

距離型ファジィ推論法を用いたモデルに基づくファジィ制御

木 村 太*・王 碩 玉**・土 谷 武 士***

Fuzzy Control Systems Using A Distance-type Fuzzy Reasoning Method

Futoshi KIMURA, Shouyu WANG and Takeshi TSUCHIYA

Abstract

A fuzzy reasoning method called direct approach is used for fuzzy control systems. But this method contains some problems. A distance-type fuzzy reasoning method is based on the calculated distance between two fuzzy sets. This method has some advantages over the conventional method. In this paper, we applied the distance-type fuzzy reasoning method to TS fuzzy control systems. The stability of systems is guaranteed for sparse fuzzy rule sets.

1. はじめに

現在、非線形システムの動特性に基づいたファジィ制御系設計法、いわゆるモデルに基づくファジィ制御の研究が数多く行われている¹⁾。この手法は、非線形システムを局所的に線形化してそれらをファジィ規則によって表現し、並列分散的補償により、制御系の安定性を保証するファジィ制御器を設計する方法である。

この制御におけるファジィ推論法には、そのほとんどが適合度型ファジィ推論を用いている。しかし、適合度型では前件部ファジィ集合が疎である場合、前件部変数が空集合にあるときは、全ルールにおいて適合度がゼロとなり適切な推論結果が得られない。

本研究で用いる距離型ファジィ推論法は、ファジィ集合間の距離に基づく推論であり、凸性・漸近性・分離性という3つの特徴を有するため、上記の問題点を解決できる²⁾。

本稿では、後件部が状態方程式で表現されているファジィモデル(TSファジィモデル)に距離型ファジィ推論法を適用し、その有効性を検討する。

2. 距離型ファジィ推論法

2. 1 距離の定義

いま、図1に示すような有界凸のファジィ集合

AとBとの距離は(1)式で定義される。

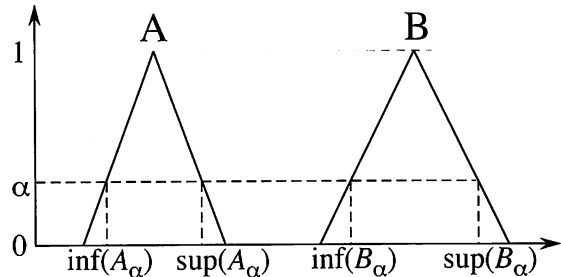


図1 α-レベル集合

$$d(A,B)=\left[\int_0^1\left|\inf(A_\alpha)-\inf(B_\alpha)\right|^pd\alpha\right]^{1/p} + \left[\int_0^1\left|\sup(A_\alpha)-\sup(B_\alpha)\right|^pd\alpha\right]^{1/p} \tag{1}$$

ただし、 $1\leq p<\infty$ であり、 $\sup(A_\alpha)$ と $\inf(A_\alpha)$ はそれぞれファジィ集合Aにおける α -レベル集合 A_α の上限と下限を表す。ファジィ集合Bについても同様である。

また、 $d(\cdot,\cdot)$ はファジィ集合間の距離を定義する実数関数であり、距離関数と呼ばれる。

2. 2 推論方法

(2)式に示すようなif-thenルールにおいて、推論結果は次の3つのステップにより求められる。なお、距離がゼロとなるルールが2つ以上存在するような矛盾したルールはないものとする。

$$\text{Rule } i: \text{ If } x_1 \text{ is } A^{i1} \text{ and } x_2 \text{ is } A^{i2} \dots \text{ and } x_m \text{ is } A^{im} \\ \text{ then } y = B^i \tag{2}$$

ただし、 $i=1,2,\dots,n$, n はルール数、 $j=1,2,\dots,m$, m は前件部変数の数である。また A^{ij} 、 B^i はそれぞれ

* 助 手 電気電子工学科
** 助教授 高知工科大学
*** 教 授 北海道大学

れ前件部および後件部のファジィ集合であり、 x_j は前件部変数である。

Step1: 個々のルールにおいて前件部 A^i と変数 x_j から距離 d_i を(3)式により計算する。

$$d_i = \sum_{j=1}^m d(A^i, x_j) \quad (3)$$

Step2: 次のように推論結果の α -レベル集合を求める。

$$B_\alpha = [\inf(B_\alpha), \sup(B_\alpha)] \quad (4)$$

$$\inf(B_\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^n \left[\inf(B_\alpha^i) \prod_{j=1, j \neq i}^n d_j \right]}{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n d_j} \quad (5)$$

$$\sup(B_\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^n \left[\sup(B_\alpha^i) \prod_{j=1, j \neq i}^n d_j \right]}{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n d_j} \quad (6)$$

