

非線形界面波群の自己変調

中野 渉*

Self-modulation of Nonlinear Interfacial Gravity Wave Groups

NAKANO Wataru

要 旨

特異摂動展開，多重スケール法，微分展開法を用いて非線形界面波群の自己変調を記述する非線形 Shrödinger 方程式を導出し，変調不安定が発生する条件を導いた。

Abstract

The nonlinear Shrödinger equation that describes the self-modulation phenomena on nonlinear interfacial gravity waves was derived based on the singular perturbation method, the multi-scale method and the derivative expansion method. The condition for modulational instability was presented based on this equation.

1 はじめに

有限振幅波における非線形性は，波形・伝播特性のみならず波群構造にも影響を与えることが知られている．水の表面波においては，一様波列が擾乱との非線形相互作用のため変調波列に崩壊する Benjamin-Feir 型 (B-F 型) 不安定現象¹⁾や波束の包路ソリトンへの分裂^{5) 7)}などが良く知られた例であり，これらの現象はいずれも非線形 Shrödinger 方程式 (以下，NLS 方程式) で記述される⁴⁾。

内部波の非線形波群も条件によってはこの NLS 方程式で記述されることが，連続成層については Grimshaw²⁾によって，二層流体については Tanaka⁶⁾によってそれぞれ導かれている。

本研究では上層，下層の密度がそれぞれ一定値 ρ_1, ρ_2 である二層流体の非線形界面重力波群を記述する NLS 方程式を，演算子表現と特異摂動展開，多重スケール法，微分展開法^{3) 8)}といった手法に基いて導出し，変調不安定が発生する条件を導く。

2 基礎方程式

流れ場は鉛直 2 次元で非粘性，非圧縮，渦なし．上層，下層の水深はそれぞれ h_1, h_2 ，静止界面のレベルを y 軸の原点とする (図 1)． $y = h_1, -h_2$ において固定境界とし，また界面張力は考慮しない．このとき，上層，下層の流速 $v_1(x, y, t), v_2(x, y, t)$ について各層の速度ポテンシャル $\phi_1(x, y, t), \phi_2(x, y, t)$ を

$$v_i = \nabla \phi_i \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

で定義する．以上の変数と静止界面からの鉛直変位 $\eta(x, t)$ に関する基礎方程式系は次式で表される (添字 x, y, t は， $\phi_{1y} = \partial \phi_1 / \partial y$ のように偏導関数を表す) ．

*教授 機械工学科

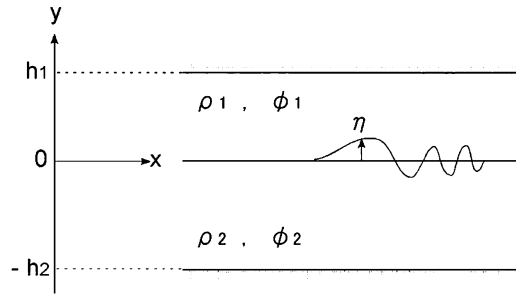


図1：二層流体と座標系

$$\Delta\phi_i = \phi_{i\,xx} + \phi_{i\,yy} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

$$\phi_{1y} = 0 \quad \text{at } y = h_1, \quad \phi_{2y} = 0 \quad \text{at } y = -h_2 \quad (3)$$

$$\eta_t + \phi_{1x}\eta_x = \phi_{1y}, \quad \eta_t + \phi_{2x}\eta_x = \phi_{2y} \quad \text{at } y = \eta(x, t) \quad (4)$$

$$\rho_1(\phi_{1t} + g\eta + \frac{v_1^2}{2}) = \rho_2(\phi_{2t} + g\eta + \frac{v_2^2}{2}) \quad \text{at } y = \eta(x, t) \quad (5)$$

式(2)は支配方程式（ラプラス方程式），式(3)は固定境界での境界条件，式(4)は密度界面での運動学的境界条件，式(5)は密度界面での動力的境界条件である．ここで，

$$\beta = \rho_2/\rho_1, \quad g' = \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \right) = (\beta - 1)g \quad (6)$$

