数学指導上の注意点 (行列・行列式の場合)

藤島　勝弘*・菅原　道弘**

Remark on Teaching Mathematics (In Case Matrix and Determinant)

Katsuhiro FUJISHIMA, Michihiro SUGAWARA

要　旨

行列及び行列式は、線形代数の主要なテーマの1つである。最近の学生の課題や試験の答案から、この分野において、行列式の扱いをもう少し重視すべきであること等がわかった。

Abstract

Matrix and determinant are one of main themes for linear algebra. Reading recent student's reports and examination papers, we found that we must make a point of teaching determinant in this field.

1. はじめに

苫小牧工業高専では、おおむね、2年生の後期から3年生の前期にかけて、行列及び行列式の基礎と応用を2単位で扱っている。我々は長年、数学教育に携わってきたが、最近の学生の課題や試験の答案から、指導上さらに注意を要する点がいくつか読み取れた。ここに具体例を示すとともに、指導上の注意点を述べる。

2. 問題と解答例

課題や試験に出題した問題と学生の解答例をいくつか示す。

(1) **問題1**

行列 $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ によって表される1次変換によって直線y=mxが直線y=mx自身に移されるときmの値を求めよ。

[解]

$$\begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+5mx \\ 3x-4mx \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} -2x+5mx = x \\ 3x-4mx = mx \end{cases}$$

従って　$3x = 5mx$

$$\therefore\ m = \frac{3}{5}$$

(2) **問題2**

3つのベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ から作られる平行六面体の体積Vを求めよ。

[解]

$$V = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= |-8|$$
$$= 8$$

(3) **問題3**

次のベクトルの組は1次独立か1次従属かを調べよ。

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[解]
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 9 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}$$
$$= -60 \neq 0$$

よって　1次独立である。

＊助教授　一般教科
＊＊教　授　一般教科

(4) **問題4**

次の行列の固有値、固有ベクトルを求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & -3 \\ -7 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

［解］$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 & 5 \\ -3 & 2-\lambda & -3 \\ -7 & 1 & -6-\lambda \end{vmatrix}$

$=(6-\lambda)(2-\lambda)(-6-\lambda)-21-15$

$+35(2-\lambda)+3(6+\lambda)+3(6-\lambda)$

$=-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$

$=0$

$\therefore \lambda = 1,\ 2,\ -1$（固有値）

（固有ベクトルについては省略する）

(5) **問題5**

正方行列Aについて、次のことを証明せよ。

λがAの固有値のとき、λ^2はA^2の固有値である。

［証明］Aを対角化行列Pで対角化すると

$P^{-1}AP=D$（対角行列）

このとき　$P^{-1}A^2P=D^2$

ここで　Aと$P^{-1}AP=D$の固有値は一致し

A^2と$P^{-1}A^2P=D^2$の固有値は一致する。

$D=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ であれば $D^2=\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$ なので

λがAの固有値ならばλ^2はA^2の固有値である。

(6) **問題6**

直交行列Aの表す直交変換をfとするとき、任意のベクトル$\vec{P}$について、次式が成り立つことを証明せよ。

$|f(\vec{P})|^2=|\vec{P}|^2$

［証明］　Aは直交行列なので$|A|=\pm1$

$\therefore |A|^2=1$

$\therefore |f(\vec{P})|^2=|A\vec{P}|^2=|A|^2|\vec{P}|^2=|\vec{P}|^2$

3．出題のねらいと注意点

(1) **問題1について**

行列$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$は正則であるので、この1次変換は1対1対応の変換である。従って直線$y=mx$の任意の点（x、mx）の像が、また直線$y=mx$上にあればよい。ところが、学生は、直線$y=mx$が直線$y=mx$に移ることを点（x、mx）が点（x、mx）に移ると考えている。直線が同じ直線に移ることと点が同じ点に移る違いを明確にする必要があった。

［解1］　直線$y=mx$上の任意の点（x、mx）のこの変換による像は

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x+5mx \\ 3x-4mx \end{pmatrix}$$

点$((-2+5m)x,(3-4m)x)$が直線$y=mx$上にあればよいから

$(3-4m)x=m(-2+5m)x$

任意のxについて成り立つので

$3-4m=m(-2+5m)$

$\therefore 5m^2+2m-3=0$

$\therefore (5m-3)(m+1)=0$

$\therefore m=\frac{3}{5},\ -1$……（答）

［解2］　直線$y=mx$上の任意の点（x、mx）のこの変換による像を（x'、y'）とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x+5mx \\ 3x-4mx \end{pmatrix}$$