Step3: 図2に示す合成定理(分解定理)により、最終的な推論結果 y を(7)式から求める。

$$y = \bigcup_{\alpha \in \{0,1\}} \alpha \cdot B_\alpha \quad (7)$$

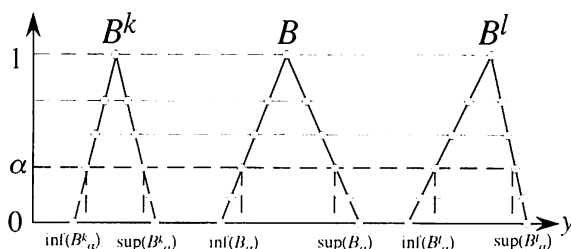


図2 後件部と推論結果

3. 距離型推論法を用いたファジィモデル

3.1 ファジィモデル

1入力1出力の非線形システムを、次式のような後件部が状態方程式のファジィモデル(TSファジィモデル)で表す。

$$\text{Rule } i: \text{ If } x_1(t) \text{ is } A^i \text{ and } x_2(t) \text{ is } A^{i2} \dots \text{ and } x_m(t) \text{ is } A^{im} \\ \text{ then } \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_i u(t) \quad (8)$$

ただし、 $i=1, 2, \dots, n$, n はルール数、 $j=1, 2, \dots, m$, m は状態変数の数であり、 A^i は前件部のファジィ集合である。また、 $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)]^T$

$\mathbf{x}(t)$ は状態変数、 $u(t)$ は制御入力であり、 $\mathbf{A}_i \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $\mathbf{b}_i \in \mathbf{R}^{m \times 1}$ である。

距離型推論法を適用したファジィモデルの推論結果は(9)式で求められる。

$$\mathbf{x}(t+1) = \frac{\sum_{i=1}^n \left[\{ \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_i u(t) \} \prod_{j=1, j \neq i}^n d_j \right]}{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n d_j} \quad (9)$$

$$d_i = \sum_{j=1}^m d(A^i, x_j(t)) \quad (10)$$

3.2 適用例

次のファジィモデルに適用した例を示す。

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$$

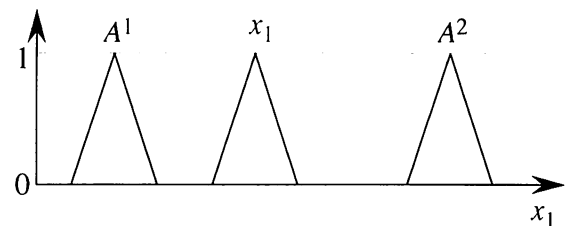
Rule i : If $x_1(t)$ is A^i Then $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_i u(t)$

ここで、 $i=1, 2$ (2ルール)、 $\mathbf{A}_i \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$, $\mathbf{b}_i \in \mathbf{R}^{2 \times 1}$

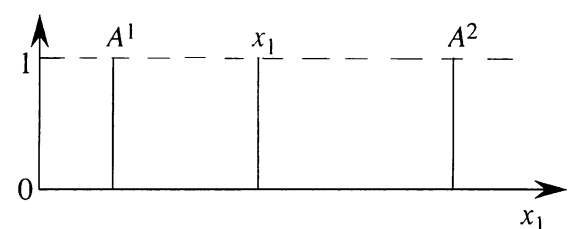
このときの推論結果は(11)式となる。

$$\mathbf{x}(t+1) = \frac{d_1 \{ \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_1 u(t) \} + d_2 \{ \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_2 u(t) \}}{d_1 + d_2} \quad (11)$$

ただし、 $d_1 = d(A^1, x_1(t))$, $d_2 = d(A^2, x_1(t))$



(a) 三角形メンバーシップ関数



(b) シングルトンメンバーシップ関数

図3 前件部ファジィ集合

いま、図3(a)に示す前件部ファジィ集合において x_1 がファジィ集合 A^1 に近づいた場合を考えると、距離値 d_1 は小さくなり、 d_2 は大きくなるので、推論結果はルール1のシステムに近づく。さらに、 x_1 がファジィ集合 A^1 に完全に重なったときは、距離値 d_1 は0となるため、推論結果はルール1のシステムとなり、modus ponensを満たす。