とおけば，動力的境界条件(5)は，

$$\eta = \frac{1}{g'} \{ (\phi_{1t} - \beta\phi_{2t}) + \frac{1}{2} (v_1^2 - \beta v_2^2) \} \quad \text{at } y = \eta(x, t) \quad (7)$$

となる．これを式(4)に代入して η を消去すると，運動学的境界条件は次式になる．

$$\begin{aligned} \phi_{1tt} - \beta\phi_{2tt} - g'\phi_{1y} = \frac{1}{2} \{ -(2\partial_t + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla)v_1^2 + \beta(\partial_t + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla)v_2^2 \} \\ + \beta(\phi_{1x}\phi_{2tx} + \phi_{1y}\phi_{2ty}) \quad \text{at } y = \eta(x, t) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \phi_{1tt} - \beta\phi_{2tt} - g'\phi_{2y} = \frac{1}{2} \{ -(\partial_t + \mathbf{v}_2 \cdot \nabla)v_1^2 + \beta(2\partial_t + \mathbf{v}_2 \cdot \nabla)v_2^2 \} \\ - \beta(\phi_{2x}\phi_{1tx} + \phi_{2y}\phi_{1ty}) \quad \text{at } y = \eta(x, t) \end{aligned} \quad (9)$$

ここで， $\partial_t = \partial/\partial t$ ， $\partial_x = \partial/\partial x$ ， $\partial_y = \partial/\partial y$ である．

結局，支配方程式系は式(2),(3),(8),(9),(7)である．ラプラス方程式(2)を境界条件(3),(8),(9)の下で解いて ϕ_1, ϕ_2, v_1, v_2 を求めれば，変位 η は式(7)で定まることになる．

3 演算子表現と特異摂動展開

次の演算子表現を用いる.

$$\epsilon = i\partial_t, \quad \mathbf{p} = -i\partial_x, \quad T_i = \tanh h_i \mathbf{p} \quad (i = 1, 2) \quad (10)$$

$$\partial_t = -i\epsilon, \quad \partial_x = i\mathbf{p} \quad (11)$$

これにより支配方程式系 (2), (3), (8), (9), (7) を書き換えると, 式 (2), (3) の「厳密解」は次式で与えられる.

$$\phi_1 = \frac{\cosh\{(y - h_1)\mathbf{p}\}}{\cosh h_1 \mathbf{p}} f_1(x, t), \quad \phi_2 = \frac{\cosh\{(y + h_2)\mathbf{p}\}}{\cosh h_2 \mathbf{p}} f_2(x, t) \quad (12)$$

ここで, $f_i(x, t) = \phi_i(x, y, t)|_{y=0}$ である. この式は, $y = 0$ のまわりで特異摂動展開すると

$$\phi_1 = \{1 - y\mathbf{p}T_1 + \frac{1}{2}y^2\mathbf{p}^2 - \frac{1}{6}y^3\mathbf{p}^3T_1 + \cdots\} f_1(x, t) \quad (13)$$

$$\phi_2 = \{1 + y\mathbf{p}T_2 + \frac{1}{2}y^2\mathbf{p}^2 + \frac{1}{6}y^3\mathbf{p}^3T_2 + \cdots\} f_2(x, t) \quad (14)$$

が得られる. これを密度界面上の境界条件 (8), (9), (7) に代入すると $f_1(x, t)$, $f_2(x, t)$, $\eta(x, t)$ に関する方程式が得られる.