$\therefore x'=(5m-2)x$

$y'=(-4m+3)x$

2式よりxを消去すると

$$y'=\frac{-4m+3}{5m-2}x'$$

（$m=\frac{2}{5}$は題意に不適、よって$m\neq\frac{2}{5}$）

従って直線$y=mx$は直線$y=\frac{-4m+3}{5m-2}x$に移る。

これが直線$y=mx$に等しいので

$$\frac{-4m+3}{5m-2}=m$$

$\therefore m=\frac{3}{5},\ -1$……（答）

(2) **問題2について**

体積Vは行列式の値の絶対値に等しい。従って

①先ず　行列式の値を求め

②次に　V＝（行列式の絶対値）

とする。行列式の値がそのままVとなるわけではない。平行四辺形の面積についても同様の注意が必要である。

［解］$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-4(1+1)=-8$

$\therefore V=|-8|=8$……（答）

(3) **問題3について**

行列式の値が0となるかならないかで、1次従属、1次独立を判定する問題である。学生の解は第2行を2倍したものに第1行を加えているので行列式の値が等しくない。行列に対する行基本変形と行列式の性質を混同している。違いを明確に

把握させる必要があった

［解］ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 9 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 11 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$

よって１次独立である……（答）

(4) 問題４について

学生の解は正しいのであるが、“行列式をみると直ぐにサラスの方法”から卒業して欲しい。共通因数が出るよう工夫することが大切であるし、三角行列式が出てくると真に簡単になる。

［解］ $\begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 & 5 \\ -3 & 2-\lambda & -3 \\ -7 & 1 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0$

（第１列）＋（第３列）×（－１）：

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 5 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ -1+\lambda & 1 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0$

（第３行）＋（第１行）：

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 5 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\therefore (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0$

$\therefore \lambda = 1,\ 2,\ -1$ （固有値）……（答）

（固有ベクトルは省略）

(5) 問題５について

「$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots\cdots + \alpha_n t^n$とする。$\lambda$がAの固有値であれば、$f(\lambda)$は$f(A)$の固有値であることを証明せよ。」の前段の問題の１つである。学生の解はなかなか面白い。残念なのは、対角化できる場合についてのみ　述べている点である。

例えば$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$は正則行列Ｐによって対角化できない。それにも拘わらず、Ａの固有値は２で、A^2の固有値は４である。

［証明１］ λがAの固有値なので $|A-\lambda E| = 0$

$\therefore |A^2-\lambda^2 E| = |(A-\lambda E)(A+\lambda E)|$

$= |A-\lambda E|\ |A+\lambda E|$

$= 0$

よってλ^2はA^2の固有値である。

［証明２］仮定より$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$　$(\vec{x} \neq \vec{0})$

このとき$A^2\vec{x} = A(A\vec{x}) = A(\lambda\vec{x})$

$= \lambda A\vec{x} = \lambda(\lambda\vec{x}) = \lambda^2\vec{x}$

よってλ^2はA^2の固有値である。

［証明２］は大変理解しやすい。この方法でλ^3かA^3の固有値であることも、λ^nがA^nの固有値であることも容易に証明できる。従って後段の証明も可能になる。

(6) 問題６について

直交変換はベクトルの長さを変えないことの証明を問うた。すなわち「Ａは直交行列である（従って${}^tAA = A{}^tA = E$（単位行列）を満足する）という仮定から$|f(\vec{p})|^2 = |A\vec{p}|^2 = |\vec{p}|^2$を導くことが出来るか」ということである。学生の証明では、「Ａ，Ｂがｎ次の正方行列であるとき$|AB| = |A|\,|B|$」を用いて$|A\vec{p}| = |A|\,|\vec{p}|$としているのではないか？例えば

$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & -\cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$のとき$|A|=-1$

となる。このとき$|A\vec{p}| \neq |A|\,|\vec{p}|$である。

［証明１］ $|f(\vec{p})|^2 = |A\vec{p}|^2 = (A\vec{p})\cdot(A\vec{p})$

$= {}^t(A\vec{p})(A\vec{p}) = ({}^t\vec{p}\,{}^tA)(A\vec{p})$

$= {}^t\vec{p}\,({}^tAA)\vec{p} = {}^t\vec{p}E\vec{p} = {}^t\vec{p}\vec{p}$

$= \vec{p}\cdot\vec{p} = |\vec{p}|^2$

このあと$|f(\vec{p})| \geqq 0$, $|\vec{p}| \geqq 0$なので$|f(\vec{p})| = |\vec{p}|$となるところである。学生にとっては、$|\vec{p}|^2 = \vec{p}\cdot\vec{p}$はわかるが　$\vec{p}\cdot\vec{p} = {}^t\vec{p}\vec{p}$がわかりずらい。行列の積の所でもう少し練習させるべきであった。次に別証明を示す。Ａが２次または３次の正方行列の場合$|A\vec{p}|^2 = |\vec{p}|^2$ 確かに実感するが、３次の場合でも手間が大変である。また、一般の場合は、わかり易いとは言えない。［証明１］の簡潔さは驚きである。

［証明２］

ｉ）Ａが２次の正方行列の場合

$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ とおくと${}^tAA = E$より

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 & \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} \\ \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} & \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 = 1 \\ \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} = 0 \\ \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 = 1 \end{cases} \quad \cdots\cdots①$$

次に$\vec{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$とおくと$|\vec{p}|^2 = x_1^2 + x_2^2$

$$A\vec{p} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

$\therefore |A\vec{p}|^2 = (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2)^2 + (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2)^2$