また、図3のようにファジィ集合が疎な場合、適合度型推論では x_1 が空集合にあるため、適切

な推論はできない。しかし、距離型では、ファジィ集合間での距離値が存在するため、推論が可能である。

さらに、制御システムでは状態変数は図3(b)のようにファジィ集合ではなく、1つの値として与えられるので、このときには前件部ファジィ集合をシングルトンメンバーシップ関数とすれば、modus ponensを満たすことができる。

4. ファジィ制御系の設計

従来のフィードバック制御と同様、ファジィ制御系においてもフィードバックゲインにより安定性が保証される。ゲインの決定には、リアプノフの直接法に基づくもの³⁾とLMIによる方法⁴⁾があるが、ここでは基本的な安定条件を導くため、前者の方法について述べる。

4.1 ファジィ制御器

並列分散的補償の考え方から、1つのファジィモデルに対して1つのファジィ制御器を次のように設ける。

Rule i : If $x_1(t)$ is A^1 and $x_2(t)$ is A^2 ...and $x_m(t)$ is A^{im}
then $u(t) = f_i x(t)$ (12)

ただし、

f_i はフィードバックゲイン $f_i = [f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{im}]$ であり閉ループ系 $(A_i + b_i f_i)$ の固有値から計算される。

最終的な制御入力(13)式から得られる。

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \left\{ f_i x(t) \prod_{j=1, j \neq i}^n d_j \right\}}{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n d_j} \quad (13)$$

4.1 安定条件

ファジィ制御系全体のモデルは、(13)式を(9)式に代入してまとめると、次式で表される。

$$x(t+1) = \frac{\sum_{i=1}^{n(n+1)/2} \{ v_i H_i x(t) \}}{\sum_{i=1}^{n(n+1)/2} v_i} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} H_{\sum_{i=1}^n (r-1)+i} &= G_{ij} & i=j \\ H_{\sum_{i=1}^n (r-1)+i} &= (G_{ij} + G_{ji})/2 & i < j \\ v_{\sum_{i=1}^n (r-1)+i} &= \prod_{k=1, k \neq i}^n d_k^2 & i=j \\ v_{\sum_{i=1}^n (r-1)+i} &= 2 \prod_{k=1, k \neq i}^n d_k \cdot \prod_{l=1, l \neq i}^n d_l & i \neq j \\ G_{ij} &= A_i + b_i f_j, \quad i, j \neq 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

(14)式とリアプノフの直接法から、安定条件が導かれる。

【安定条件】

ファジィ制御系は(16)式を満たす共通の正定対称行列 P が存在すれば、大域的漸近安定となる。

$$H_i^T P H_i - P < 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n(n+1)/2\} \quad (16)$$

[証明]

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$$

なる関数を考える。この関数は次の性質を満たす。

- (a) $V(0) = 0$
- (b) $V(x(t)) > 0$ 、ただし $x(t) \neq 0$
- (c) $\|x(t)\| \rightarrow \infty$ に対して $V(x(t))$ は無限大になる。

次に、

$$\begin{aligned} \Delta V(x(t)) &= V(x(t+1)) - V(x(t)) \\ &= x^T(t+1) P x(t+1) - x^T(t) P x(t) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n(n+1)/2} \{ v_i H_i x(t) \}^T}{\sum_{i=1}^{n(n+1)/2} v_i} P \frac{\sum_{i=1}^{n(n+1)/2} \{ v_i H_i x(t) \}}{\sum_{i=1}^{n(n+1)/2} v_i} - x^T(t) P x(t) \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n(n+1)/2} v_i^2 x^T(t) (H_i^T P H_i - P) x(t) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i < j} v_i \cdot v_j x^T(t) \{ H_i^T P H_j - P + H_j^T P H_i - P \right. \\ &\quad \left. - (H_i - H_j)^T P (H_i - H_j) \} x(t) \right] / \left[\sum_{i=1}^{n(n+1)/2} \sum_{j=1}^{n(n+1)/2} v_i \cdot v_j \right] \quad (17) \end{aligned}$$

(16)式を満たせば(17)式の右辺第2項(下線部)も負となるため、次のことが成り立つ。

- (d) $\Delta V(x(t)) < 0$

従って(a)~(d)の条件を満たすので、リアプノフの安定定理より $V(x(t))$ はリアプノフ関数となり、ファジィ制御系は大域的漸近安定となる。 ■

5. 設計例

次のようなファジィモデルに対する設計例を示す。

ファジィモデル

$$x(t) = [x(t), x(t-1)]^T$$

Rule i : If $x(t)$ is A^i then $x(t+1) = A_i x(t) + b_i u(t)$

ここで、 $i=1, 2$ (ルール数: 2)

