不定積分 $\int\sqrt{\dfrac{e^x}{5-e^x}}\,dx$

菅　原　道　弘*・金　田　　嶢**・小　鹿　正　夫***

Indefinite integral $\int\sqrt{\dfrac{e^x}{5-e^x}}\,dx$

Michihiro SUGAWARA, Takashi KANETA and Masao KOSHIKA

Adstract

We have selected some examples of indefinite integrals which have different forms for the answers. Moreover we have had the egualities (1) and (2).

(1) $\mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{2}{5}e^x-1\right)=2\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{\dfrac{e^x}{5}}-\dfrac{\pi}{2}$

(2) $\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\dfrac{e^x}{5-e^x}}=\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{\dfrac{e^x}{5}}$

1. はじめに

関数$f(x)$は連続な関数とする。このとき$f(x)$の不定積分$\int f(x)\,dx$は計算の仕方により形が異なって求まることがある。しかし，それらは単に見掛け上異なるか，または，定数の違いがあるのみである。

平均値の定理により，

「関数$f(x)$が区間Ｉで微分可能でつねに$f'(x)=0$であるならば，$f(x)$は区間Ｉで定数関数である。」ことが証明され，上記の事柄が保証される。

此の度，我々は学生の理解を深めるためのいくつかの例をとりあげ検討した。

2. いくつかの例

積分定数については，これを省略する。

2．1　基本的な例

〔例１〕次の不定積分を求めよ。（以下この部分を省略する。）

$$\mathrm{I}=\int(x+1)^2dx$$

（解１）$\mathrm{I}=\int(x^2+2x+1)\,bx=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+x$

（解２）$\mathrm{I}=\dfrac{1}{3}(x+1)^3$

〔例２〕$\mathrm{I}=\int\sin x\cos x\,dx$

（解１）$\mathrm{I}=\dfrac{1}{2}\sin^2x$

（解２）$\mathrm{I}=-\dfrac{1}{2}\cos^2x$

（解３）$\mathrm{I}=\dfrac{1}{2}\int\sin 2x\,dx=-\dfrac{1}{4}\cos 2x$

〔例３〕$\mathrm{I}=\int\dfrac{dx}{1-\cos x}$

（解１）$\mathrm{I}=\dfrac{1}{2}\int\mathrm{cosec}^2\dfrac{x}{2}dx=-\cot\dfrac{x}{2}$

（解２）$\mathrm{I}=\int\dfrac{1+\cos x}{\sin^2x}dx=\int\left(\mathrm{cosec}^2x+\dfrac{\cos x}{\sin^2x}\right)dx$

$$=-\cot x-\frac{1}{\sin x}$$

ここで $-\cot x-\dfrac{1}{\sin x}=-\dfrac{\cos x+1}{\sin x}=-\dfrac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$=-\cot\frac{x}{2}$$

〔例４〕$\mathrm{I}=\int\sin^3x\,dx$

（解１）$\mathrm{I}=\int(1-\cos^2x)\sin x\,dx=-\cos x+\dfrac{1}{3}\cos^3x$

（解２）$\mathrm{I}=\int\sin x\,\sin^2x\,dx$

*　教　授　一般教科
**　教　授　北海道工業大学
***　教　授　一般教科

$$= -\cos x\sin^2 x+\int \cos x\cdot 2\sin x\cos x dx$$

$$= -\cos x\sin^2 x+2\int (1-\sin^2 x)\sin x dx$$

$$= -\cos x\sin^2 x+2\int \sin x dx-2\mathrm{I}$$

$$\therefore\ \mathrm{I} = -\frac{1}{3}\cos x\sin^2 x - \frac{2}{3}\cos x$$

（解３） $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ なので

$$\mathrm{I} = \int (\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x)dx$$

$$= -\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{12}\cos 3x$$

ここで $-\frac{1}{3}\cos x\sin^2 x - \frac{2}{3}\cos x$

$$=-\frac{1}{3}\cos x(1-\cos^2 x)-\frac{2}{3}\cos x$$

$$=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x$$

また，$-\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{12}\cos 3x$

$$=-\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{12}(4\cos^3 x-3\cos x)$$

$$= -\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x$$

以上例１，例２については，定数の違いしかないことを学生達は容易に理解する。例４については３倍角の公式があやふやで，少し困る。

２．２　中程度の例

〔例１〕 $\mathrm{I} = \int \frac{dx}{\sin x}$

（解１） $I=\int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$=\int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}dx=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

