Rはコンパクト集合であるか

新谷　俊忠*

Is R a compact set ?

Toshitada SHINTANI

要　旨

Rはコンパクト集合である。

Abstract

R is a compact set.

実数の全体R＝（$-\infty$, ∞）＝ $\{x \mid -\infty < x < \infty\}$ がコンパクトでないという反例ではRの開被覆として例えば

$$I_n = \left(n - \frac{2}{3},\ n + \frac{2}{3}\right) \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$$

等が考えられている。（以下のことは他の例でも同じ。）

$$I_n \subset R \text{ だから } \bigcup_n^{\infty} I_n \subset R$$

$I_{\pm\infty} = \{\pm\infty\}$ だから仮に $\bigcup_n^{\infty} I_n$ が $I_{\pm\infty}$ を含めば $\pm\infty \in R$ となり不合理。故に $\bigcup_n^{\infty} I_n$ は $I_{\pm\infty}$ を含まないから

$$R \subset \bigcup_n^{\infty} I_n$$

とはならない。

又、$\bigcup_n^{\infty} I_n \cup I_{\pm\infty}$ とすると

$$R \subset \bigcup_n^{\infty} I_n \cup I_{\pm\infty}$$

であるが、$I_{\pm\infty} = \{\pm\infty\}$（2点）は有限集合であるから $I_{\pm\infty}$ は閉集合で、$\bigcup_n^{\infty} I_n \cup I_{\pm\infty}$ はRの開被覆ではない。即ち、I_n はRの開被覆ではない。

故に、Rがコンパクトでないという反例は構成されない。

次に、もし、$\sup_{x<\infty} x = \infty$ とすると、これは $x \leqq \infty$ となる最小の∞（それも∞）だから $x = \infty$ となる実数 x が少なくとも1つ存在することになり $x < \infty$ に矛盾する。

$$\therefore \sup_{x<\infty} x \neq \infty \text{ 即ち } \sup_{x<\infty} x < \infty,$$

同様にして $\inf_{x>-\infty} x > -\infty$

故に、$R = (-\infty,\ \infty) = \left[\inf_{x>-\infty} x,\ \sup_{x<\infty} x\right]$

はRの有界閉集合であるから、Rはコンパクトである。

最後に（0，1）はコンパクトでないことを示そう。

＊一般教科　数学　助教授

よく知られている様に、

$$I_n = \left(\frac{1}{n},\ 1\right) \quad (n = 2,\ 3,\ \cdots)$$

とすると、$I_n \subset (0,\ 1)$ から $\bigcup_{n}^{\infty} I_n \subset (0,\ 1)$、
ここで、$I_\infty = (0,\ 1)$ であるから

$$\bigcup_{n}^{\infty} I_n = (0,\ 1)$$

となり、I_nは（0，1）の開被覆であるが有限部分被覆をもたない。
∴（0，1）はコンパクトでない。

謝辞　　討論していただいた北海道大学儀我美一教授と大阪大学小谷眞一教授に感謝致します。

参考文献

斎藤正彦，数学の基礎　　集合・数・位相，東京大学出版会，2002

（平成14年11月29日受理）