4 多重スケール法と微分展開法

一様波列の非線形自己変調を与えるような多重スケールを次式で導入する.

$$t, \quad t_1 = \varepsilon t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t, \quad x = x, \quad x_1 = \varepsilon x, \quad x_2 = \varepsilon^2 x, \quad t = t(t, t_1, t_2), \quad x = x(x, x_1, x_2) \quad (15)$$

ここで, ε は波形勾配などの微小量を表すパラメータである. これに対応して演算子も次式になる (微分展開法).

$$\epsilon = \epsilon + \varepsilon\epsilon^{(1)} + \varepsilon^2\epsilon^{(2)}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p} + \varepsilon\mathbf{p}^{(1)} + \varepsilon^2\mathbf{p}^{(2)} \quad (16)$$

$$T_i = T_i + \varepsilon T_{ip}\mathbf{p}^{(1)} + \varepsilon^2\{T_{ip}\mathbf{p}^{(2)} + \frac{1}{2}T_{ipp}(\mathbf{p}^{(1)})^2\} \quad (17)$$

ここで, $\epsilon^{(n)} = i\partial_{t_n}$, $\mathbf{p}^{(n)} = -i\partial_{x_n}$ である.

未知関数 f_i , η も次式のように摂動展開する.

$$f_i = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n f_i^{(n)}(x, x_1, x_2; t, t_1, t_2), \quad \eta = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n \eta^{(n)}(x, x_1, x_2; t, t_1, t_2) \quad (18)$$

以上の展開と式 (14) を界面上の境界条件 (8), (9), (7) に代入して, $O(\varepsilon)$ から $O(\varepsilon^3)$ まで求め, オーダーごとに式を整理する.

5 第1次近似

$O(\varepsilon)$ の方程式は次式である.

$$\begin{pmatrix} (\epsilon^2 - g'\mathbf{p}T_1) & -\beta\epsilon^2 \\ \epsilon^2 & -(\beta\epsilon^2 - g'\mathbf{p}T_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$g'\eta^{(1)} = -i\epsilon(f_1^{(1)} - \beta f_2^{(1)}) \quad (20)$$

一様波列の変調を扱うので, この方程式の解を一様波列とゆっくり変化する項 φ_i (Stokes drift) の和として次式のように仮定する.

$$f_i^{(1)} = \psi_i Z + \bar{\psi}_i \bar{Z} + \varphi_i \quad (21)$$

ここで,

$$\psi_i = \psi_i(x_1, x_2; t_1, t_2), \quad \varphi_i = \varphi_i(x_1, x_2; t_1, t_2), \quad Z = e^{i(kx - \omega t)}$$

である. 方程式(19),(20)が自明でない解を持つ条件から以下のように線形波の分散関係と線形波の解が得られる.

$$\omega^2 = \frac{g'k\sigma_1\sigma_2}{\beta\sigma_1 + \sigma_2} \quad (22)$$

$$\eta^{(1)} = AZ + \bar{A}\bar{Z}, \quad \psi_1 = (i\omega/k\sigma_1)A, \quad \psi_2 = (-i\omega/k\sigma_2)A \quad (23)$$

ここで, $A = A(x_1, x_2; t_1, t_2)$ は複素振幅であり, $\sigma_i = \tanh h_i k$ である.

6 第2次近似

$O(\varepsilon^3)$ の項から永年項(secular term)が消える条件から,

$$(\partial_{t_1} + \frac{d\omega}{dk}\partial_{x_1})A = 0 \quad (24)$$

が得られる. これは複素振幅 $A(x_1, x_2; t_1, t_2)$ が第1近似として線形波の群速度 $V_g = d\omega/dk$ で伝播することを意味する. 2次の解 $f_i^{(2)}, \eta^{(2)}$ は2次高調波に対応し,

$$f_i^{(2)} = \chi_i(x_2, t_2)Z^2 + \bar{\chi}_i(x_2, t_2)\bar{Z}^2 \quad (25)$$

とおくことで得られるが, それは複雑な式となり以下の議論には不要であるためその結果を省略する.

7 第3次近似

$O(\varepsilon^3)$ において, Z^0, Z^1, Z^2 に比例する永年項(secular term)が消える条件から, $\varphi_i(x_1, x_2; t_1, t_2), A(x_1, x_2; t_1, t_2)$ に関する3本の方程式が得られ, これより複素振幅 $A(x_1, x_2; t_1, t_2)$ に関する発展方程式が次式の形で得られる.

$$i(\partial_{t_2} + V_g\partial_{x_2})A + \mu A_{x_1x_1} + \nu|A|^2A = 0 \quad (26)$$

これは非線形Shrödinger方程式(以下, NLS方程式)であり, その係数 μ, ν は次式である.