（解２） $\tan\frac{x}{2}=\mathrm{t}$ とおくと $\sin x=\frac{2\mathrm{t}}{1+\mathrm{t}^2}$

$$dx=\frac{2\mathrm{t}}{1+\mathrm{t}^2}d\mathrm{t}$$

$$\therefore \mathrm{I} = \int\frac{d\mathrm{t}}{\mathrm{t}} = \log|\mathrm{t}| = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

（解３） $\mathrm{I} = \int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$ ここで $\cos x=\mathrm{t}$ とおくと

$$\mathrm{I} =\int\frac{d\mathrm{t}}{\mathrm{t}^2-1}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{\mathrm{t}-1}{\mathrm{t}+1}\right|=\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

ここで

$$\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{1}{2}\log\tan^2\frac{x}{2}= \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

〔例２〕 $\mathrm{I} = \int \sin^2 x\cos^2 x dx$

（解１） $\mathrm{I} =\frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx=\frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)dx$

$$=\frac{1}{8}(x-\frac{1}{4}\sin 4x)$$

（解２） $\mathrm{I} = \int \sin^2 x\cos x\cdot\cos x dx$

$$=\frac{1}{3}\sin^3 x\cos x-\int\frac{1}{3}\sin^3 x(-\sin x)dx$$

$$=\frac{1}{3}\sin^3 x\cos x+\frac{1}{3}\int\sin^2 x(1-\cos^2 x)dx$$

$$=\frac{1}{3}\sin 3x\cos x+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx-\frac{1}{3}\mathrm{I}$$

$$\therefore\ \mathrm{I} =\frac{1}{4}\int\sin^3 x\cos x+\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}\sin x\cos x$$

ここで

$$\frac{1}{8}(x-\frac{1}{4}\sin 4x)=\frac{1}{8}(x-\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x)$$

$$=\frac{1}{8}\{x-\sin x\cos x(1-2\sin^2 x)\}$$

$$=\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x+\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}\sin x\cos x$$

〔例３〕 $\mathrm{I} = \int \cos^4 x dx$

（解１）漸化式 $\mathrm{I}_n=\int\cos^n x dx$

$$=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2}(n\geqq 2)$$

を用いると，

$$\mathrm{I} =\frac{1}{4}\cos^3 x\sin x+\frac{3}{4}(\frac{1}{2}\sin x\cos x+\frac{1}{2}\mathrm{I}_0)$$

$$=\frac{1}{4}\sin x\cos^3 x+\frac{3}{8}\sin x\cos x+\frac{3}{8}x$$

（解２） $\mathrm{I} = \int\cos x\cos^3 x dx$

$$=\sin x\cos^3 x-\int\sin x\cdot 3\cos^2 x(-\sin x)dx$$

$$=\sin x\cos^3 x+3\int(1-\cos^2 x)\cos^2 x dx$$

$$=\sin x\cos^3 x+3\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx-3\mathrm{I}$$

$$\therefore \mathrm{I}=\frac{1}{4}\sin x\cos^3 x+\frac{3}{8}x+\frac{3}{8}\sin x\cos x$$

（解３） $\mathrm{I}=\sin x\cos^3 x-\int \sin x\cdot 3\cos^2 x(-\sin x)\,dx$

$$=\sin x\cos^3 x+3\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$$

$$=\sin x\cos^3 x+\frac{3}{8}\int(1-\cos 4x)\,dx$$

$$=\sin x\cos^3 x+\frac{3}{8}x-\frac{3}{32}\sin 4x$$

（解４） $\mathrm{I}=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$$=\frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx$$

