-3t/5,\ \frac{1}{41}\left(12t-5\sqrt{2}\sqrt{82-25t^2}\right),\ t\},$

$\{\frac{4}{205}\left(12t+5\sqrt{2}\sqrt{82-25t^2}\right)-3t/5,$

$\frac{1}{41}\left(12t+5\sqrt{2}\sqrt{82-25t^2}\right),\ t\}\},\ \{t,\ -1.811,\ 1.811\},$

ViewPoint $->$ $\{5,\ -4,\ 3\}\Big]$

3. まとめ

2変数関数や重積分の問題を授業で取り上げるとき図形の概形を示すことは明らかに学生の理解を助ける。学校によっては数学演習室を持っていて，いつでも授業で使え，数式処理ソフトも自由自在というところもあるかもしれないが，多くの高専ではＣＡＩ室，時間割の確保に頭を痛めているのではないか。手軽さからいえば概形を印刷したプリント配布である。それもなるべく短時間で作りたい。そんな道具を作りたいと考え，プログラム開発中である。次回の報告では是非完成させたい。

参考文献

1）スティーブン　ウルフラム：Mathematica Second Edition，アジソン　ウエスレイ，1994
2） T.グレイ/J.グリン：Mathematica ビギナーズガイド，アジソン　ウエスレイ・トッパン，1994
3） T.グレイ/J.グリン：Mathematica 数学の探索，アジソン　ウエスレイ・トッパン，1994
4）小池慎一：Mathematica 数式処理入門，技術評論社，1991
5） R.メーダー：Mathematica プログラミング技法，アジソン　ウエスレイ・トッパン，1994
6） I.ヴァルディ：Mathematica 計算の愉しみ，アジソン　ウエスレイ・トッパン，1992
7） D.C.M.バーバラ/C.T.J.ドッドソン：Mathematica 微積分入門，トッパン，1992
8）守谷良二：Mathematica で数学を（微積分編１），海文堂，1994
9）小林道正：Mathematica による関数グラフィックス，森北出版，1997
10）白石修二：例題で学ぶ Mathematica ［グラフィックス編］，森北出版，1996

（平成11年11月25日受理）