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{dV_g}{dk} = \frac{1}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2}, \quad \nu = -\frac{\omega}{2g(\rho_2 - \rho_1)}\alpha + P \quad (27)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \alpha = & [-4\rho_1\rho_2\omega^2(\sigma_1^{-1} + \sigma_2^{-1})^2V_g^2 + 4\omega^3Q(\frac{\rho_2h_1}{\sigma_2} - \frac{\rho_1h_2}{\sigma_1})V_g + h_1h_2\omega^4Q^2 \\ & + 4\omega^2g(\rho_2 - \rho_1)(\frac{\rho_2h_1}{\sigma_2^2} + \frac{\rho_1h_2}{\sigma_1^2})] / [(\rho_1h_2 + \rho_2h_1)V_g^2 - g(\rho_2 - \rho_1)h_1h_2] \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} P = & -\frac{k\omega^3}{g(\rho_2 - \rho_1)}[\frac{\rho_1}{\sigma_1}(2 - \sigma_1^{-2}) + \frac{\rho_2}{\sigma_2}(2 - \sigma_2^{-2}) \\ & + \frac{1}{4}(\rho_1\sigma_1 + \rho_2\sigma_2)^{-1}\left\{\rho_1(1 - \frac{3}{\sigma_1^2}) - \rho_2(1 - \frac{3}{\sigma_2^2})\right\}^2] \end{aligned} \quad (29)$$

$$Q = \rho_1(1 - \sigma_1^{-2}) - \rho_2(1 - \sigma_2^{-2}) \quad (30)$$

となる. 係数 ν の表現はTanaka⁶⁾と一致する. また, この段階でNLS方程式(26)の独立変数は x, t に置き換えてよく, そのとき,

$$i(\partial_t + V_g\partial_x)A + \mu A_{xx} + \nu|A|^2A = 0 \quad (31)$$

となる.

8 非線形Shrödinger方程式のソリトン解

式 (31) は静止座標系 (x, t) に関するNLS方程式であるが, V_g で移動する座標系

$$\xi = x - V_g t, \quad \tau = t \quad (32)$$

に乗り換えれば, 標準的なNLS方程式

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \nu |A|^2 A = 0 \quad (33)$$

が得られる. この方程式の初期値問題は「逆散乱法」によって厳密に解くことが可能であるが, ここではいくつかの特殊解について調べる.

$\mu\nu > 0$ の場合, この方程式は次の1-ソリトン解を持つ.

$$A(\xi, \tau) = A_0 \operatorname{sech} \left\{ \sqrt{-\sigma/\mu} \xi \right\} e^{-i\sigma\tau} \quad (34)$$

$$A_0 = \sqrt{-2\sigma/\nu} \quad (35)$$

ここで, σ は搬送波周波数の修正項の意味がある. この解とNLS方程式のGalilei変換不変性から, より一般的な次の1-ソリトン解を導くことができる.

$$A(\xi, \tau) = A_0 \operatorname{sech} \left\{ \sqrt{-\sigma/\mu} (\xi - C\tau) \right\} \exp \left[i \left(\frac{C}{2\mu} \left\{ \xi - \left(\frac{C}{2} + \frac{2\mu\sigma}{C} \right) \tau \right\} \right) \right] \quad (36)$$

$$A_0 = \sqrt{-2\sigma/\nu} \quad (37)$$

以上の1-ソリトン解は, 平面波部分と振幅部分が異なる速度で進行するため包絡ソリトンと呼ばれる. ここで C は任意の実定数であり, C を適当に選べば指数関数部分による搬送波周波数を自由に修正できる. 従って搬送波周波数は1次近似での角周波数 ω に縛られず, 搬送波周波数の異なるいくつかのソリトンが共存することが可能である.