$$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$$

ここで　$\sin x\cos^3 x+\frac{3}{8}x-\frac{3}{32}\sin 4x$

$$=\sin x\cos^3 x+\frac{3}{8}x-\frac{3}{16}\sin 2x\cos 2x$$

$$=\sin x\cos^3 x+\frac{3}{8}x-\frac{3}{16}\cdot 2\sin x\cos x\cdot(2\cos^2 x-1)$$

$$=\frac{1}{4}\sin x\cos^3 x+\frac{3}{8}x+\frac{3}{8}\sin x\cos x$$

また　$\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$

$$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}\sin x\cos x+\frac{1}{16}\cdot 2\sin x\cos x\cdot(2\cos^2 x-1)$$

$$=\frac{3}{8}x+\frac{3}{8}\sin x\cos x+\frac{1}{4}\sin x\cos^3 x$$

〔例４〕 $\mathrm{I}=\int\frac{\cos^5 x}{1-\sin x}dx$

（解１） $\mathrm{I}=\int\frac{(1-\sin^2 x)^2\cos x}{1-\sin x}dx$

ここで　$\sin x=\mathrm{t}$とおくと

$$\mathrm{I}=\int(1+\mathrm{t}-\mathrm{t}^2-\mathrm{t}^3)\,dx$$

$$=\mathrm{t}+\frac{1}{2}\mathrm{t}^2-\frac{1}{3}\mathrm{t}^3-\frac{1}{4}\mathrm{t}^4$$

$$=\sin x+\frac{1}{2}\sin^2 x-\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{4}\sin^4 x$$

（解２） $\mathrm{I}=\int\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)\cos^3 x}{1-\sin x}dx$

$$=\int(\cos^3 x+\cos^3 x\sin x)\,dx$$

$$=\int\left\{(1-\sin^2 x)\cos x+\cos^3 x\sin x\right\}dx$$

$$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{4}\cos^4 x$$

ここで　$\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{4}\cos^4 x$

$$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{4}(1-\sin^2 x)^2$$

$$=\sin x+\frac{1}{2}\sin^2 x-\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{4}\sin^4 x-\frac{1}{4}$$

〔例５〕 $\mathrm{I}=\int\frac{\cos x}{1-\cos x}dx$

（解１） $\mathrm{I}=\int\left(-1+\frac{1}{1-\cos x}\right)dx$

$$=\int\left(-1+\frac{1}{2}\mathrm{cosec}^2\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=-x-\cot\frac{x}{2}$$

（解２） $I=\int\frac{1-2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{2}\mathrm{cosec}^2\frac{x}{2}-1\right)dx$$

$$=-\cot\frac{x}{2}-x$$

（解３） $\mathrm{I}=\int\frac{(1+\cos x)\cos x}{\sin^2 x}dx$

$$=\int(\cot x\,\mathrm{cosec}\,x+\cot^2 x)\,dx$$

$$=\int(\cot x\,\mathrm{cosec}\,x+\mathrm{cosec}^2 x-1)\,dx$$

$$=-\mathrm{cosec}\,x-\cot x-x$$

ここで　$-\mathrm{cosec}\,x-\cot x-x$

$$=-\frac{1+\cos x}{\sin x}-x$$

$$=-\cot\frac{x}{2}-x$$

以上については，積分そのものも容易ではない。その上，解が異なる形で求まったとき，それらの間の関係を調べるにも根気が要る。学生達は別解よりも一番楽な解法に関心を持つ。

2．3　やや高度の例

〔例1〕 $I=\int\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}dx$

(解1) 漸化式 $I_{(m,n)}=\int \sin^m x\cos^n x dx$

$$=\frac{1}{m+n}\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{m+n}I(m,n-2)\quad (m+n\neq 0)$$

$$I(m,n)=\frac{1}{m+1}\sin^{m+1}x\cos^{n+1}x+\frac{m+n+2}{m+1}I(m+2,n)\quad (m\neq -1)$$

を利用して　$I=I(-2,4)$

$$=\frac{1}{2}(\sin x)^{-1}\cos^3 x+\frac{3}{2}\left\{-(\sin x)^{-1}\cos 3x+\frac{2}{-1}I(0,2)\right\}$$

$$=\frac{\cos^3 x}{2\sin x}-\frac{3\cos^3 x}{2\sin x}-3\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx$$

$$=-\frac{\cos^3 x}{\sin x}-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}\sin 2x$$