$= (\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2)x_1^2 + 2(\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22})\cdot x_1x_2 + (\alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2)x_2^2$

$= x_1^2 + x_2^2$ (①を用いた)

$\therefore |A\vec{p}|^2 = |\vec{p}|^2$

ii) Aが3次の正方行列の場合

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とおくと ${}^tAA = E$ より

$$\begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2 & a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32} & a_{11}a_{13}+a_{21}a_{23}+a_{31}a_{33} \\ a_{12}a_{11}+a_{22}a_{21}+a_{32}a_{31} & a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2 & a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33} \\ a_{13}a_{11}+a_{23}a_{21}+a_{33}a_{31} & a_{13}a_{12}+a_{23}a_{22}+a_{33}a_{32} & a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

従って、

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1 \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0 \\ a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0 \\ a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0 \end{array} \right. \quad \cdots\cdots\cdots②$$

ここで $\vec{p} = {}^t(x_1\ x_2\ x_3)$ とおくと

$|\vec{p}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$A\vec{p} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore |A\vec{p}|^2 &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)^2 \\ &\quad + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)^2 \\ &\quad + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)^2 \\ &= (a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2)x_1^2+(a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2)x_2^2+(a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2)x_3^2 \\ &\quad + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32})x_1x_2 \\ &\quad + 2(a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33})x_2x_3 \\ &\quad + 2(a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31})x_3x_1 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \qquad (②を用いた) \end{aligned}$$

$\therefore |A\vec{p}|^2 = |\vec{p}|^2$

iii) Aがn次の正方行列の場合

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots\cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} とおくと$$

${}^tAA = E$ より $\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{kj}\right] = E$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{kj} = \delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & (i=jのとき) \\ 0 & (i \neq jのとき) \end{array} \right. \cdots③$$

ここで $\vec{p} = {}^t(x_1\ x_2\ \cdots\cdots\ x_n)$ とおくと

$|\vec{p}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots x_n^2$

$$A\vec{p} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots\cdots + a_{3n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore |A\vec{p}|^2 &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n)^2 \\ &\quad + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n)^2 \\ &\quad + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots\cdots + a_{3n}x_n)^2 \\ &\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n)^2 \\ &= (a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 + \cdots\cdots + a_{n1}^2)x_1^2 \\ &\quad + (a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 + \cdots\cdots + a_{n2}^2)x_2^2 \\ &\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad + (a_{1n}^2 + a_{2n}^2 + a_{3n}^2 + \cdots\cdots + a_{nn}^2)x_n^2 \\ &\quad + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} + \cdots + a_{n1}a_{n2})x_1x_2 \\ &\quad + 2(a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} + \cdots + a_{n1}a_{n3})x_1x_3 \\ &\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad + 2(a_{11}a_{1n} + a_{21}a_{2n} + a_{31}a_{3n} + \cdots + a_{n1}a_{nn})x_1x_n \\ &\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad + 2(a_{12}a_{1n} + a_{22}a_{2n} + a_{32}a_{3n} + \cdots + a_{n2}a_{nn})x_2x_n \\ &\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad + 2(a_{1\,n-1}\,a_{1n} + a_{2\,n-1}\,a_{2n} + \cdots + a_{n\,n-1}\,a_{nn})x_{n-1}x_n \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots\cdots + x_n^2 \quad (③を用いた) \end{aligned}$$

$\therefore |A\vec{p}|^2 = |\vec{p}|^2$

4. まとめ

行列・行列式の単元においては、次のように注意を要する所が多々ある。これらを強調して指導することは当然である。

(1) 交換法則AB＝BAは一般には成立しない。

(2) A≠O，B≠OであってもAB＝Oとなることがある。

(3) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ （${}^tA$ はAの転置行列）

(4) $\det(A) = |A| = 0$ のとき逆行列 A^{-1} は存在しない。

(5) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(6) 行列Aの表す1次変換fにより、直線が点に移されたり、全平面が直線に移されたりすることがある。

その上、次の点にも注意して行かなければならない。

(1) 行列式の性質の習得を徹底する。

そうすれば、行列に対する行基本変形との違い

も明確化できるし、固有値を求めることも容易になる。その結果、行列の対角化及びその応用も容易に習得できる。

(2) 不動直線の問題に関しては、同時に不動点の問題も扱い、違いを明確化する。
使う行列を$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$とするなど、固有値が1でないものとするのがよい。

(3)平行四辺形の面積や平行六面体の体積の問題では、行列式の値が負になるもので練習する。

以上限られた時間の中でどう扱うか、大いに工夫しなければならない。

参考文献

1）田河生長他：線形代数、大日本図書（2001）
2）H．アントン：やさしい線型代数、現代数学社（1994）
3）小寺平治：初めて学ぶ線形代数問題集、現代数学社（1997）
4）青木利夫他：改訂線形代数要論、培風館（1989）

（平成14年11月27日受理）