Paley-Wiener-Zygmundの定理に対する反例

新 谷 俊 忠*

要　旨　Paley-Wiener-Zygmundの定理は正しくない。

Abstract　Paley-Wiener-Zygmund theorem is not true.

確率論でよく知られている Paley-Wiener-Zygmund の定理〔1〕は20世紀の確率論の出発点となったものである。ところが近年になってスティルチェス型確率積分の収束が証明されて（Shintani〔2〕, Towghi〔3〕, Dudley-Norvaiša〔4〕），この定理に疑問が持たれるようになった。実際，伊藤〔1〕の証明(Dvoretky-Erdös-角谷による)から矛盾が出ることが示されている。(詳細はProceedings of A.M.S.に発表予定。)

此所では，よく知られている Banach-Mazurの定理〔5〕を用いて最近Hencl〔6〕に依って示された研究をもとにして，Paley-Wiener-Zygmundの定理が正しくないことを証明する。

以下，確率空間（Ω，α，P）の上で考えることにし，読者には現代確率論とルベーグ積分論と関数解析学の知識を仮定する。

Banach-Mazurの定理により

$L^1(\Omega, \alpha, P) \cong C([0,1]) \cong C(\triangle)$ 且

$L^1([0,1]\otimes\Omega, B, \mu) \cong C(\Delta)$ (homeomorphic, 同相)

ここで △は Cantor set, $\mu \equiv \nu \otimes P$

∴ 上のことから$\exists(t,\omega) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} s$ に依り$[0,1]\otimes\Omega$とΔは1：1に対応している。

∴ $f(t,\omega) \in L^1$とすると，上のことから

$f(t,\omega)$ on $[0,1]\otimes\Omega = \mathcal{g}(s)$ on Δ

$$\therefore \int_{[0,1]\otimes\Omega} |f(t,\omega)|\,d\mu \leqq \int_{\Delta} |\mathcal{g}(s)|\,d\mu=0 \quad (\because \mu(\Delta)=0)$$

$$\| $$

$$\int_{\Omega} \left\{ \int_{[0,1]} |f(t,\omega)|\,d\nu(t) \right\} dP \quad (\text{Fubiniの定理})$$

$$\therefore \omega\text{ごとに} \int_{[0,1]} |f(t,\omega)|\,d\nu(t) = 0$$

∴ ωごとに $f(t,\omega)=0$ on $[0,1]\setminus\Delta$

又，Δの上で$f(t,\omega) = \mathcal{g}(s)$は微分不可能（Hencl）

∴ $f(t,\omega)$は，ωごとに，除外集合Δの上で微分不可能で，$[0,1]\setminus\Delta$の上で微分可能である。

ここで$f(t,\omega)$をブラウン運動$B(t,\omega)$とすると，上のことは，$f(t,\omega)$が，ωごとに、$[0,1]$全体の上で微分不可能というPaley-Wiener-Zygmundの定理と矛盾する。

∴ Paley-Wiener-Zygmundの定理は正しくない。(*q.e.d.*)

*一般教科　数学　助教授

参考文献

〔1〕伊藤清：確率論，岩波，（1991）

〔2〕T.Shintani:L^p-convergence of an extended stochatic integral,ICM '94,Zürich(1994).

〔3〕N.Towghi:Stochastic integration of processes with finite generalized variations.I,Ann. Prob.23 (1995).

〔4〕R.M.Dudley and R.Norvaiša:Products integrals,Young integrals and p-variation,Lec.Note in Math. Springer,(1998).

〔5〕P.Wojtaszczyk:Banach spaces for analysts,Cambridge studies in advanced math.25,(1996).

〔6〕S.Hencl:Isometrical embeddings of separable Banach spaces into the set of nowhere approximately differentiable and nowhere Hölder functions,Proc.A.M.S.128(2000).

Department of Mathematics,Tomakomai National College of Technology,
Tomakomai,059-1275 Japan

(平成12年11月30日受理)