9 一様波列の変調不安定

NLS方程式 (33) はソリトン解の他に一様波列 (平面波) の解

$$A = A_0 \exp [i\{\kappa\xi - (\mu\kappa^2 - \nu A_0^2)\tau\}] \quad (38)$$

を持つことがわかる. 第2次近似で得られる高調波 (式 (25)) の存在を思い出せば, これは表面波におけるストークス波に相当するが, この解は変調不安定である. これを確かめるにはこの解を

$$A = \rho^{1/2} \exp \left[\frac{i}{2\mu} \int U d\xi \right] \quad (39)$$

とにおいて, NLS方程式 (33) に代入すると,

$$\rho_\tau + (\rho U)_\xi = 0 \quad (40)$$

$$U_\tau + UU_\xi = 2\mu\nu\rho_\xi + \mu^2\{\rho^{-1/2}(\rho^{-1/2}\rho_\xi)_\xi\}_\xi \quad (41)$$

従って, $\mu\nu > 0$ のときこの方程式系は楕円型になり, 微小擾乱

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho \exp [i(K\xi - \Omega\tau)] \quad (42)$$

$$U = U_0 + \delta U \exp [i(K\xi - \Omega\tau)] \quad (43)$$

に対して不安定である. 実際この微小擾乱を代入すると,

$$\Omega = U_0 K \pm (-2\mu\nu\rho_0)^{1/2} K + O(K^3) \quad (44)$$

となる. $\rho_0 > 0$ であり, この式の右辺第2項目より, $\mu\nu > 0$ では擾乱が指数関数的に発達するが, $\mu\nu < 0$ では一様波列は安定であることがわかる. これが Benjamin-Feir 型不安定性のNLS方程式に基づく説明である.

なお, この現象は一定間隔で並んだ無数の包絡ソリトン列の衝突によって説明可能であり, それによれば一様波列は変調不安定によって一方的に変調波に向かうのではなく, 一定周期で変調波と非変調波の状態を繰り返す再起現象を呈することが知られている⁴⁾.

10 まとめ

非線形界面波群の自己変調について理論的研究をおこない, 以下の結論が得られた.

1) 非粘性, 非圧縮, 渦なしの二層流体について, 演算子表現と特異摂動展開および多重スケール展開法, 微分展開法に基づき, 基礎方程式から非線形波群を記述する非線形Shrödinger方程式を導出した. 二層流体においても表面波の理論で使われる演算子表現による特異摂動展開の有効性を示した.

2) 非線形Shrödinger方程式の1ソリトン解(包絡ソリトン解)と一様波列解を示し, 後者が変調擾乱に対して不安定になる条件を示した.

参考文献

- [1] Benjamin, T.B. and Feir, J.: The disintegration of wave trains on deep water, *J. Fluid Mech.*, Vol.27 (1967), 417-430.
- [2] Grimshaw, R.: The modulation of an internal gravity-wave packet and the resonance with the mean motion, *Stud. Appl. Math.*, Vol.56, (1977), 241-266.
- [3] Hashimoto, H. and Ono, H.: Nonlinear modulation of gravity waves, *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol.33 (1972), 805-811.
- [4] Lake, B.M. and Yuen, H.C.: A note on some nonlinear water-wave experiments and the comparison of data with theory, *J. Fluid Mech.*, Vol.83(1977), 75-81.
- [5] Su, M-Y: Three-dimensional deep-water waves. Part 1. Experimental measurement of skew and symmetric wave patterns, *J. Fluid Mech.*, Vol.124(1982), 73-108.
- [6] Tanaka, M.: Nonlinear self-modulation of interfacial waves, *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol.51(1982), 2016-2023.
- [7] Yuen, H. and Lake, B.: Nonlinear deep water waves: Theory and experiment, *Phys. Fluids*, Vol.18(1975), 956-960.
- [8] 谷内俊弥, 西原功修: 非線形波動, 岩波書店, 1978.

(平成14年11月29日受理)