(解2) $I=\int\cos^2 x\cot^2 x dx$

$$=\int(1-\sin^2 x)\cot^2 x dx$$

$$=\int(\cot^2 x-\cos^2 x)dx$$

$$=\int(\mathrm{cosec}^2 x-1-\frac{1+\cos 2x}{2})dx$$

$$=-\cot x-\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x$$

ここで　$-\frac{\cos^3 x}{\sin x}-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}\sin 2x$

$$=\frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin x}-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}\sin 2x$$

$$=-\cot x+\sin x\cos x-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}\sin 2x$$

$$=-\cot x-\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x$$

〔例2〕 $I=\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

(解1) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=t$ とおくと $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}$$

$$\therefore\quad I=-4\int\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$$

ここで　$t=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\sin\theta=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ なので

$$I=-4\int\frac{\tan^2\theta}{\frac{1}{\cos^2\theta}}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=-4\int\sin^2\theta d\theta=-2\int(1-\cos 2\theta)d\theta$$

$$=-2\theta+\sin 2\theta$$

$$=-2\mathrm{Tan}^{-1}t+2\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$=-2\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1+\frac{1-x}{1+x}}$$

$$=\sqrt{1-x^2}-2\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

(解2) $I=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

$$=\mathrm{Sin}^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$$

ここで $\mathrm{Sin}^{-1}x=\alpha\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと $\sin\alpha=x$

$$\therefore\quad\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\therefore\quad\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore\quad\sqrt{1-x^2}-2\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$=\sqrt{1-x^2}+\mathrm{Sin}^{-1}x-\frac{\pi}{2}$$

〔例3〕 $I=\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$

(解1) $x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$I=\int\frac{\sec^2\theta d\theta}{\tan\theta\sec\theta}=\int\frac{1}{\sin\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\log\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

(解2) $x=\frac{1}{t}$　とおくと

$$I=-\int\frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}\cdot\frac{1}{t^2}dt$$

$$=\mp\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\mp\log|t+\sqrt{1+t^2}|$$

$$=\mp\log\left|\frac{1\pm\sqrt{1+x^2}}{x}\right|=\log\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

ただし，複号は$x>0$のとき上の符号を，$x<0$のとき下の符号をとる。

（解３）$\sqrt{x^2+1}=t-x$すなわち $x=\dfrac{t^2-1}{2t}$ とおくと

$$I=\int\frac{1}{\frac{t^2-1}{2t}\cdot\frac{t^2+1}{2t}}\cdot\frac{t^2+1}{2t}dt$$
$$=2\int\frac{1}{t^2-1}dt=\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$$
$$=\log\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{x+\sqrt{x^2+1}+1}\right|$$

ここで

$$\frac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{x+\sqrt{x^2+1}+1}$$
$$=\frac{\{\sqrt{x^2+1}+(x-1)\}\{\sqrt{x^2+1}-(x-1)\}}{\{\sqrt{x^2+1}+(x+1)\}\{\sqrt{x^2+1}-(x-1)\}}$$
$$=\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$$
$$\therefore\quad \log\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{x+\sqrt{x^2+1}+1}\right|=\log\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

以上の例はなかなか難しい。たとえば，例３では解１を理解する学生は半減する。これらは数学の得意な学生用の練習問題と考える。

３．不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{\frac{e^x}{5-e^x}}\,dx$ について

ここで比較的扱い易い例を１つ加えたい。

〔例〕 $I=\displaystyle\int\sqrt{\frac{e^x}{5-e^x}}\,dx$

（解１） $e^x=t$ とおくと

$$I=\int\sqrt{\frac{t}{5-t}}\,\frac{1}{t}\,dt=\int\frac{dt}{\sqrt{5t-t^2}}$$
$$=\int\frac{dt}{\sqrt{(\frac{5}{2})^2-(t-\frac{5}{2})^2}}=\mathrm{Sin}^{-1}\frac{t-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}}$$
$$=\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{2}{5}e^x-1\right)$$