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2.178 & -0.588 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0.603 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2.256 & -0.361 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1.120 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ファジィ制御器

Rule i : If $x(t)$ is A^i then $u(t) = \mathbf{f}_i \mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{f}_1 = [-2.285, 0.726], \mathbf{f}_2 = [-1.300, 0.188]$$

ただし、 $\mathbf{f}_i$ は固有値(0.3,0.5)から計算した。

安定条件

H行列を求めると次のようになる。

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0.800 & -0.150 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 0.545 & -0.011 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 0.800 & -0.150 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3.966 & -0.141 \\ -0.141 & 1.089 \end{bmatrix}$$

正定対称行列Pを次のように選ぶと、(16)式の安定条件を満たす。

表 1 安定条件の判定

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3.966 & -0.141 \\ -0.141 & 1.089 \end{bmatrix}$$

	固有値
$\mathbf{H}_1^T \mathbf{P} \mathbf{H}_1 - \mathbf{P}$	-0.399, -1.165
$\mathbf{H}_2^T \mathbf{P} \mathbf{H}_2 - \mathbf{P}$	-1.869, -1.071
$\mathbf{H}_3^T \mathbf{P} \mathbf{H}_3 - \mathbf{P}$	-0.399, -1.165

シミュレーション結果

前件部ファジィ集合を三角形メンバーシップ関数とし、三角形の幅を変えた場合のシミュレーション結果を図4に示す。なお、状態変数の初期値は、

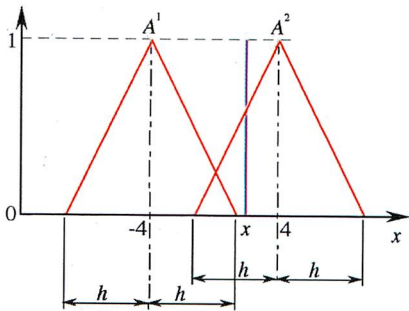
$$\mathbf{x}(0) = [2, 0]^T$$
としている。

結果を見ると、三角形の形状が変化しても安定性が確保されていることが判る。また、 $h < 4$ の場合はファジィ集合 A^1 と A^2 との重なり合いはなく、ファジィ集合が疎となるが、前件部がこのような場合でも制御可能である。

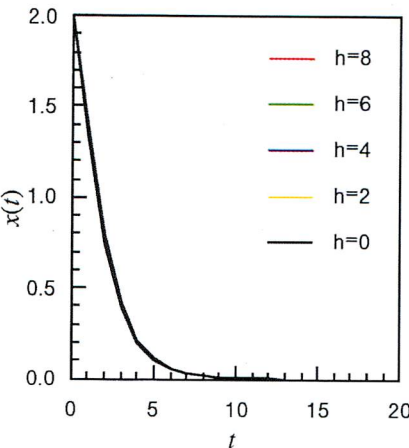
6. 終わりに

本稿では、離散系のTSファジィモデルに距離型ファジィ推論法を適用し、その制御系設計法を提案した。結果として、適合度型では推論が不可能なファジィ集合が疎の場合や、メンバーシップ関数がシングルトンの場合でも、ファジィ制御系の

安定性が確認され、本推論法の有効性が示された。
なお、本稿では離散系の制御系設計についてのみ述べたが、連続系への適用も可能である。



(a) 前件部ファジィ集合



(b) 過渡応答

図 4 シミュレーション結果

参考文献

1) K.Tanaka ,M.Sugeno : Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems, FUZZY SETS AND SYSTEMS, Vol.45, No.2, 135/156(1992)

2) 王碩玉・土谷武士：距離型ファジィ推論法，第12回ファジィシステムシンポジウム講演論文集, pp9-pp20(1996)

3) 田中一男：アドバンストファジィ制御, 共立出版(1994)

4) H.O.Wang, K.Tanaka, M.Griffin: An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues, IEEE Trans. on Fuzzy, Systems, Vol.4, No.1, pp14-pp23(1996)

5) 木村太・王碩玉・土谷武士：距離型ファジィ推論を用いたモデルに基づくファジィ制御，第16回ファジィシステムシンポジウム講演論文集, pp5-pp6(2000)

(平成12年11月27日受理)