コロナ問題に対する注意

新谷　俊忠*

A remark on Corona problem

Toshitada SHINTANI

要　旨

ΩをC^{n}内の領域とするとき、コロナ定理が成立する。

Abstract

Let Ω be any domain in C^n.

Then the Corona theorem holds on Ω.

ΩをC^{n}内の領域とし、Ω上の有界な正則関数の作る関数空間を$H^\infty(\Omega)$で表わす。コロナ問題とは、極大イデアル空間〔6〕を$M_{H^\infty(\Omega,\mu)}$で表わすとき、

$$M_{H^\infty(\Omega,\mu)}=\overline{\Omega}\quad\text{(コロナ定理)}$$

が成り立つかどうかというものである。(〔2〕)。

此所では、新井仁之〔1〕の結果を用いて、コロナ定理が成立することを注意する。

今、$R=(-\infty,\infty)=\{x\mid -\infty<x<\infty\}$, $\overline{R}=[-\infty,\infty]=\{x\mid -\infty\leqq x\leqq\infty\}=R\cup\{\pm\infty\}$とする。

Saks〔5〕に従って、$0\cdot\infty=0$, $\infty-\infty=0$等と約束する。$\overline{R}$の距離を$d(x,y)=|x-y|$ $(\forall x,y\in\overline{R})$とする。

このとき$\overline{R}$は位相ベクトル空間になる。$\overline{R}$はコンパクトだから$\overline{R}$上にHaar測度μがあり、$\mu(\overline{R})<\infty$ (Loomisの定理〔3〕)である。

$\overline{R}$は有限次元(Rudinの定理〔4〕)となるから、有限次元空間の不変測度は唯一つという事実により、μは$\overline{R}$上のルベーグ測度と一致する。

$\overline{R}\supset R$ より $\mu(R)\leq\mu(\overline{R})<\infty$ であるが、μはルベーグ測度であるから

$\mu(\overline{R})=\mu(R\cup\{\pm\infty\})=\mu(R)+\mu(\{\pm\infty\})=\mu(R)+0=\mu(R)$.

$\therefore\ \mu(R)=2\cdot\sup\limits_{x<\infty}x<\infty$

$\therefore\ \mu$を正規化して(R,α,μ)は確率空間になる。

また、

$\mu(R^d)=\left(2\cdot\sup\limits_{x<\infty}x\right)^d<\infty.\ (d\geq1)$

も成立する。

$\therefore$　R^d は有界である。

又、完備化定理と R^d が完備なことから

$\overline{R^d}\cong R^d$ の完備化 $\cong R^d$

$\therefore$　R^d は閉集合である。

$\therefore$　R^d はコンパクトになる。

＊　一般教科　数学　助教授

従って、（R^d, α, μ）も確率空間になる。
$C \cong R^2$（位相同型）よりC^nもコンパクトだから、（C^n, B, μ）も確率空間になる。
従って、（Ω, B, μ）も確率空間に出来る。
一般に、新井〔1〕に依り確率空間の上でコロナ定理が成り立つから、確率空間（Ω, B, μ）の上でもコロナ定理が成り立つ。即ち、コロナ問題が解ける。
更に，前述した様に、R^d はコンパクトだから、

$$f(\omega) \longmapsto |f(\omega)| \quad (\omega \in R^d,\ f(\omega) \in R)$$

は連続ということから $|f(\omega)| \leqq {}^{\exists}K\ (<\infty)$.
従って$L^p(R^d)$（$d \geqq 1, p \geqq 1$）は有界である。
同様に、$H^p(R^d)$も有界であることを注意しておこう。（*q.e.d.*）

参 考 文 献

1. H.Arai. Measures of Carleson type on filrated probabiliy spaces and the Corona theorem on complex Brownian spaces. Proc.A.M.S. 96(1986),643-647.
2. ――，掛谷問題とコロナ問題，数理科学2000年12月号，56-65.
3. L.H.Loomis. An introduction to Abstract Harmonic Analysis. Van Nostrand. 1953.
4. W.Rudin. Functional Analysis. McGrow-Hill. 1973.
5. S. Saks. Theory of the Integral. Warsaw.1937.
6. 竹之内脩－阪井章－貴志一男－神保敏弥，関数環，培風館，1977.

（平成13年10月29日受理）