（解２） $\dfrac{1}{5}e^x=t$ とおいても同じ結果となる。

（解３） $\sqrt{\dfrac{e^x}{5}}=t$ とおくと $e^x=5t^2$

$$\therefore\quad I=\int\sqrt{\frac{5t^2}{5-5t^2}}\cdot\frac{10t}{5t^2}\,dt$$
$$=\int\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}dt=2\,\mathrm{Sin}^{-1}t=2\,\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{\frac{e^x}{5}}$$

（解４） $\sqrt{\dfrac{e^x}{5-e^x}}=t$ とおくと $e^x=\dfrac{5t^2}{1+t^2}$

$$\therefore\quad I=\int t\cdot\frac{2}{t(1+t^2)}dt=2\,\mathrm{Tan}^{-1}t$$
$$=2\,\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\frac{e^x}{5-e^x}}$$

さてここで，次の２つの等式が成り立つことを証明する。

(1) $\quad\mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{2}{5}e^x-1\right)=2\,\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{\dfrac{e^x}{5}}-\dfrac{\pi}{2}$

（証明）

まず $\dfrac{e^x}{5-e^x}>0$ より $0<e^x<5$ $\therefore 0<\dfrac{e^x}{5}<1$…①

従って，$0<\sqrt{\dfrac{e^x}{5}}<1$

次に $\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{\dfrac{e^x}{5}}=\theta$ ($0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$…②)とおくと

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{e^x}{5}}$$
$$\therefore\quad \sin\left(2\,\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{\frac{e^x}{5}}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-\cos2\theta=2\sin^2\theta-1=\frac{2}{5}e^x-1$$

①より $-1<\dfrac{2}{5}e^x-1<1$，②より $-\dfrac{\pi}{2}<2\theta-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore\quad 2\,\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{\frac{e^x}{5}}-\frac{\pi}{2}=\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{2}{5}e^x-1\right)$$

（証明終）

(2) $\quad\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\dfrac{e^x}{5-e^x}}=\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{\dfrac{e^x}{5}}$

（証明） $\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\dfrac{e^x}{5-e^x}}=\theta$ ($0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$) とおくと

$$\tan\theta=\sqrt{\frac{e^x}{5-e^x}}$$
$$\therefore\quad \cos\theta=\sqrt{\frac{5-e^x}{5}}，\ \sin\theta=\sqrt{\frac{e^x}{5}}$$
$$\therefore\quad \theta=\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{\frac{e^x}{5}}$$
$$\therefore\quad \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\frac{e^x}{5-e^x}}=\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{\frac{e^x}{5}}$$

（証明終）

この例の積分は比較的扱い易い。解１は素直な解法で多くの学生の発想に適う。ただ $\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{5t-t^2}}$ でやや躓く。解３の置き換えはなかなか気づかな

い。しかし鮮やかに解けるので感動する。解4の置換は途中やや大変であるが，積分は公式通りとなる。積分を実行して得られたこれら3つの関数の間の関係を調べるのは，なかなか困難である。証明や逆三角関数に対する学生の苦手意識は強い。

4. おわりに

現在本校では，授業科目「微分積分」を2学年で4単位，3学年で2単位設置している。そのうち不定積分，定積分の基本については，2学年後期の前半で9週間程度の扱いである。従って今ここで取り上げた例をすべて扱うことは困難である。ただ，比較的数学の得意な学生用教材としては面白い。より多くの学生に別解を作る（色々な考え方のある）楽しみを味わってもらいたいし，出てきた解の形が異なっていても，落ち着いて検証する態度を養うことが出来れば良いと考えている。

参考文献

1）矢野，石原編「微分積分」裳華房（1994）
2）三村編「大学演習微分積分学」裳華房（1996）
3）田河他「微分積分Ｉ」大日本図書（1998）
4）田代編「新高専の数学2問題集」森北出版（1982）
5）渡辺「新訂初等微分積分学」裳華房（1971）
6）一松「微分積分学入門第一課」近代科学社（1990）
7）田代「初等微分積分学」裳華房（1986）
8）S.Lang「A First Course in Calculus」Springer-Verlag(1986)

（平成12年11月30日受理）